

Simulación del Circuito RL con la Voyage 200™

Ing. Miguel Angel López Mariño (malm@itesm.mx)
Ing. Félix Eduardo Bueno Pascual (fbueno@itesm.mx)

1. INTRODUCCIÓN

El estudio de la Electricidad y el Magnetismo es fundamental no sólo para la formación de los estudiantes de las carreras de Física, sino también de aquellos que estudian alguna rama de la ingeniería. Para la electricidad, el estudio de los circuitos eléctricos es básico, aunque en ocasiones los alumnos carecen de la formación matemática necesaria para modelarlos como la solución de ecuaciones diferenciales y por tanto, sólo lleguen a conocer el procedimiento para obtener las respuestas sin que tengan una interpretación clara del comportamiento del sistema o peor aún, que se aprendan y usen las soluciones como si fueran recetas de cocina. Es oportuno señalar que este problema también es muy útil en los cursos de Ecuaciones Diferenciales, ya que, como se muestra más adelante, involucra la solución de una ecuación diferencial de primer orden.

En el presente trabajo, se muestra cómo la capacidad numérica, simbólica y gráfica que ofrece la calculadora Voyage 200, permite construir y resolver el modelo de un circuito eléctrico RL como el que se muestra en la Figura 1.

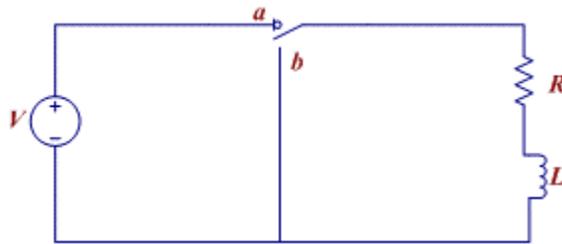


Figura 1: Circuito RL.

Tal como se observa, el circuito está compuesto por una resistencia R y un inductor con inductancia L que se pueden conectar a una fuente de voltaje constante V ; el objetivo es encontrar la corriente que circula por R y por L . Primero, debe considerarse que el circuito debe ser analizado en dos etapas, la primera, cuando el interruptor se posiciona en a y los elementos se conectan a la fuente V después de haber estado desconectados por mucho tiempo y la segunda, cuando el interruptor se conecta en b y los elementos se desconectan de la fuente de alimentación.

2. SOLUCIÓN ANALÍTICA

Carga

Cuando el interruptor se conecta en a después de haber estado desconectado por mucho tiempo, empieza a circular una corriente i por la trayectoria cerrada, como se muestra en la Figura 2,

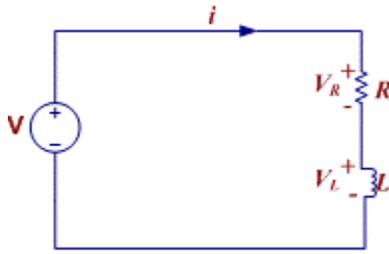


Figura 2: Circuito RL en carga.

por lo que se genera una caída de voltaje en la resistencia y en el inductor.

Por la ley de Kirchhoff, la suma de las caídas en R y L debe ser igual al voltaje de la fuente; además, como el circuito estuvo mucho tiempo desconectado se debe cumplir que $i(0) = 0$, así que la ecuación diferencial a resolver es la siguiente:

$$L \frac{di}{dt} + Ri = V, \quad i(0) = 0, \quad (1)$$

que también se puede escribir como

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{V}{L}, \quad i(0) = 0; \quad (2)$$

su solución general está dada por

$$i(t) = \frac{V}{R} + C e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (3)$$

y al aplicar la condición inicial y reacomodar términos, se tiene

$$i(t) = \frac{V}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right). \quad (4)$$

Si se analiza la expresión obtenida, se verifica que cuando el tiempo es 0 la corriente también es 0 y a medida que el tiempo crece, la corriente tiende a su máximo valor que es $\frac{V}{R}$.

Descarga

Ahora el interruptor pasa al punto b , como se muestra en la Figura 3,

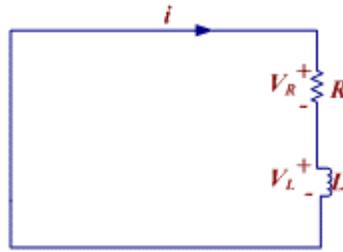


Figura 3: Circuito RL en descarga.

y la energía almacenada en el inductor es disipada en la resistencia. La ecuación diferencial que resulta para este caso es

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = 0. \quad (5)$$

La condición inicial depende del valor al que se encuentre la corriente al momento de mover el interruptor a la posición b . Si se mantuvo la fuente alimentando a R y L por un tiempo t muy grande, el valor al que pudo haber llegado es $\frac{V}{R}$ según la ecuación (4). Si se toma este valor como condición inicial para la descarga, se puede escribir la respuesta de la siguiente manera

$$i(t) = \frac{V}{R} e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (6)$$

Como se observa este valor tiende a 0 en la medida en que el tiempo aumenta. La solución total resulta ser una función seccionada que depende de los valores elegidos para cerrar y abrir el interruptor.

3. SOLUCIÓN CALCULADA

Para realizar la simulación con la Voyage 200 se consideran los valores de $R = 2\Omega$, $L = 3H$ y $V = 10\text{ Volts}$. Lo primero que se hace es resolver la ecuación de la carga con su condición inicial como se muestra en la Figura 4.

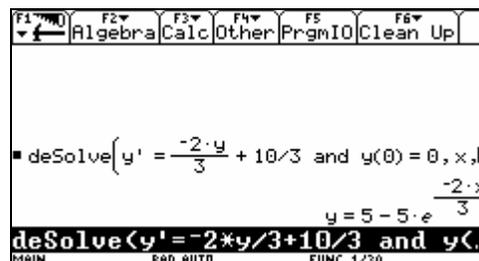


Figura 4: Solución Particular de la carga.

La función obtenida tiene la forma de (4) y se define como la función $y1(x)$.

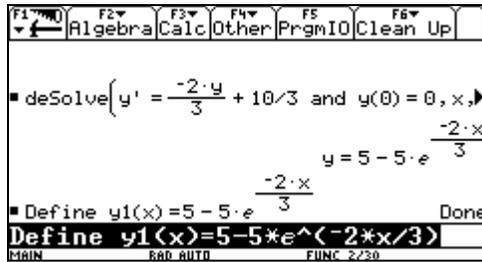


Figura 5: Definición de $y_1(x)$.

Luego, se escoge un valor para t igual a 4.012605 s , donde la corriente es 4.8235294 A , para colocar el interruptor en b y desconectar los elementos de la fuente.

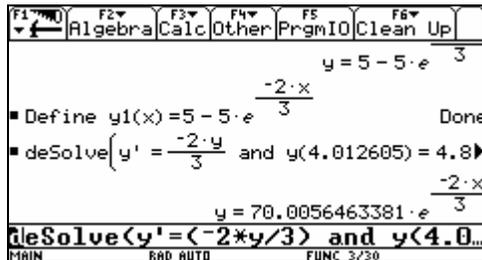


Figura 6: Solución particular de la descarga.

Como se aprecia, la ecuación de la corriente para la descarga obtenida por la Voyage 200 tiene la forma de (6) y se define como $y_2(x)$.

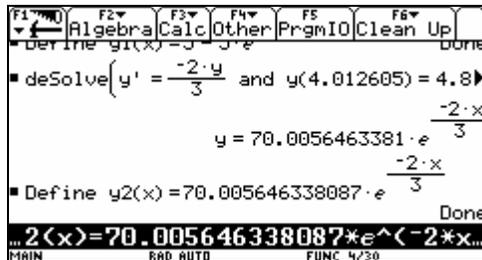


Figura 7: Definición de $y_2(x)$.

En la ventana Editor, se pueden ver declaradas las funciones de carga y descarga como en la siguiente Figura.

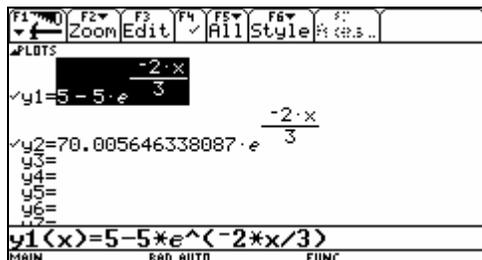


Figura 8: Funciones $y_1(x)$ y $y_2(x)$.

Solución gráfica

Ahora se establecen los valores de graficación mostrados en la Figura 9

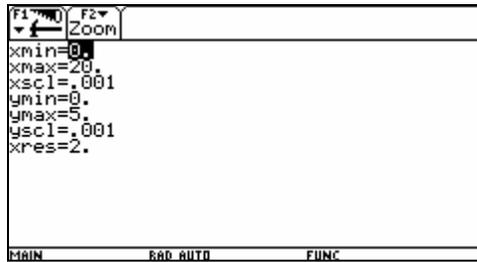


Figura 9: Rango de Valores asignados a las Variables.

y luego se usan los comandos necesarios para obtener la gráfica de la corriente, tal como se muestra en la Figura 10. En este caso, la gráfica se obtiene tomando en cuenta que para valores menores de 4.012605 se grafica $y_1(x)$ y para el resto del dominio, $y_2(x)$

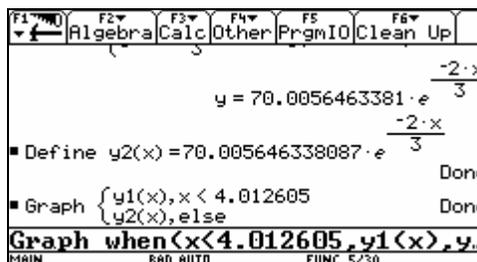


Figura 10: Declaración de la función de corriente.

La gráfica resultante se muestra en la Figura 11 y explícitamente se indica el tiempo, definido por la variable xc , considerado para cambiar el interruptor de posición.

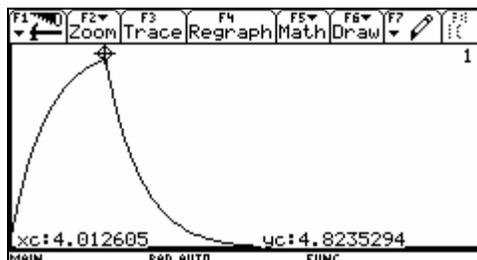


Figura 11: Gráfica de función de corriente.

Con el Trace, se puede realizar un análisis de sensibilidad al poder barrer el cursor por la gráfica y monitorear los valores de la corriente en el intervalo de tiempo.

1. COMENTARIOS

La simulación realizada permite, al alumno de electricidad y magnetismo, observar el proceso de carga y descarga de un circuito RL, además de usar sus conocimientos para graficar una función seccionada.

El alumno tiene la posibilidad de cambiar tales condiciones y ver cómo se modifica la solución obtenida.

Si bien es cierto que para los cursos de Circuitos Eléctricos de las carreras de Ingeniería Eléctrica existen simuladores poderosos, en materias de ciencias básicas, la modelación con la Voyage 200 se convierte en una herramienta de apoyo en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Por un lado, apoya la transmisión de

conocimientos por parte del profesor y por otro, la adquisición de conocimientos y la estimulación de la creatividad de los alumnos.

5. BIBLIOGRAFÍA

- [1] Sears, Zamansky, Young, Freedman, Física Universitaria Vol 2, Pearson, Undécima edición, 2005.
- [2] Luis Lauro Cantú Salinas, Electricidad y Magnetismo para estudiantes de Ingeniería, Limusa, 1994.
- [3] Robert Resnick, David Holliday, Física parte II, 1978.
- [4] Paul A. Tipler, Física parte II, Tercera edición, Editorial Reverté, 1994.
- [5] Carmona Jover Isabel, Ecuaciones Diferenciales, Pearson, Cuarta Edición, 1992.
- [6] G. Zill Dennis and R. Cullen Michael, Differential Equations with Boundary-Value Problems, Thomson, Fifth Edition, 2001.