

EP 089 - 2009 : Simulation d'un tirage de boules

Auteur du corrigé : François TEXIER

TI-Nspire™ – TI-Nspire™ CAS

Avertissement : ce document a été réalisé avec la version 1.7**Fichier associé** : EP089_2009_Simulation.tns

1. Le sujet

Sujet 089 de l'épreuve pratique 2009 – Simulation d'un tirage de boules dans des urnes

Énoncé

On dispose de deux urnes U et V contenant des boules indiscernables au toucher. L'urne U contient dix boules numérotées de 1 à 10. L'urne V contient dix boules numérotées de 0 à 9. Un jeu se déroule de la manière suivante : le joueur verse une mise initiale de 100 jetons, puis il tire au hasard une boule dans l'urne U et une boule dans l'urne V de façon indépendante. Chaque boule portant un numéro inférieur ou égal à 4 rapporte a jetons où a est un naturel non nul, le tirage d'une autre boule ne rapporte ni ne fait perdre aucun jeton. On regarde à l'issue de ce jeu le gain algébrique (gain ou perte) compté en jetons.

Partie A

1. On simule 1000 exécutions du jeu sur un tableur. On fixe dans un premier temps $a = 150$.

a) Réaliser une feuille de calcul sur le modèle suivant :

	A	B	C	D
1	Rang du tirage	Numéro de la boule tirée dans l'urne U	Numéro de la boule tirée dans l'urne V	Gain algébrique
2	1			
3	2			
.	.			
.	.			
.	.			
1001	1000			

b) Déterminer la moyenne des gains obtenus lors de cette simulation.

c) À l'aide d'autres simulations, conjecturer la valeur vers laquelle semble tendre la moyenne des gains obtenus.

2. On souhaite faire varier la valeur de a .

a) Adapter la feuille de calcul pour obtenir des simulations en fonction de a .

b) Est-il possible de donner une valeur à a qui paraisse rendre le jeu équitable ?

Partie B

3. Soit X la variable aléatoire donnant le gain algébrique à l'issue d'un tirage.

a) Déterminer l'espérance de X en fonction de a .

b) Est-il possible de trouver a afin que le jeu soit équitable ?

c) Comparer le résultat avec les conjectures obtenues dans la **Partie A**.

Production demandée

- Visualisation à l'écran de la feuille de calcul.
- Réponses argumentées pour les questions posées en 3. a, 3. b et 3. c.

Compétences évaluées

- Utiliser les fonctions de test d'un tableur ou d'une calculatrice.
- Faire varier la valeur d'une cellule de la feuille de calcul pour tester une hypothèse.
- Simuler une expérience aléatoire à l'aide d'un tableur.
- Calculer l'espérance mathématique d'une variable aléatoire.

2. Corrigé

Partie A

1) Ouvrir une page **Tableur & listes**.

a) Nommer la colonne **A** « n » (qui donnera le rang du tirage), saisir dans la cellule grisée la formule **=seq(x,x,1,1000,1)** et valider.

Nommer la colonne **B** « nu » (qui donnera le numéro de la boule tirée dans l'urne U), saisir dans la cellule **B1** la formule **=randint(1,10)** (qui génère un entier aléatoire compris entre 1 et 10) et valider. Revenir en cellule **B1** et, dans le menu **Données**, utiliser la commande **Saisie rapide**, descendre jusqu'en cellule **B1000** et valider.

Faire de même en colonne **C**, nommée « nv », la formule étant **=randint(0,9)**.

Nommer la colonne **D** « gain » et, en cellule **D1**, saisir la formule **=when(b1≤4,150,0)+when(c1≤4,150,0)-100** qui permet d'obtenir le gain algébrique du joueur.

b) Nommer la colonne **E** « moyenne » et saisir dans la cellule **E1** la formule **=mean(d1:d1000)** qui permet d'obtenir la moyenne des gains sur les 1000 tirages effectués ; en cellule **E2** taper, entre guillemets "soit", puis, en cellule **E3**, saisir la formule **=approx(e1)** pour avoir une valeur décimale de cette moyenne.

c) Utiliser la commande  **R** pour obtenir une autre simulation et recommencer autant que nécessaire. Cette moyenne prend des valeurs qui, pour la plupart, sont comprises entre 30 et 40 ; il ne semble pas possible d'émettre une conjecture plus précise.

2)

a) Insérer une colonne avant la colonne **A**, en cellule **A1** saisir (avec les guillemets) "a=", puis en cellule **A2** saisir une valeur (par exemple, 150) et enfin corriger la formule de la cellule **D1**, comme ci-contre, en remplaçant 150 par \$a\$2.

	A n	B nu	C nv	D gain	E	F
◆	=seq(x					
1	1	9	4	50		
2	2	6	6	-100		
3	3	9	9	-100		
4	4	9	8	-100		
5	5	10	2	50		
6	6	3	3	200		
D1	=when(b1≤4,150,0)+when(c1≤4,150,0)-100					

	A n	B nu	C nv	D gain	E moyenne	F
◆	=seq(x					
1	1	9	4	50	601/20	
2	2	6	6	-100	soit	
3	3	9	9	-100	30.05	
4	4	9	8	-100		
5	5	10	2	50		
6	6	3	3	200		
E1	=mean(d1:d1000)					

	A	B n	C nu	D nv	E gain	F moye...
◆		=seq(x				
1	a=	1	10	3	50	739/20
2	150	2	1	5	50	soit
3		3	6	4	50	36.95
4		4	5	4	50	
5		5	9	6	-100	
6		6	2	6	50	
E1	=when(c1≤4,\$a\$2,0)+when(d1≤4,\$a\$2,0)-100					

b) Pour que le jeu soit équitable, il faudrait que la moyenne précédente soit nulle.

Il suffit de changer la valeur de a et de refaire des simulations.

Au vu des résultats, il ne semble pas exister de valeur entière de a pour laquelle le jeu soit équitable.

	A	B _n	C _{nu}	D _{nv}	E _{gain}	F _{moye...}
◆		=seq(>				
1	a=	1	4	4	122	11/1000
2	111	2	4	4	122	soit
3		3	9	9	-100	0.011
4		4	1	6	11	
5		5	7	8	-100	
6		6	6	5	-100	
A3						

Partie B

3) Soit A l'événement : « La boule tirée de l'urne U porte un numéro inférieur ou égal à 4 », $\bar{A}$ l'événement contraire ; soit B l'événement : « La boule tirée de l'urne V porte un numéro inférieur ou égal à 4 », $\bar{B}$ l'événement contraire.

L'urne U ayant dix boules numérotées de 1 à 10,

$p(A) = \frac{4}{10}$ soit $\frac{2}{5}$, donc $p(\bar{A}) = \frac{3}{5}$; l'urne V ayant dix

boules numérotées de 0 à 9, $p(B) = \frac{5}{10}$ soit $\frac{1}{2}$, donc

$$p(\bar{B}) = \frac{1}{2}.$$

Les tirages dans chacune des urnes se faisant de façon indépendante, $p(A \cap B) = p(A) \times p(B) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{5}$.

On peut procéder de la même façon pour les autres probabilités et construire l'arbre ci-contre.

a) X est la variable aléatoire donnant le gain algébrique à l'issue d'un tirage.

X prend les valeurs -100, $a - 100$ et $2a - 100$.

$$p(X = -100) = p(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10};$$

$$p(X = 2a - 100) = p(A \cap B) = \frac{1}{5};$$

A et $\bar{A}$ forment une partition de l'univers, donc d'après le théorème des probabilités totales :

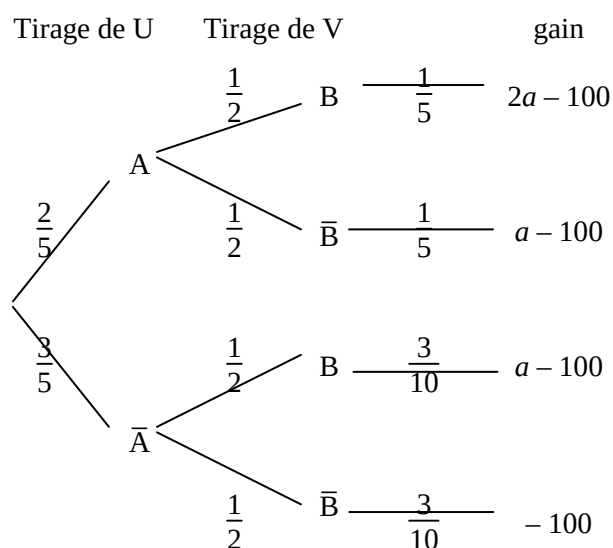
$$p(X = a - 100) = p(A \cap \bar{B}) + p(\bar{A} \cap B) = \frac{1}{5} + \frac{3}{10} = \frac{1}{2}.$$

L'espérance de X est donc : $E(X) = -100 \times \frac{3}{10} + (a - 100) \times \frac{1}{2} + (2a - 100) \times \frac{1}{5} = \frac{9}{10}a - 100$.

b) Le jeu est équitable si $E(X) = 0$, c'est-à-dire si $a = \frac{1000}{9} \approx 111,11$; cette valeur de a n'est pas entière, on ne peut donc pas trouver de valeur de a afin que le jeu soit équitable.

c) Le résultat trouvé confirme la conjecture émise dans la Partie A.

Remarque : Si on calcule $E(X)$ pour $a = 150$ (valeur de la question **1)** de la **Partie A**, on obtient $E(X) = 35$, qui est bien une valeur cohérente avec la conjecture émise dans cette question.



x_i	-100	$a - 100$	$2a - 100$	Total
$p(X = x_i)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	1