

## EP 083 - 2009 : Optimisation en géométrie plane

Auteur du corrigé : François TEXIER

TI-Nspire™ CAS

**Avertissement** : ce document a été réalisé avec la version 1.7

**Fichier associé** : EP083\_2009\_Optimisation\_CAS.tns

### 1. Le sujet

**Sujet 083 de l'épreuve pratique 2009 – Optimisation en géométrie plane**

#### Énoncé

Dans un repère orthonormal du plan, on considère la courbe représentative  $\mathcal{C}$  de la fonction  $x \mapsto e^x$  et la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $y = 2x - 3$ .

On se propose de déterminer, s'il existe, un point  $M$  de  $\mathcal{C}$  tel que la distance de  $M$  à la droite  $\mathcal{D}$  soit minimale.

#### Partie A

1. Utiliser un logiciel de géométrie pour construire la droite  $\mathcal{D}$  et la courbe  $\mathcal{C}$ .
2. Placer un point mobile  $M$  sur  $\mathcal{C}$  et construire le point  $N$  image de  $M$  par la projection orthogonale sur  $\mathcal{D}$ .
3. Conjecturer, au moyen du logiciel, l'abscisse du point  $M_0$  de  $\mathcal{C}$  dont la distance à  $\mathcal{D}$  est minimale.  
Proposer une valeur approchée de cette distance minimale.  
Conjecturer une propriété de la tangente en  $M_0$  à  $\mathcal{C}$ .

#### Partie B

4. Élaborer une méthode permettant de démontrer ces conjectures.
5. Calculer les coordonnées de  $M_0$  et sa distance à  $\mathcal{D}$ .

### Production demandée

- Construction de  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{D}$ ,  $M$  et  $N$  au moyen du logiciel de géométrie.
- Conjectures relatives à l'abscisse de  $M_0$  et à la tangente en  $M_0$  à  $\mathcal{C}$ .
- Proposition d'une valeur approchée de la distance de  $M_0$  à  $\mathcal{D}$ .
- Calcul des coordonnées de  $M_0$  et de sa distance à  $\mathcal{D}$ .

### Compétences évaluées

- Tracer au moyen d'un logiciel de géométrie des courbes définies par leur équation.
- Construire l'image d'un point par une projection orthogonale.
- Connaître la définition de la projection orthogonale sur une droite dans le plan.
- Caractériser la tangente en un point à la courbe représentative d'une fonction dérivable.
- Exprimer, en repère orthonormal, la distance d'un point à une droite dans le plan.
- Déterminer un extremum d'une fonction dérivable.

## 2. Corrigé

### Partie A

#### 1) Ouvrir une page **Graphiques & géométrie**.

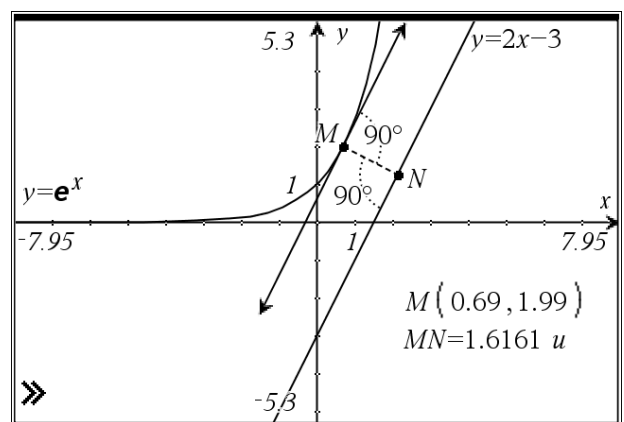
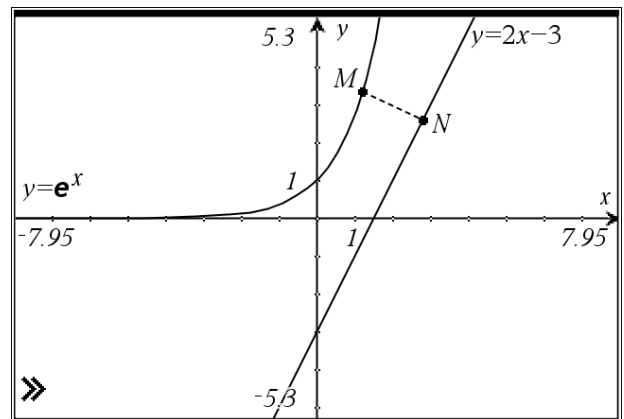
Demander le tracé de la fonction  $f_1$  définie par  $f_1(x) = e^x$  et tracer la droite  $\mathcal{D}$  en plaçant deux points de cette droite, par exemple  $A(0; 3)$  et  $B(3; 3)$ , puis les cacher (ils n'étaient utiles que pour le tracé de  $\mathcal{D}$ ).

2) Placer le point  $M$  sur la courbe  $\mathcal{C}$  de  $f_1$ , puis tracer la perpendiculaire à  $\mathcal{D}$  passant par  $M$  et placer le point  $N$  intersection de cette perpendiculaire avec  $\mathcal{D}$ . Cacher ensuite cette perpendiculaire et tracer le segment  $[MN]$ .

3) Faire afficher les coordonnées de  $M$  les placer à un endroit qui n'est pas utilisé par la figure et placer la lettre  $M$ , sous forme de texte, devant ; mesurer la longueur du segment  $[MN]$  (modifier son écriture en ajoutant «  $MN=$  » devant).

Il semble que la longueur  $MN$  soit minimale pour un point  $M_0$  d'abscisse environ égale à 0,69 et que ce minimum soit environ égal à 1,6161.

Il semble également que la tangente en  $M_0$  soit perpendiculaire au segment  $[MN]$ , autrement dit parallèle à la droite  $\mathcal{D}$ .



**Remarque :** Pour faire afficher les angles en degrés sur cette feuille sans perturber le réglage global du classeur, aller dans le menu **Fichier, Réglages, Réglages du classeur**, sélectionner la feuille **Graphiques & géométrie**, sélectionner le degré comme mesure d'angle et valider. Ce réglage n'influencera pas le reste du classeur.

Si l'on travaille avec la nomade, choisir , **8 : Infos système, 3 : Réglages Graphiques & géométrie**.

### Partie B

4) La distance d'un point à une droite s'écrit  $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ , avec  $\mathcal{D}$  d'équation  $ax + by + c = 0$ .

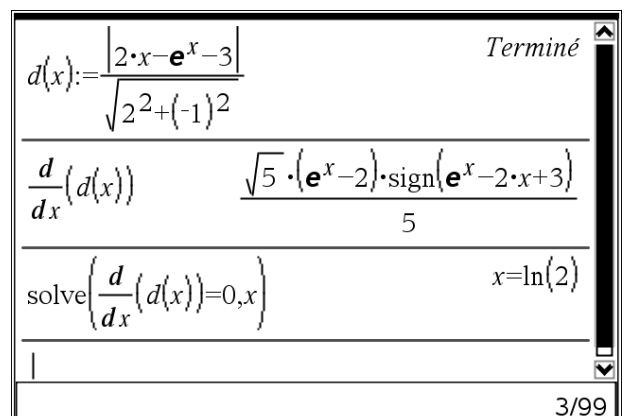
La droite  $\mathcal{D}$  a pour équation  $y = 2x - 3$ ,  
soit  $2x - y - 3 = 0$ .

Le point  $M$  de  $\mathcal{C}$  a pour coordonnées  $(x; e^x)$ . La distance

de  $M$  à  $\mathcal{D}$  s'écrit donc  $d(x) = \frac{|2x - e^x - 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}}$ .

Déterminons les variations de cette fonction.

D'après l'écran ci-contre, la dérivée s'annule pour  $x = \ln 2$ .



Or le signe de cette dérivée dépend du signe de  $e^x - 2$ , mais aussi du signe de  $e^x - 2x + 3$ , c'est-à-dire de la position de la courbe  $\mathcal{C}$  par rapport à la droite  $\mathcal{D}$ .

Le dessin laisse à penser que la courbe  $\mathcal{C}$  est toujours au-dessus de  $\mathcal{D}$  ; prouvons-le.

Soit  $g$  la fonction définie par  $g(x) = e^x - 2x + 3$ .

$g'(x) = e^x - 2$  est négative si  $x \leq \ln 2$  et positive si  $x \geq \ln 2$ , donc  $g$  admet un minimum en  $\ln 2$  qui vaut  $5 - 2\ln 2 > 0$ , donc pour tout  $x$ ,  $g$  est positive, donc la courbe  $\mathcal{C}$  est toujours au-dessus de la droite  $\mathcal{D}$ .

Ce résultat nous permet d'affirmer que  $d'(x) \leq 0$  si  $x \leq \ln 2$  et  $d'(x) \geq 0$  si  $x \geq \ln 2$ , donc  $d$  est minimale pour  $x = \ln 2$  dont une valeur approchée est 0,69, valeur lue graphiquement.

Ce minimum est égal à  $\frac{(5 - 2\ln 2)\sqrt{5}}{5}$  dont une valeur approchée est 1,6161, ce qui confirme les lectures graphiques.

La courbe  $\mathcal{C}$  tracée en partie a pour équation  $y = e^x = f_1(x)$  et la tangente à cette courbe  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse  $\ln 2$  a pour coefficient directeur 2, ce qui justifie son parallélisme avec la droite  $\mathcal{D}$ .

|                                                                                                |               |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------|
| solve $\left( \frac{d}{dx}(d(x)) \geq 0, x \right)$                                            |               |
| $e^x - 2 \cdot x + 3 > 0$ and $x \geq \ln(2)$ or $e^x - 2 \cdot x + 3 < 0$ and $x \leq \ln(2)$ |               |
| solve $\left( \frac{d}{dx}(d(x)) \leq 0, x \right)$                                            |               |
| $e^x - 2 \cdot x + 3 > 0$ and $x \leq \ln(2)$ or $e^x - 2 \cdot x + 3 < 0$ and $x \geq \ln(2)$ |               |
| $\ln(2)$                                                                                       | 0.69314718056 |
| 8/99                                                                                           |               |

|                                                                                                |                                                  |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------|
| $e^x - 2 \cdot x + 3 > 0$ and $x \leq \ln(2)$ or $e^x - 2 \cdot x + 3 < 0$ and $x \geq \ln(2)$ |                                                  |
| $\ln(2)$                                                                                       | 0.69314718056                                    |
| $d(x) _{x=\ln(2)}$                                                                             | $\frac{-(2 \cdot \ln(2) - 5) \cdot \sqrt{5}}{5}$ |
| $d'(x) _{x=\ln(2)}$                                                                            | 1.61609829184                                    |
| tangentLine( $f_1(x), x, \ln(2)$ )                                                             | $2 \cdot x - 2 \cdot (\ln(2) - 1)$               |
|                                                                                                |                                                  |
| 9/99                                                                                           |                                                  |