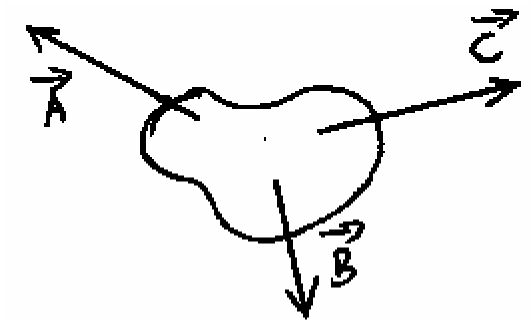
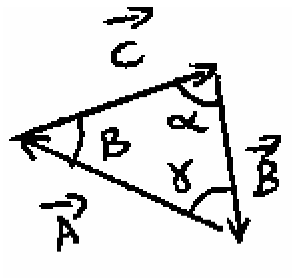
GUIDE D'UTILISATION « MECA PRO »
Etude de l'équilibre d'un solide soumis à trois forces

<u>Etude de l'équilibre d'un solide soumis à trois forces non parallèles</u>



Si un solide soumis à l'action de 3 forces $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$ **est en équilibre**, la somme vectorielle des forces est nulle.
$\vec{A}+\vec{B}+\vec{C} = \vec{0}$
Cette somme nulle se traduit graphiquement pour un dynamique fermé (en choisissant une échelle appropriée pour les intensités)



Une force est caractérisée par trois paramètres :
- sa direction
- son sens
- son intensité

On voit sur le dessin du dynamique que les angles α, β et γ caractérisent les directions des forces les unes par rapport aux autres.

Le dynamique est un triangle déterminé dés que l'on connaît trois éléments :
- trois côtés
- deux angles et un côté
- deux cotés et un angle

La longueur d'un côté correspond moyennant la connaissance de l'échelle à l'intensité de la force.
Un angle fournit une indication sur la direction de la force.

Tout problème de mécanique traitant de l'équilibre d'un solide soumis à trois forces non parallèles se résume à la connaissance de 3 caractéristiques des forces et à la détermination des 3 autres caractéristiques.
- trois intensités : on détermine trois directions
- deux directions et une intensité : on détermine une direction et deux intensités
- deux intensités et une direction : on détermine une intensité et deux directions

Dans les exercices de mécanique la résolution se fait par différentes méthodes ou graphiques. Le plus souvent on ne propose que des situations particulières faisant appel à des relations trigonométriques dans un triangle rectangle.
A l'aide d'une calculatrice il est possible de systématiser la résolution de ces problèmes.

Principe

Comme on l'a mis en évidence plus haut le dynamique des forces, fermé, traduit graphiquement la relation vectorielle :

$$\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}=\vec{0}$$

Le triangle du dynamique a trois côtés dont les longueurs sont A, B, C et trois angles α, β, γ.
Il est entièrement déterminé si on connaît trois de ces éléments.
Nous allons nous placer dans un cas général où le triangle est quelconque ce qui inclura les cas particuliers.

On démontre en mathématiques que dans un triangle quelconque :

$$\alpha+\beta+\gamma=180°$$

$$\frac{A}{\sin\alpha}=\frac{B}{\sin\beta}=\frac{C}{\sin\gamma}$$

$$A^2=B^2+C^2-2BC\ \cos\alpha$$

$$B^2=A^2+C^2-2AC\ \cos\beta$$

$$C^2=A^2+B^2-2AB\ \cos\gamma$$

A l'aide de ces relations il est possible de calculer trois des caractéristiques des forces en connaissant les trois autres.

Les programmes pour l'étude de l'équilibre d'un solide soumis à trois forces

La théorie
L'outil de résolution
L'exerciseur

Mise en œuvre

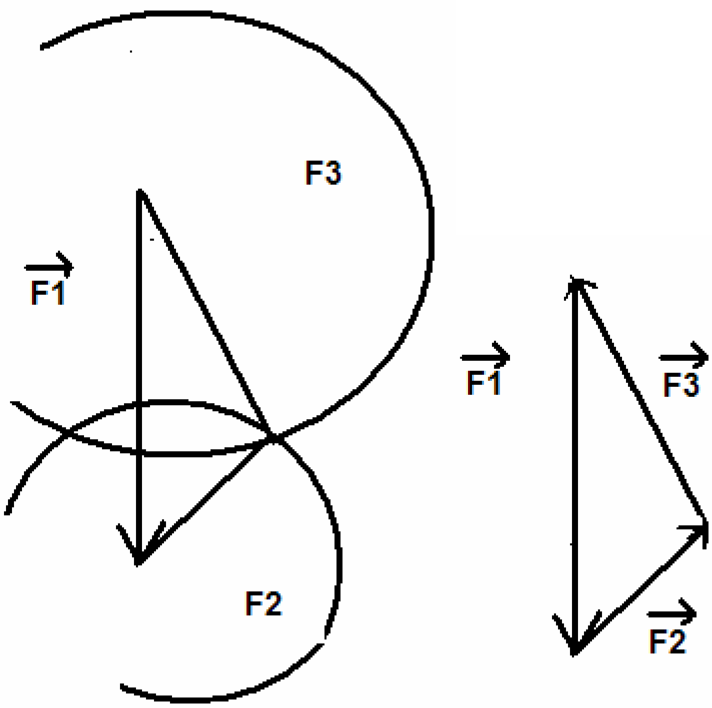
Les élèves et les programmes évoluent sur deux niveaux.
Toutes les résolutions effectuées par les élèves seront faites graphiquement et les programmes prendront en charge ces résolutions numériquement.
Les équilibres à 3 forces, en LP peuvent se traiter entièrement sous une forme graphique. En effet tous les exercices posés en LP peuvent se résumer à 3 cas :

On connaît les intensités des 3 forces --> on cherche les 3 directions
On connaît 2 intensités et 1 direction--> on cherche l'intensité de la 3ème force et les 2 autres directions
On connaît 1 intensité et 2 directions--> on cherche les intensités des 2 autres forces et la 3ème direction
Pourquoi une méthode graphique ?

Elle permet de résoudre <u>tous les cas</u> quels que soient les intensités et les angles. La méthode numérique (basée sur la trigonométrie) n'est applicable en LP que si on a des angles particuliers (90°, 45°...)

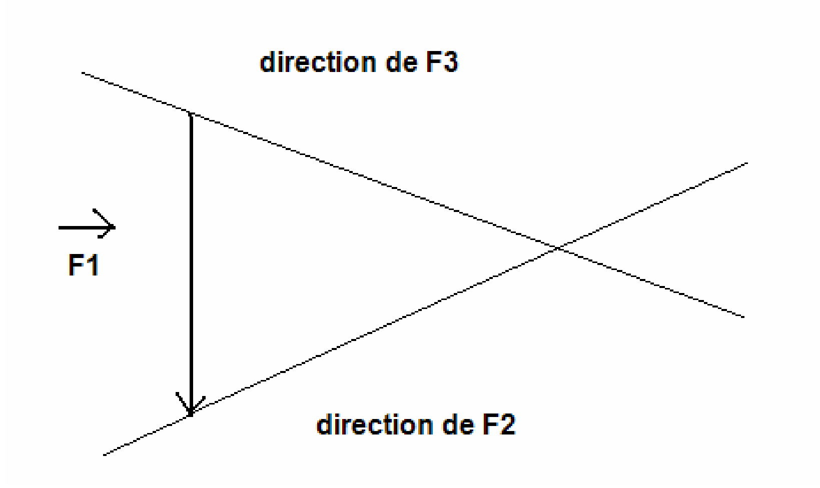
Elle est en <u>rapport direct</u> avec le schéma du montage et donc <u>plus concrète</u> pour les élèves.

La théorie
Ce programme explique aux élèves le principe de la résolution graphique d'un problème d'équilibre à trois forces.
1°) On connaît les 3 intensités des forces
On trace F1 à l'échelle.
En pointant un compas sur l'extrémité de F1 avec une ouverture égale à l'intensité de F2 on trace un arc de cercle.
En pointant un compas sur l'origine de F1 avec une ouverture égale à l'intensité de F3 on trace un arc de cercle.
On relie le point de concourance des 2 arcs à l'origine et à l'extrémité de F1.
On obtient le dynamique des forces.
Il suffit ensuite de mesurer les 3 angles manquants.

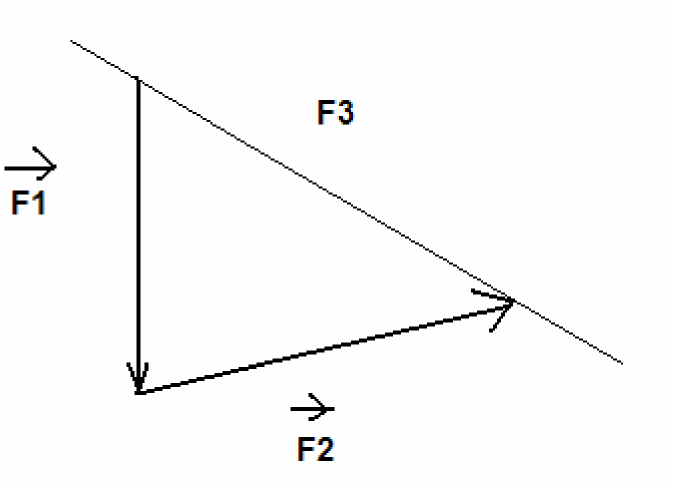


2°) On connaît 1 intensité et 2 directions
On trace F1 à l'échelle.
A l'extrémité on trace la direction de F2.

A l’origine on trace la direction de F3.
On mesure les intensités de F2 et F3.



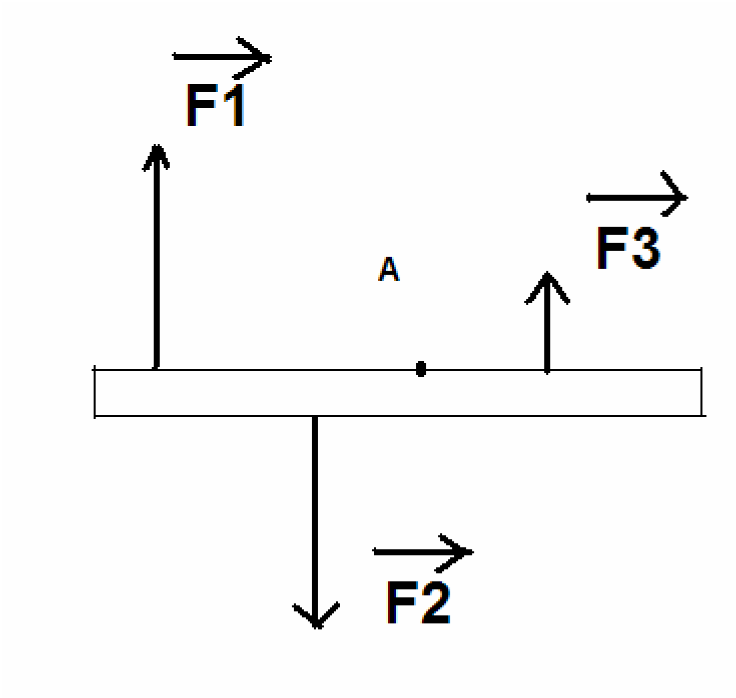
3°) On connaît 2 intensités et 1 direction
On trace F1 à l’échelle.
A l’extrémité on trace la force F2.
On relie l’origine de la force F1 et l’extrémité de la force F2.
On mesure l’intensité de F3 et les angles manquants.



L’outil de résolution
Ce programme aide les élèves à résoudre graphiquement un problème d’équilibre soumis à trois forces.

L’exerciseur
Ce programme propose aux élèves des exercices types d’équilibre soumis à trois forces.

<u>Etude de l'équilibre d'un solide soumis à trois forces parallèles</u>



Pour qu'un solide soumis à N forces soit en équilibre il faut que la somme vectorielle des forces soit nulle :

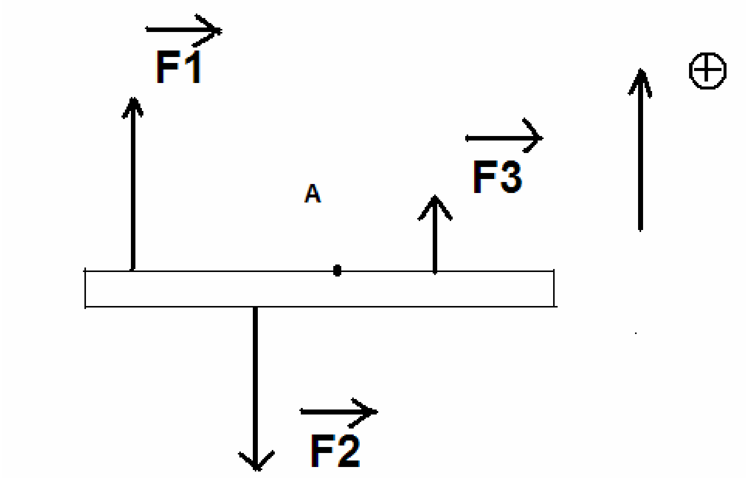
$\vec{F}1+\vec{F}2+\vec{F}3+...=\vec{0}$

et

que la somme algébrique des moments par rapport à un point de référence soit nulle :

$M_A\vec{F}1+M_A\vec{F}2+M_A\vec{F}3+...=0$

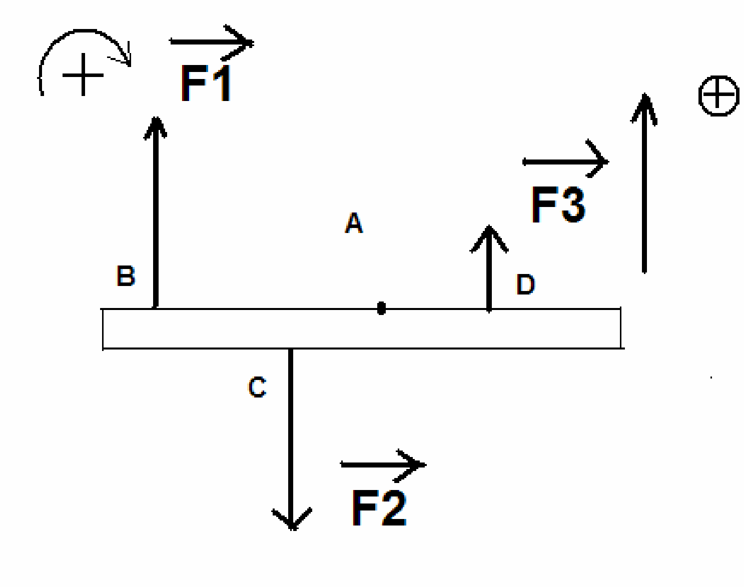
Dans le cas particulier des forces parallèles on oriente arbitrairement les forces.



Ce qui permet de transformer la somme vectorielle en somme algébrique :

F1 – F2 +F3 = 0

Puis on oriente les moments.
Pour donner un signe à un moment on considère chaque force séparément. Si la force était seule et si un axe passait par le point de référence et si la force faisait tourner le solide dans le sens positif choisi alors on lui attribue le signe +, dans le cas contraire on lui attribue le signe -.



Dans l'exemple choisi :

- BA * F1+ CA * F2 – DA *F3 = 0

La théorie
Ce programme explique aux élèves le principe de la résolution graphique d'un problème d'équilibre à trois forces parallèles.
Il reprend les deux conditions :

- la somme vectorielle des forces doit être nulle (vectoriellement) :
$$\vec{F}1 + \vec{F}2 + \vec{F}3 + ... = \vec{0}$$
- la somme algébrique des moments par rapport à un point de référence doit être nulle (algébriquement) :

$$M_A\vec{F}1 + M_A\vec{F}2 + M_A\vec{F}3 + ... = 0$$

L'outil de résolution
Ce programme aide les élèves à résoudre graphiquement un problème d'équilibre soumis à trois forces parallèles.

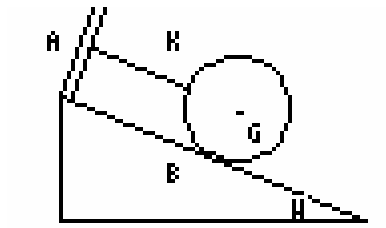
L'exerciseur
Ce programme propose aux élèves des exercices types d'équilibre soumis à trois forces parallèles.

Les exercices

Exercice 1
Etude de l'équilibre d'une sphère sur un plan incliné

NOTEZ L'ENONCE
DE L'EXERCICE
TRACEZ LE
SCHEMA
A L'ECHELLE

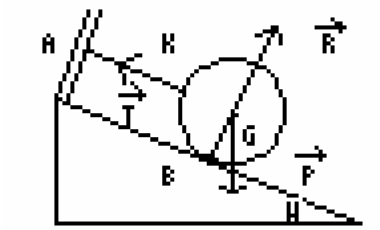
UNE SPHERE DE
DIAMETRE 3 CM
EST PLACEE
SUR UN PLAN
INCLINE
D'ANGLE->W=30°



MASSE DE
LA SPHERE 1KG
G=10 N/KG

DETERMINER LES
CARACTERISTIQUES
DES FORCES
EXTERIEURES QUI
S'APPLIQUENT
A LA SPHERE

TRACEZ LES
FORCES SUR
LE SCHEMA



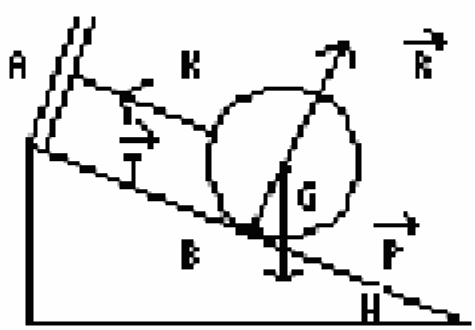
FAITES
L'INVENTAIRE
DES FORCES
DANS UN TABLEAU

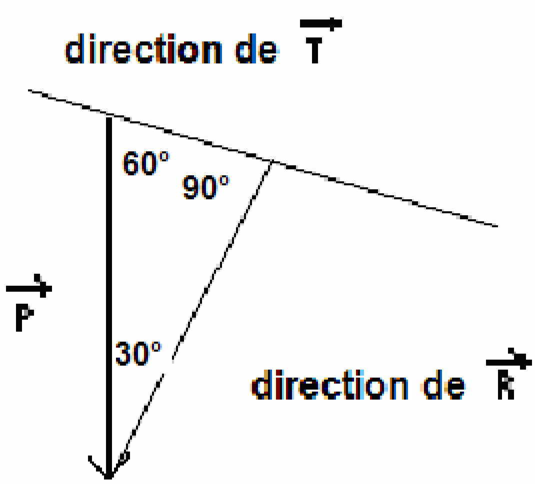
	INT	DIR	SENS
P	10	0	GD
R	?	30	BG
T	?	60	KA

IL MANQUE
L'INTENSITE
DE R ET
L'INTENSITE
DE T

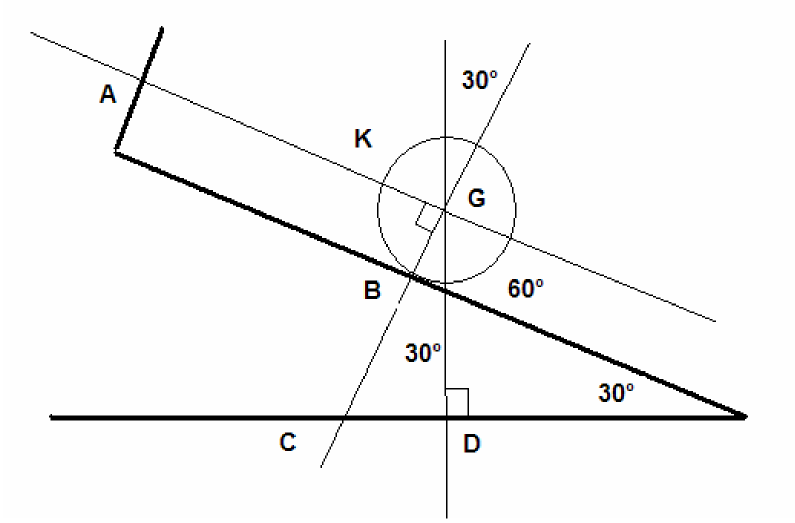
POUR LES
DETERMINER
UTILISEZ
UNE METHODE
GRAPHIQUE

Dans cet exercice on connaît une intensité et deux directions.





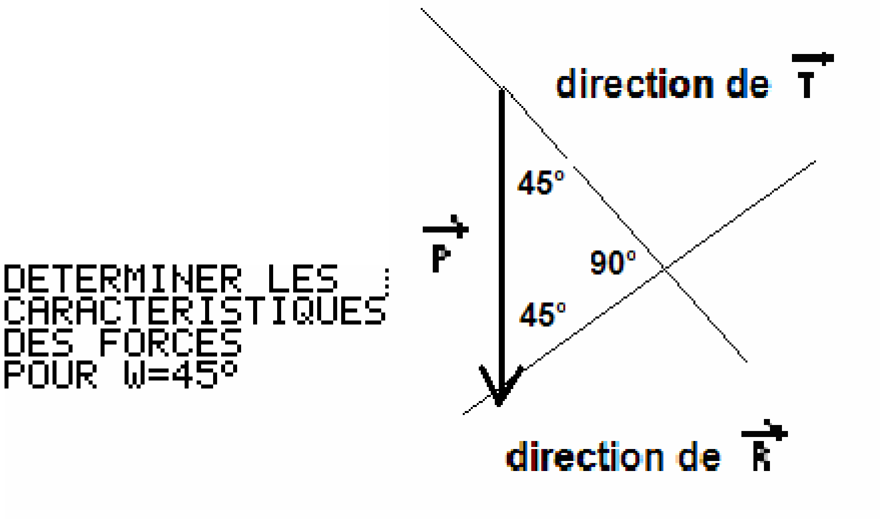
Une construction graphique permet de déterminer les angles des directions de T et R par rapport à P. On remarque que les côtés des angles du plan incliné et (CGD) sont perpendiculaires deux à deux donc ils sont égaux. Il en résulte que direction de R→30°, direction de T→60°.



On obtient :

	INT	DIR	SENS
P	10	90	GD
R	8.66	30	BG
T	5	60	KA

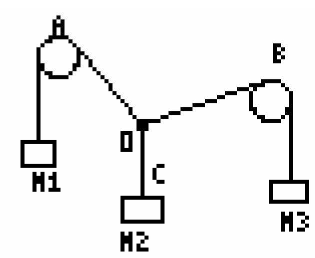
On fait varier l'angle du plan incliné.



	INT	DIR	SENS
P	10	0	GD
R	7.1	45	BG
T	7.1	45	KA

<u>Exercice 2</u>

<u>Etude de l’équilibre de 3 masses accrochées sur des fils coulissant sur 2 poulies</u>
<u>1ère partie de l’exercice</u>



M2=0,7KG
G=10N/KG
ANGLE COB=140°
ANGLE AOC=147°

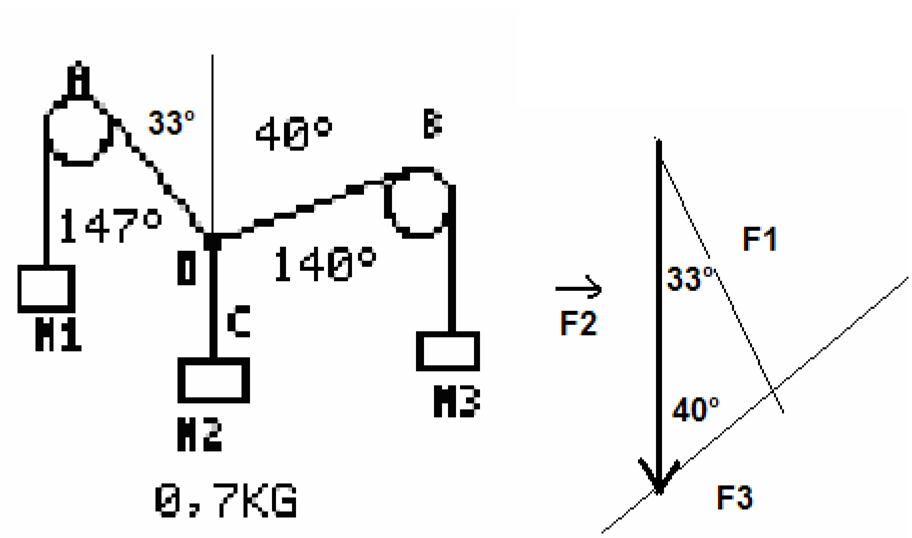
DETERMINEZ
LES MASSES
M1 ET M3
POUR QU'IL Y AIT
EQUILIBRE

M1-->F1
M2-->F2
M3-->F3

VOUS DEVEZ
OBTENIR LE
TABLEAU SUIVANT

	INT	DIR	SENS
F1	?	33	OA
F2	7	0	OC
F3	?	40	OB

Dans cet exercice on connaît une intensité et deux directions.

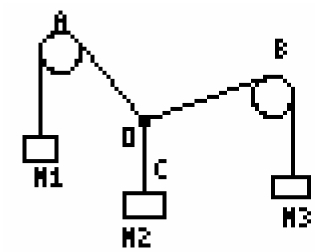


VOUS DEVEZ
OBTENIR
APRES RESOLUTION

	INT	DIR	SENS
F1	4	33	OA
F2	7	0	OC
F3	4.7	40	OB

M1=0,4KG
M2=0,47KG

2ème partie de l'exercice



M1=0,6KG
M2=0,67KG
M3=0,9KG
G=10KG/N

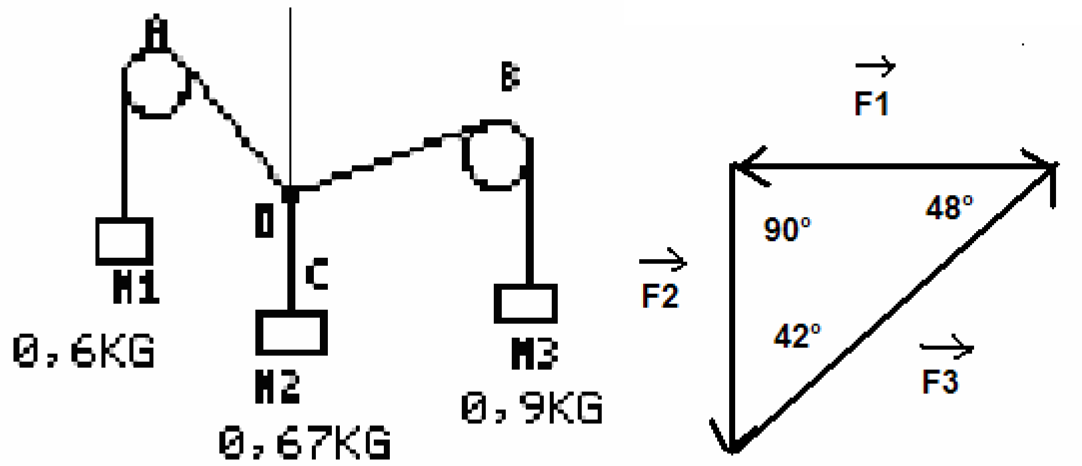
DETERMINEZ
LES ANGLES
DU MONTAGE
A L'EQUILIBRE

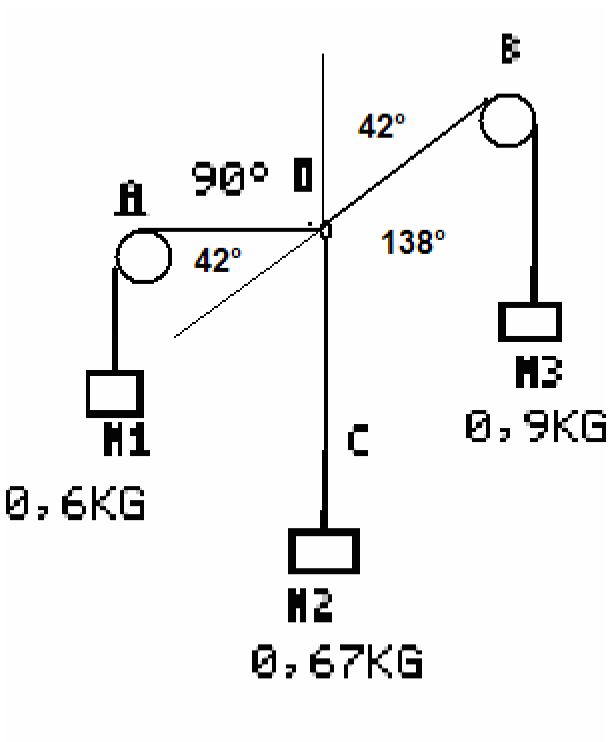
M1-->F1
M2-->F2
M3-->F3

VOUS DEVEZ
OBTENIR LE
TABLEAU SUIVANT

	INT	DIR	SENS
F1	6	?	OA
F2	6.7	?	OC
F3	9	?	OB

Dans cet exercice on connaît 3 intensités.





VOUS DEVEZ OBTENIR APRES RESOLUTION

	INT	DIR	SENS
F1	6	90	OA
F2	6.7	0	OC
F3	9	48	OB

COB=132°
COA=90°

Exercice 3

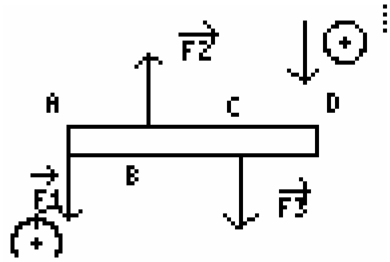
Etude d'une barre en équilibre sous l'action de 3 forces parallèles

L'exercice comporte 3 situations

RESOLVEZ CES 3 EXERCICES

RELEVER LE SCHEMA ET LES VALEURS

1ère situation



CE QUE VOUS
CONNAISSEZ
F1=
50
F2=
80

DA=
1.5
DC=
.5

CE QUE VOUS
CHERCHEZ
INCONNUE F3
INCONNUE DB

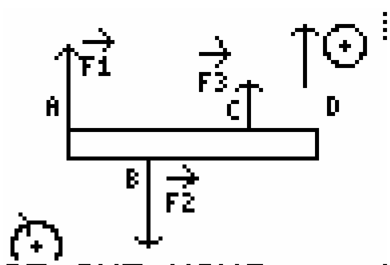
FAITES LES
CALCULS

RESULTATS
MOMENT DE F1=
75
MOMENT DE F3=
15

F3=
30

DB=
1.125

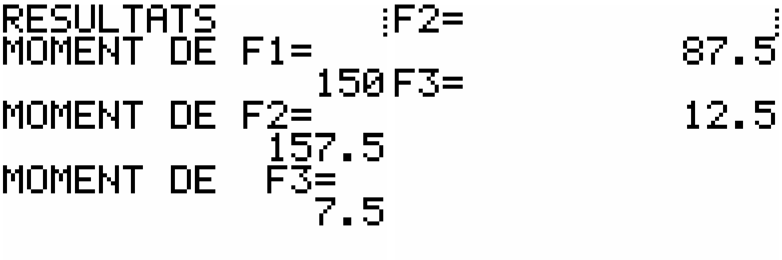
2ème situation



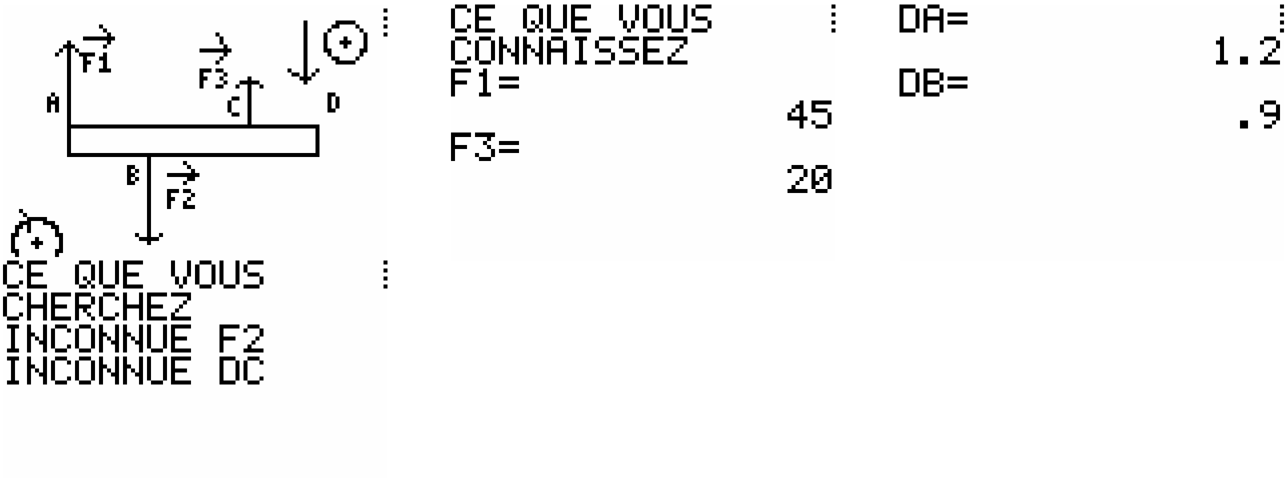
CE QUE VOUS
CONNAISSEZ
F1=
75

DA=
2
DB=
1.8
DC=
.6

CE QUE VOUS
CHERCHEZ
INCONNUE F2
INCONNUE F3

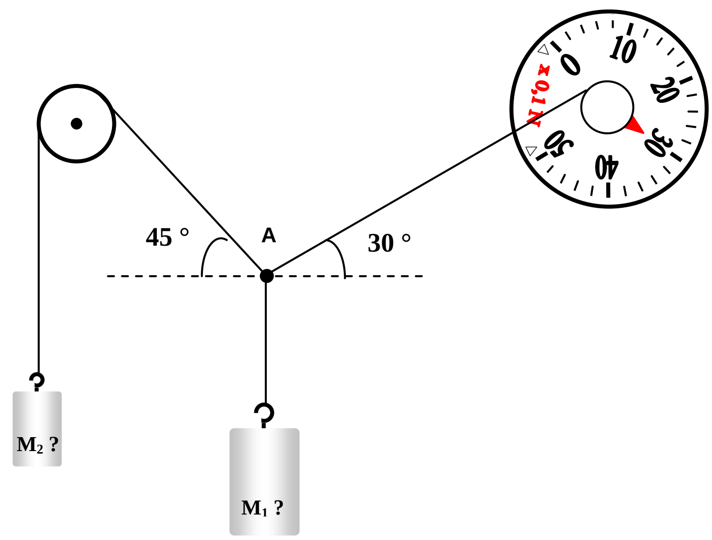


3ème situation



Exemples d'exercices classiques traités avec le programme d'aide à la résolution

Exercice 1

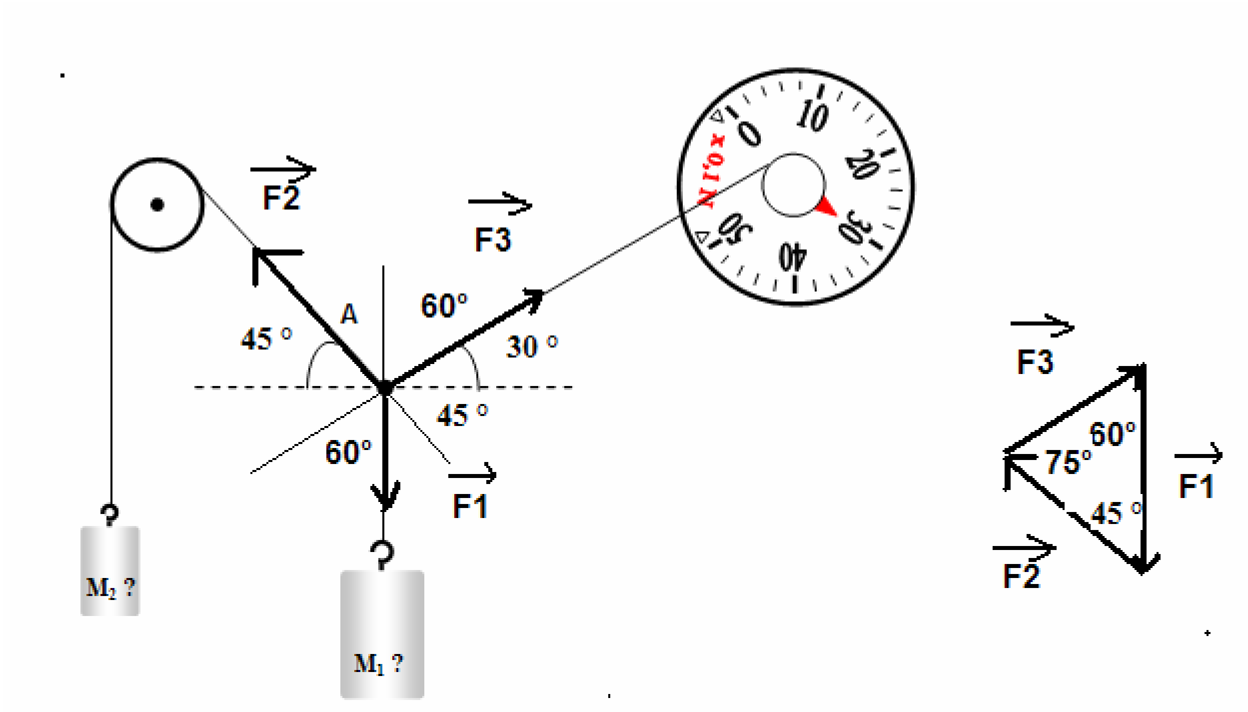


Quelles sont les masses des objets marqués d'un point d'interrogation ?

Conseils :

1. bilan des forces sur le noeud A
2. tracé du dynamique des forces (échelle conseillée : 2cm pour 1 N). Ce tracé se construit à l'aide du vecteur représentant la force exercée par le dynamomètre, et des directions des deux autres vecteurs données par les angles
3. lecture graphique du poids des objets M_1 et M_2
4. calcul des masses correspondantes

On prendra g = 10 N/kg
Attention à l'échelle du dynamomètre !




```
DEUXIEME CAS

ON CONNAIT
1 INTENSITE ET
2 DIRECTIONS
```

```
INTENSITE
DE LA FORCE
F3
?3
```

```
A L'EXTREMITE
ON TRACE
LA DIRECTION
DE
F1
```

```
ANGLE DE
LA DIRECTION
DE LA FORCE
F1
?60
```

```
A L'ORIGINE
ON TRACE
LA DIRECTION
DE
F3
```

```
ANGLE DE
LA DIRECTION
DE LA FORCE
F3
?75
```

```
F3

              3
CORRESPOND A
L'ANGLE OPPOSE
             45
```

```
F1

             75
CORRESPOND A
FORCE OPPOSEE
    4.098076211
```

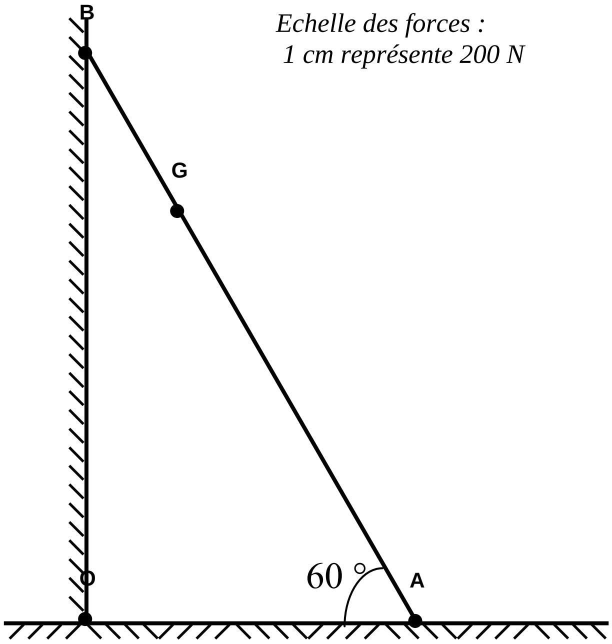
```
F3

             60
CORRESPOND A
FORCE OPPOSEE
    3.674234614
```

M1 =4 kg   M2= 3,6 kg

Exercice 2

Sciences BEP 2004

Echelle des forces :
1 cm représente 200 N



Exercice n ° 4 (7 pts)

Mécanique « Stabilité d'une échelle »

Un peintre effectue le ravalement d'une façade de maison. On note $\boldsymbol{m_1}$ la masse du peintre et du bidon de peinture. $\boldsymbol{m_1}$ = 80 kg. Il appuie contre le mur son échelle de longueur AB = 4 m, de masse $\boldsymbol{m_2}$ = 20 kg et monte sur celle-ci pour travailler. Le centre de gravité de l'ensemble est le point G (voir dessin ci-contre)

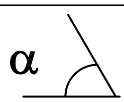
L'angle aigu que fait le plan de l'échelle (AB) avec le sol, a pour mesure 60°,

1. Calculer la valeur du poids total P de l'ensemble (peintre et échelle).
2. Représenter le poids P sur le dessin en respectant l'échelle indiquée.

(*la position de G ne pouvant se mesurer que sur le document distribué aux candidats nous indiquons pour ce document que AG=2,768m)*

Le mur est lisse et la réaction, R_B, du mur en B est une force ayant sa droite d'action horizontale.
La réaction du sol en A sur l'échelle, est une force notée R_A.

3. L'échelle étant en équilibre, déterminer le point de concours des droites d'action des trois forces sur le dessin. Ce point est nommé C.
4. Construire le dynamique des forces sur le dessin.
5. Compléter le tableau des forces ci-après

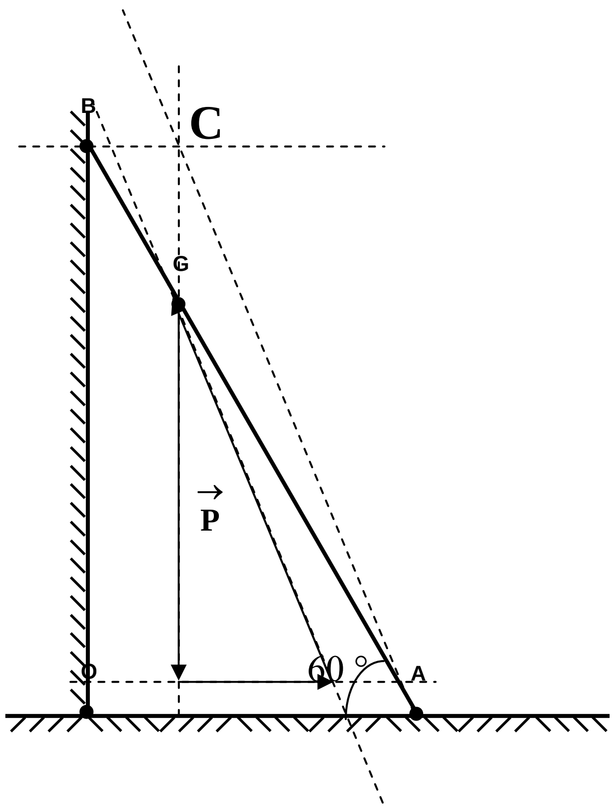
Force	Point d'application	Droite d'action	Sens	Intensité (N)
$\overrightarrow{P}$				
$\overrightarrow{R_A}$		 α = ...		
$\overrightarrow{R_B}$				

Dans la réalité, la nature du contact entre l'échelle et le sol en A fait que l'échelle ne glisse pas tant que l'angle entre $\overrightarrow{R_A}$ et l'horizontale est au moins égal à 75°.

6. Cette condition est-elle réalisée? Justifier. Comment peut-on augmenter la stabilité de l'échelle ?

Donnée g = 10 N/kg

Correction



Exercice n ° 4 (7 pts)

Mécanique « Stabilité d'une échelle »

Un peintre effectue le ravalement d'une façade de maison. On note $\boldsymbol{m_1}$ la masse du peintre et du bidon de peinture. $\boldsymbol{m_1}$ = 80 kg. Il appuie contre le mur son échelle de longueur AB = 4 m, de masse $\boldsymbol{m_2}$ = 20 kg et monte sur celle-ci pour travailler. Le centre de gravité de l'ensemble est le point G (voir dessin ci-contre)

L'angle aigu que fait le plan de l'échelle (AB) avec le sol, a pour mesure 60°,

7. Poids total P : P = ($\boldsymbol{m_1}$ + $\boldsymbol{m_2}$) x $\boldsymbol{g}$ = (80 + 20) x 10 = 1000 N

8. Représenter le poids P (le vecteur est vertical, dirigé vers le bas, et mesure 5 cm)

9. Le point C se situe à l'intersection de la verticale passant par G et de l'horizontale passant par B.

10. Dynamique des forces : on le construit à partir du vecteur à l'aide de parallèles aux deux droites d'action (BC) et (AC). La mesure des vecteurs donne 5,5 cm et 2 cm, ce qui, traduit de l'échelle du dessin, nous donne R_A = 5,5 x 200 = 1 100 N et R_B = 2 x 200 = 400 N

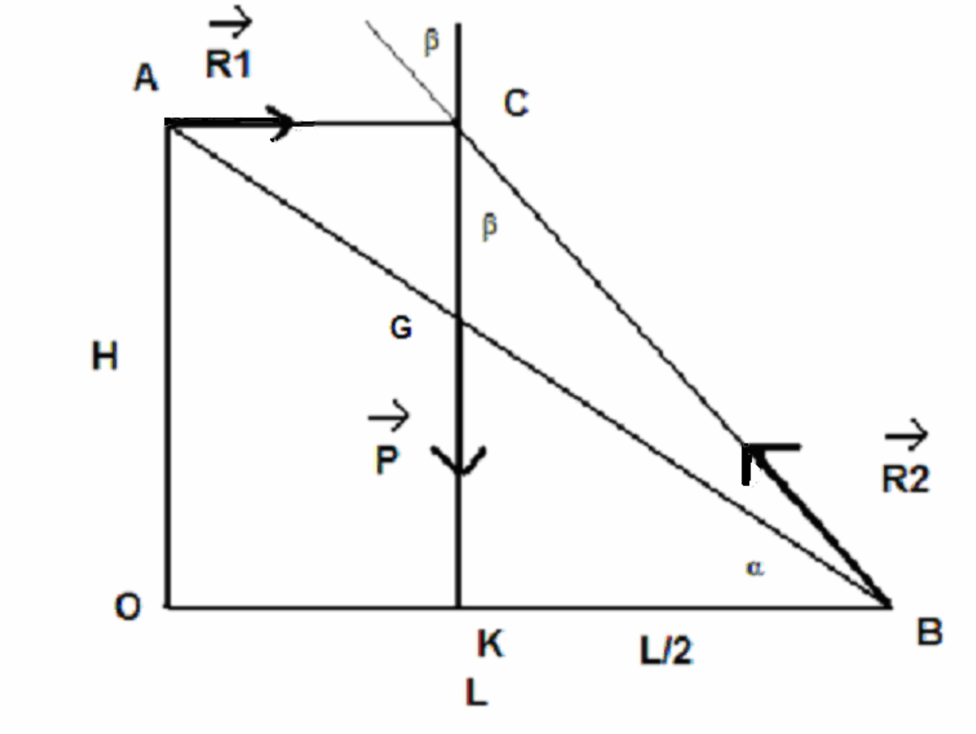
11. Compléter le tableau des forces ci-après

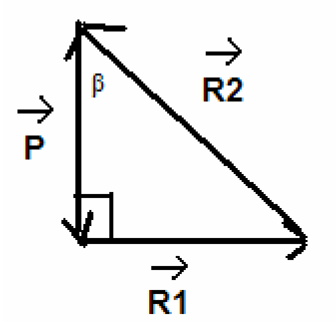
Force	Point d'application	Droite d'action	Sens	Intensité (N)
$\vec{P}$	G	|	↓	1 000
$\vec{R_A}$	A	α α = 65 °	↖	1 100
$\vec{R_B}$	B	—	→	400

12. Cette condition est-elle réalisée ? Non, l'angle est de 65° < 75° Pour augmenter la stabilité de l'échelle il suffit de la rapprocher du mur.

Résolution générale de ce type d'exercice

1°) Dans le cas d'une échelle appuyée sur un mur le centre de gravité G est au milieu de AB

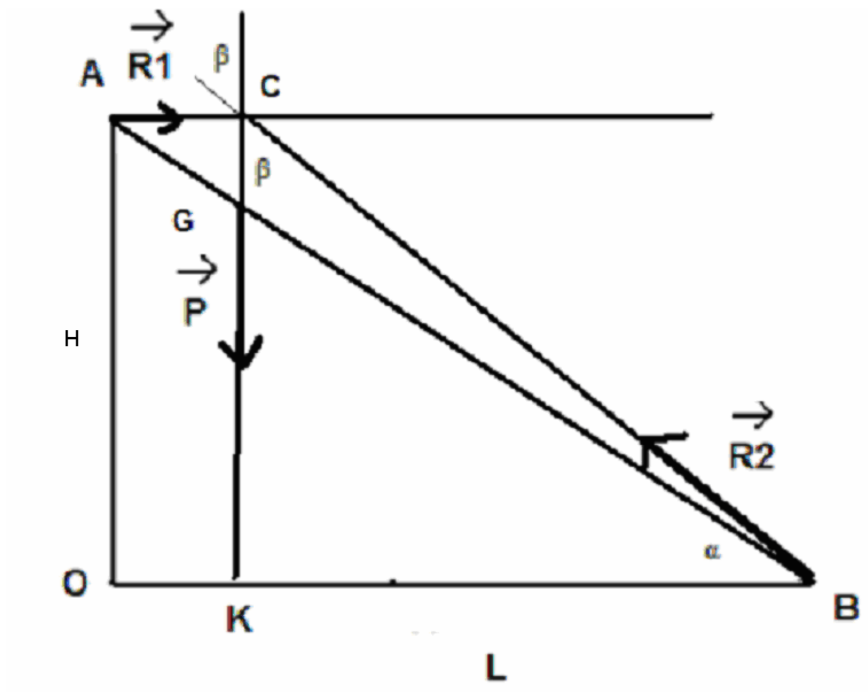


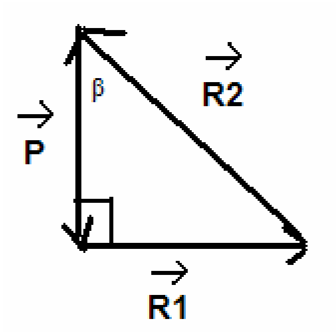


D'après la figure on peut écrire les relations suivantes :

tan β =KB/KC=(L/2)/H
β = arc tang((L/2)/H)
P=R2 cos β   R2=P/ cos β
R1= P tan β =P * (L/2)/H

2°) Dans le cas où une personne monte sur l'échelle le centre de gravité est déplacé et dépend de la position de cette personne sur l'échelle et G n'est pas, en général, au milieu de AB.





Les relations du premier cas sont modifiées comme suit :
tan β =KB/KC=KB/H
β = arc tang(KB/H)
P=R2 cos β   R2=P/ cos β
R1= P tan β =P * (L/2)/H

Retour à l'exercice de BEP
Dans cet exercice on est dans le cas où l'on connaît une force et deux directions.
R1=RB et R2=RA G n'est pas au milieu de AB *AG=2,768m.*
Il faut déterminer l'angle β pour ensuite déterminer RA et RB.
Il est possible de faire toutes ces opérations graphiquement. Pour des raisons évidentes nous procèderons numériquement.

L'angle α de notre figure n'est pas celui demandé dans le tableau de l'exercice ici α=60°
Calcul de KB
KB =AG cos 60°   = 2,768 * cos 60°=1,384m
Calcul de H
H=AB sin 60° = 4*sin 60° = 3,46m
tan β = KB/H= 1,384/3,46=0,4
β = 21,8°

```
FORCES
1:PARALLELES
2:NON PARALLELES
3:FIN
```

```
DEUXIEME CAS
ON CONNAIT
1 INTENSITE ET
2 DIRECTIONS
```

```
NOM DE LA
FORCE 1
?P
```

```
NOM DE LA
FORCE 2
?RB
```

```
NOM DE LA
FORCE 3
?RA
```

```
NOM DE LA
L'ANGLE 1
?PRB
NOM DE LA
L'ANGLE 2
?PRA
```

```
INTENSITE
DE LA FORCE
P
?1000
```

```
ANGLE DE
LA DIRECTION
DE LA FORCE
RB
?90
```

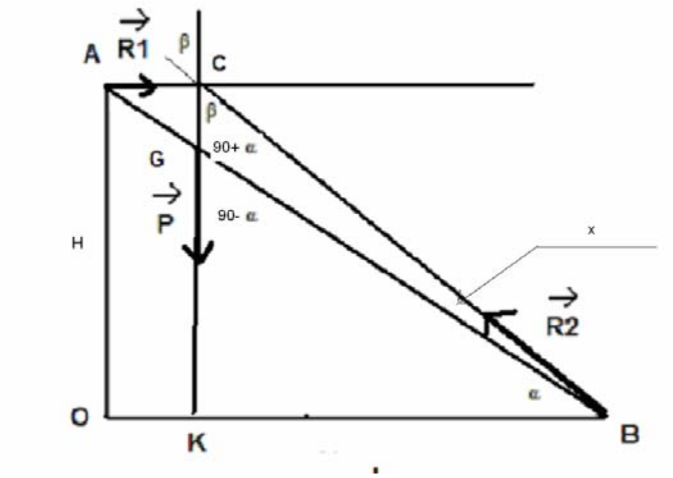
```
ANGLE DE
LA DIRECTION
DE LA FORCE
RA
?21.8
```

```
P

           1000
CORRESPOND A
L'ANGLE OPPOSE
           68.2
```

```
RB

           21.8
CORRESPOND A
FORCE OPPOSEE
    399.9714641
```

```
RA

             90
CORRESPOND A
FORCE OPPOSEE
    1077.022364
```

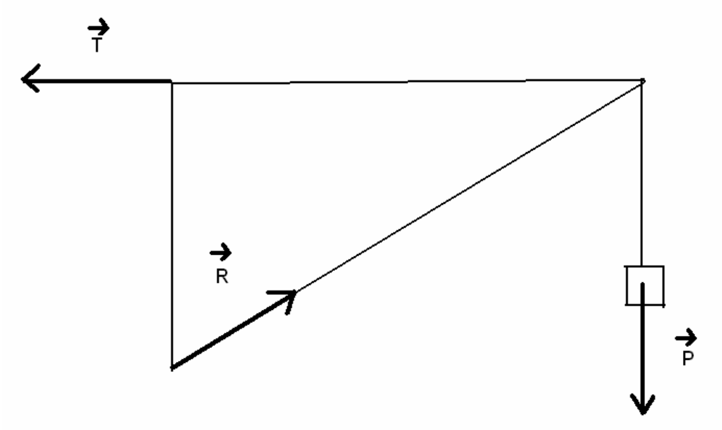
<u>Calcul de l'angle α de l'exercice</u>

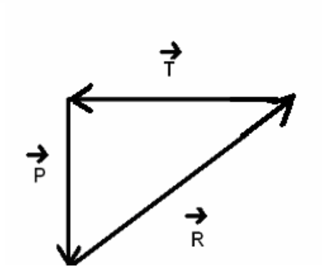


x=180 – (90+ α)- β=90-60-21,8= 8,2°
L'angle cherché est 68,2°

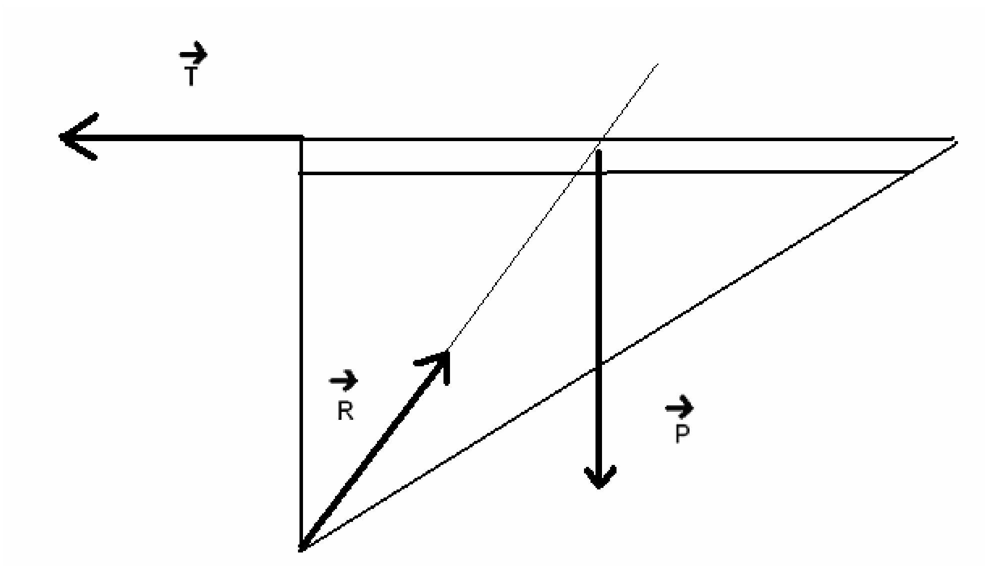
Un autre problème classique : étude de l'équilibre d'une console

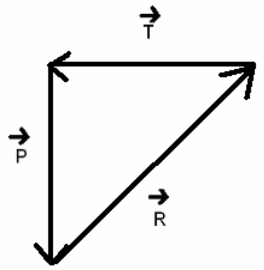
1er cas : la console est de poids négligeable.
Les directions des 3 forces sont concourantes à l'extrémité de la console.





On connaît une force P et 2 directions.
2ème cas : la console n'est pas de poids négligeable.
Les directions des 3 forces sont concourantes au centre de gravité de la barre.





<u>Un exemple d'une erreur dans un sujet d'examen</u> (académie de Rennes)

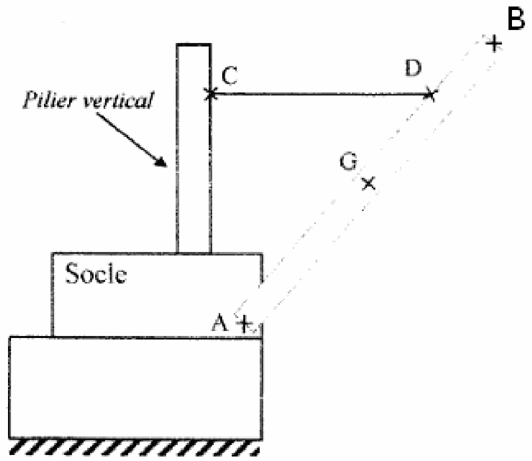
<u>Exercice n°2 :</u> Mécanique (BEP : 3 points ; CAP : 3,5 points)

Une grue utilisée pour mettre des bateaux à l'eau est représentée sans charge sur le schéma ci-contre.
Cette grue est constituée d'un pilier vertical, d'une barre AB mobile autour d'un axe A et d'un câble CD.

***<u>Données</u>* :**

- Masse de la barre mobile AB : $m = 1\,000$ kg
- $g = 9{,}8$ N.kg $^{-1}$
- $\vec{P}$: poids de la barre mobile AB.
- $\vec{F_1}$: action du câble CD sur la barre mobile AB.
- $\vec{F_2}$: action du socle sur la barre mobile AB.

<u>Remarque</u> : la direction de l'action au point D est horizontale.



1) Calculer la valeur P du poids $\vec{P}$ de la barre mobile AB.

2) Compléter le **tableau des caractéristiques de l'annexe 1**.

3) Tracer **le dynamique des forces sur l'annexe 1** et en déduire les valeurs des intensités F_1 et F_2 des forces $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ que vous reporterez dans le tableau des caractéristiques.

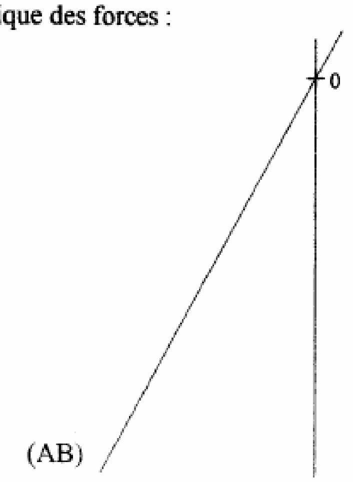
<u>Echelle</u> : 1 cm représente 2 000 N.

Exercice n°2 : Mécanique

2) **Tableau 1** à compléter :

Forces	Points d'application	Droites d'actions	Sens	Valeurs (ou intensités)
$\vec{P}$				
$\vec{F_1}$				
$\vec{F_2}$		(AB)	↗	

3) Tracé du dynamique des forces :



Echelle :
1 cm représente 2 000 N

Exercice n°2 : (BEP : 3 points ; CAP : 3,5 points)

1) $P = m \times g$ $P = 1000 \times 9{,}8$ $P = 9\,800$ N — 0,5 — 1

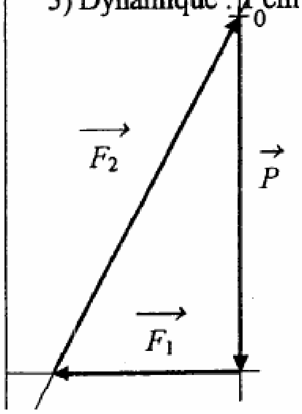
2)

Forces	Points d'application	Droites d'actions	Sens	Valeurs (ou intensités)
$\vec{P}$	G	Verticale	↓	9800 N
$\vec{F_1}$	D	horizontale	←	5400 N
$\vec{F_2}$	A		↗	11200 N

1 — 1

(- 0,25) point par erreur mais ne pas pénaliser si les intensités ne sont pas reportées dans le tableau.

3) Dynamique : 1 cm représente 2000 N — 0,5 — 0,5

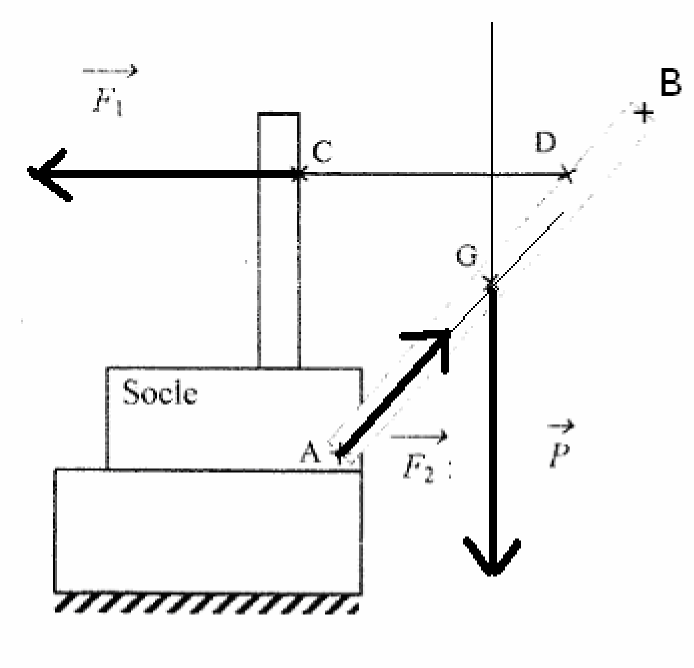


Mesure de la longueur de $\vec{F_1}$:
2,7 cm (ou 2,6 cm)
donc $F_1 = 5\,400$ N (ou 5 200 N) — 0,5 — 0,5

Mesure de la longueur de $\vec{F_2}$:
5,6 cm (ou 5,5 cm)
donc $F_2 = 11\,200$ N (ou 11 000 N) — 0,5 — 0,5

Rectification

Tel qu'il est l'énoncé est faux car les directions des 3 forces ne sont pas concourantes !



Il faudrait que F2 ait la position suivante :