

Ausgabe 2/02

Liebe Lehrerin! Lieber Lehrer!

Bildung – ein Thema lange Jahre von einer breiten Öffentlichkeit sträflich vernachlässigt – dank PISA nun in aller Munde. Wirkliche und selbsternannte Experten geben ihre jeweilige Meinung zum besten. Jeder meint es besser zu wissen als der andere, schließlich weis jeder wie Schule funktioniert, denn jeder war ja einmal Schüler. Nur ist es so einfach leider nicht. Die Fülle der Einflussfaktoren ist enorm.

Natürlich haben wir sowohl die internationalen als auch die nationalen PISA-Ergebnisse umgehend dahingehend untersucht, ob sich Korrelationen zwischen dem Abschneiden eines Landes und der dortigen Verbreitung von Taschen- oder Graphikrechnern ergeben. Wir konnten keinen derartigen Zusammenhang feststellen, vor allem keinen negativen! Dieses Ergebnis widerspricht deutlich der von Skeptikern oft vorgebrachten Aussage: „Seit es Taschenrechner gibt, werden die Kinder immer dümmer.“

Ganz im Gegenteil fördern Graphikrechner und mehr noch Taschencomputer mit CAS und Tabellenkalkulation das entdeckende Lernen, das selbständige und selbsttätige Lernen, das genetische Herangehen an mathematische Zusammenhänge. Diese Werkzeuge machen es in weiten Bereichen überhaupt zum ersten Mal möglich an Modellierungsfragen, die über die eingekleidete Aufgabe hinausgehen, mit einem vertretbaren Aufwand heranzugehen. Dadurch werden genau die Kompetenzen gefördert, die in berechtigter Weise gefordert und durch Studien wie PISA überprüft werden.

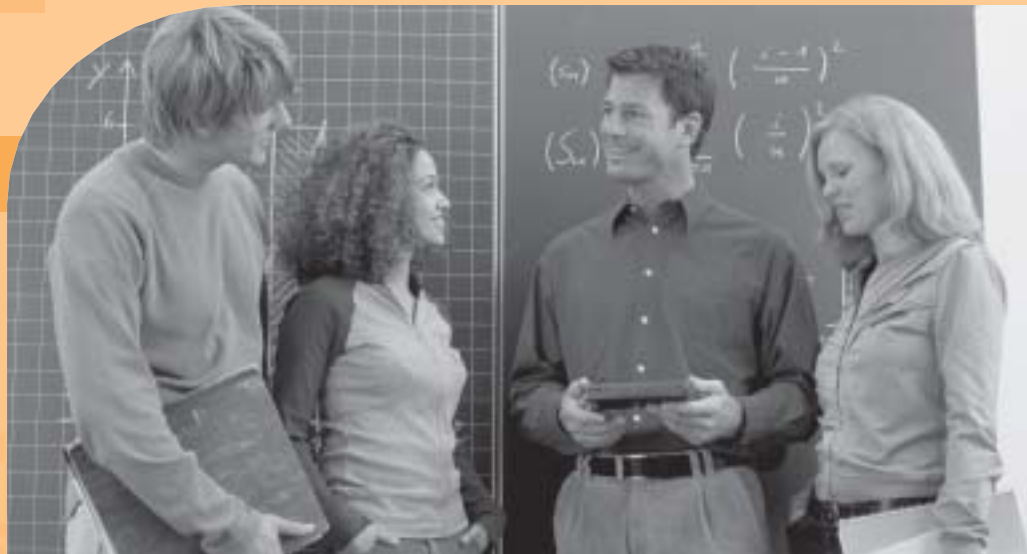
Dieser fördernde und unterstützende Charakter von Graphikrechnern und Taschencomputern ist durch eine Vielzahl wissenschaftlich begleiteter Studien nachgewiesen. Dieser wird auch durch die praktische Arbeit an bereits sehr vielen Schulen täglich aufs neue belegt.

Wichtig ist dabei die richtige Mischung der verschiedenen Unterrichtsmethoden. Viele bewährte Dinge kann man auch zukünftig tun, manches lässt sich durch kleine Änderungen adaptieren, einige alte Zöpfe muss man jedoch schlicht abschneiden.

Durch die Fortbildungen, durch die stetige Weiterentwicklung unserer Produkte (Soft- und Hardware), durch die Vielzahl der Unterrichtsmaterialien einschließlich der Ihnen vorliegenden neuen Ausgabe der TI-Nachrichten möchten wir gemeinsam mit unseren Kooperationspartnern einen Beitrag dazu leisten, Ihnen den Weg hin zu einem neuen, frischen Mathematikunterricht zu ebnet.

Wir freuen uns darauf, Sie auf Ihrem Weg zu begleiten.

Ihr TI Team



Inhaltsverzeichnis

<i>J. Böhm</i> : Wie ich die Parameter lieben lernte, oder Wieviele Gesichter hat die Welt	2
<i>W. Zappe</i> : Dein Unterricht wird interessant, nimmst du ein CAS zur Hand!	6
<i>M. Bostelmann</i> : Einführung in die Fraktale	7
<i>D. Colosio</i> : Die irrationalen Zahlen im mathematischen Labor (2) Annäherung von π mit der Methode des Archimedes	10
<i>H.-J. Elschenbroich – G. Seebach</i> : Dynamisch Geometrie entdecken mit elektronischen Arbeitsblättern	13
<i>A. Fässler</i> : Modellbildung – schon zu Beginn des Analysis-Unterrichts	15
<i>W. Pröpper</i> : Ein erster Kontakt mit dem neuen Voyage 200	17
<i>H. Müller-Sommerer</i> : Hüllkurven in Klasse 9	19
<i>F. Tinhof</i> : Konfidenzintervalle einfach berechnen (Teil 2)	22
<i>E. Lehmann</i> : Eine Klassenarbeit Klasse 9 – Beispiel für CAS-Einsatz	25
<i>K.-H. Keunecke</i> : CBR: Was nicht in den Handbüchern steht (Teil 2)	26
<i>J. Schönenberger-Deuel</i> : Workshop zum Thema Kurven	29

Die Mathematik als Fachgebiet ist so ernst, dass man keine Gelegenheit versäumen sollte, dieses Fachgebiet unterhaltsamer zu gestalten.

(Blaise Pascal)

Wie ich die Parameter lieben lernte, oder Wieviele Gesichter hat die Welt

Josef Böhm



In Clifford Pickovers sehr empfehlenswertem Buch *Computers, Pattern, Chaos and Beauty – Graphics from an Unseen World*¹ stieß ich auf ein kurzes Kapitel „Autocorrelation Cartoon-Faces for Speech“. Hier wurden verschiedene Gesichtsformen generiert. Das regte mich an, damit den Einsatz von Parametern zu demonstrieren. Die Aufgabenstellung eignet sich meiner Meinung nach hervorragend für einen sehr motivierenden, aber auch einen sehr offenen Umgang mit diesem Thema.

Mein erster Zugang erfolgte über DERIVE. Nachher übertrug ich die Grundidee Schritt für Schritt auf den TI-92.

Beginnen wir mit einem stilisierten Gesicht – nach dem Kinderreim „Punkti – Punkti, Strichi – Strichi, ist das nicht ein Mondgesichti?“



Welche Eigenschaften dieses Gesichtes könnten variiert werden?

Dass die Sache nicht zu einfach wird, schlage ich vor:

- (1) Gesichtsform (f_f)
- (2) Augenform (e_f)
- (3) Augengröße (e_s)
- (4) Augenabstand (e_{s_f})
- (5) Pupillengröße (p_s)
- (6) Augenbrauenlänge (b_l)
- (7) Augenbrauenneigung links (b_{sl})
- (8) Augenbrauenneigung rechts (b_{sr})
- (9) Nasengröße (n_s)
- (10) Abstand der Mundwinkel (m_l)
- (11) Unterlippenform (u_f)
- (12) Oberlippenform (o_f)

Die Liste könnte beliebig verändert werden (Ohren, Haare,). Die Gesichtsgröße lasse ich fix, dass wir auch die ganze Schön-

heit am Bildschirm bewundern können. In den Klammern stehen die Namen der Parameter, die für die Variation der Attribute verantwortlich sind. Wir wollen einmal annehmen, dass die Parameter im Intervall ($-5 \leq \text{Parameterwerte} \leq 5$) liegen sollen (– nicht notwendigerweise ganzzahlig, aber für den Anfang wollen wir auch das annehmen).

Der Parameterwert 0 stellt für alle Eigenschaften den „Normalwert“ dar.

Daher konstruieren wir zuerst ein „Normalgesicht“, als Ausgangspunkt für alle weiteren Überlegungen.

Wenn wir für die Gesichtsform von einem Kreis mit dem Radius 5 ausgehen, dann erhalten wir über die Parameterdarstellung Formen von länglich bis breit über

$$[(5+0.4*f_f)*\cos(t), 5*\sin(t)],$$

mit $0 \leq t \leq 2\pi$ und $-5 \leq f_f \leq 5$.

In DERIVE kann man mit der impliziten Darstellung der Ellipse arbeiten und erspart sich die Parameterdarstellung über die Winkelfunktionen, wobei aber das Wesentliche – der Einsatz des Parameters f_f – auch erhalten bleibt.

Bei den Augen sind bei unseren Vorgaben schon drei Parameter zu berücksichtigen: der Augenabstand, die Augengröße und die Augenform.

Die „Normalaugen“ haben ihre Mitten bei $(\pm 1,7/2)$ und sind kreisförmig mit dem Radius 1,2. Die Parameter e_s , e_f und e_{sp} haben ihre Wirkung, wie die Parameterdarstellung zeigt.

$$[(1.2+0.1*e_s+0.1*e_f)\cos(t)+1.7+0.1*e_{sp},$$
$$(1.2+0.1*e_s)\sin(t)+2]$$

Die Darstellung der Nase ist kein großes Problem. Man definiert die Nase durch eine Matrix, die ein geschlossenes Dreieck darstellt: $[[0,1.7][1.5,-1.3][1.5,-1.3][0,1.7]]$ und streckt oder staucht dieses Objekt von Zentrum aus mit dem Faktor $1+0.1*n_s$. Gezeichnet wird das Dreieck über den `line`-Befehl.

Die Pupillen will ich schraffiert darstellen, daher bemühe ich den `shade`-Befehl. Hier findet die explizite Darstellung von unterer und oberer Pupillenhälfte ihre Anwendung. Die Pupillen sind „nur“ Kreise variabler Größe, deren Mittelpunkte mit den Augenmittelpunkten zusammenfallen. Zwei Zufallszahlen steuern die Richtung und die Dichte der Schraffur.

Besonders interessant und gewinnbringend für das Verständnis der Parameter sind die Augenbrauen und der Mund. Die Mitten der Augenbrauen hängen vom Augenabstand und der Augen-

¹ erschienen bei Dover Publications, 2002

Zeichenerklärung:



Computer Algebra System
(TI-89, TI-92, TI-92 Plus, Voyage™ 200)



Graphische Taschenrechner
(TI-82, TI-83, TI-83 Plus, TI-83 Plus Silver Edition)



Messwerterfassungssystem
(CBL™, CBL 2™, CBR™)



PC Software
(Derive™, TI InterActive!™, Cabri Geometry II™)

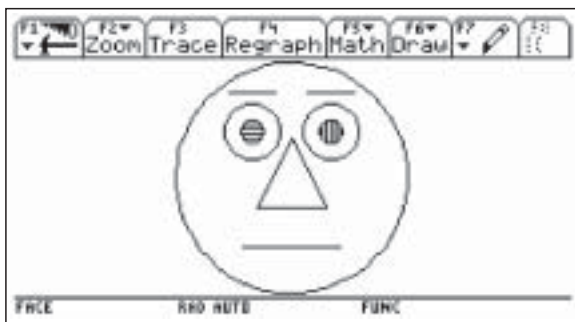
größe ab (*b_{r_x}* und *b_{r_y}*). Wenn man die Länge der Augenbrauen in den Griff bekommen will, dann muss man ihren Richtungsvektor normieren. Die Schräge der Augenbrauen wird über den $\tan(b_{sr} \cdot \pi / 2\theta)$ gesteuert (bzw. *b_{s1}*, weil die beiden Brauen ein „Eigenleben“ haben sollen). Die Strecken werden wieder über eine geeignete Parameterdarstellung gezeichnet.

Bislang haben wir Gerade, Ellipsen und Matrizen eingesetzt. Da fehlt sicher noch die quadratische Funktion. Unter- und Oberlippe geben Gelegenheit, Parabeln zu verwenden. Ausgehend von den beiden Mundwinkeln ($\pm 2,1/-3$), die über *m₁* die Mundgröße bestimmen, werden zwei Parabeln – eine nach unten, die andere nach oben offen – bestimmt, deren Scheitellage durch die beiden Parameter *u_f* und *o_f* definiert wird. Die Parabeln werden dann nur im Bereich zwischen den Mundwinkeln -*m_{ptr}* und +*m_{ptr}* gezeichnet. Wer noch ein wenig länger beim Zeichnen warten will, kann natürlich auch den Mund schraffieren.

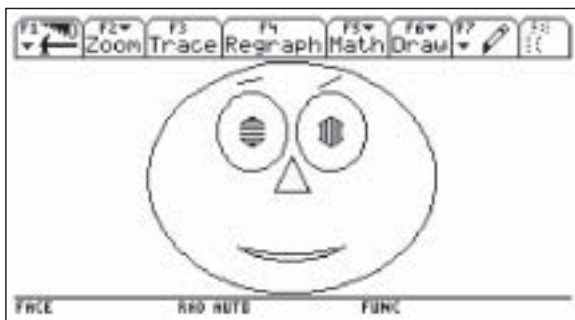
Die Parabeln haben die Form $y = a x^2 + b$ und gehen durch die beiden Punkte (*m_{ptr}* / -3) und ($\theta / -3 \pm \theta \cdot 3 \cdot 1_f$), wobei *1_f* für *u_f* und *o_f* steht.

Das Listing des vollständigen Programms ist am Ende des Beitrags zu finden. Leser, die es ganz eilig haben, können den Code damit abtippen. Einfacher ist es jedoch, den Quellcode von der TI-Materialienseite herunter zu laden.

Damit können wir das Programm schon testen. Beginnen wir mit zwei „Durchschnittsgesichtern“:



faces(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0)

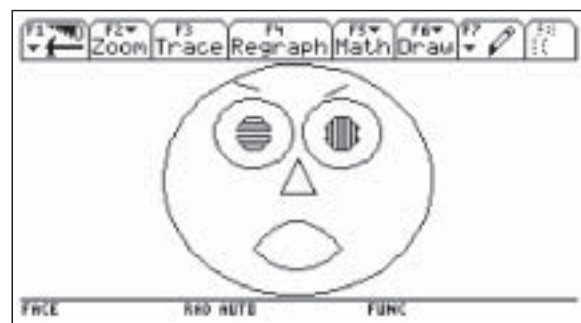


faces(3,-2,5,0,1,-4,3,1,-5,3,-2,1)

Jetzt geht's aber erst richtig los: lassen wir den Zufall walten. Nicht wir bestimmen die Parameter, sondern der eingebaute Zufallsgenerator. Zuerst automatisieren wir die

bisherige Vorgangsweise und lassen ganzzahlige Parameter von -5 bis +5 zu. Nun werden wir unsere Schüler die Frage beantworten lassen, ob wir auf diese Art und Weise jedem Menschen auf der Erde sein individuelles Gesicht zuweisen können?

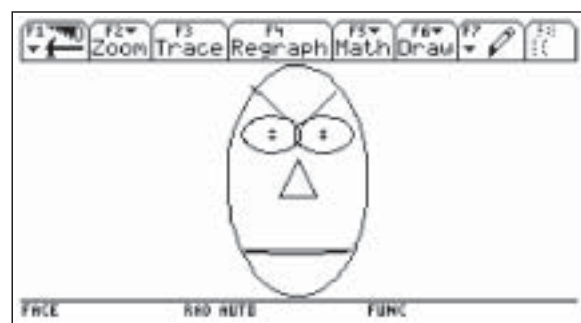
```
faceganz()
Prgm
  Local v_
  seq(6-rand(11),k,1,12)->v_
  faces(v_[1],v_[2],v_[3],v_[4],v_[5],
        v_[6],v_[7],v_[8],v_[9],v_[10],
        v_[11],v_[12])
EndPrgm
```



faceganz()

Dann lassen wir die – unnötige Forderung – nach Ganzzahligkeit fallen und erlauben alle Zufallszahlen zwischen -6 und +6.

```
facernd()
Prgm
  Local v_
  seq(6-12*rnd(),k,1,12)->v_
  faces(v_[1],v_[2],v_[3],v_[4],v_[5],
        v_[6],v_[7],v_[8],v_[9],v_[10],
        v_[11],v_[12])
EndPrgm
```



facernd()

Das ist ja schon ganz nett, aber wenn wir der Natur wirklich in die Karten schauen wollen, dann sollten die Eigenschaften nicht innerhalb eines Intervalls gleichverteilt, sondern doch eher normalverteilt sein. Hier ergibt sich eine sehr schöne Möglichkeit, Begriffe wie Mittelwert und Varianz zu demonstrieren und zu visualisieren. Wir geben – vereinfacht – für alle Parameter den gleichen Mittelwert und die gleiche

Standardabweichung an und erzeugen damit Gesichter eines bestimmten Typs, die mehr oder weniger voneinander abweichen.

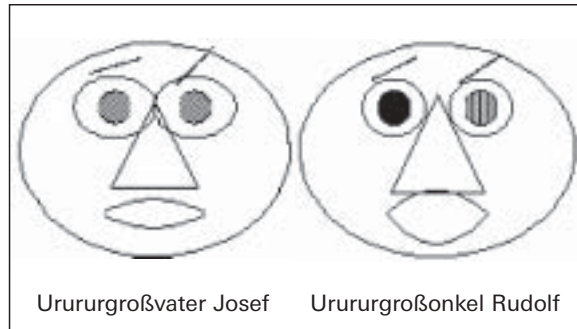
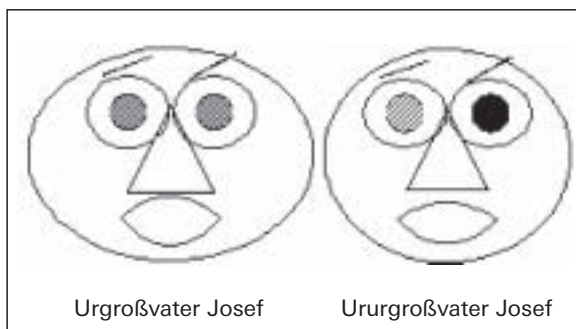
```
facenorm(mu,sigma)
Prgm
  Local v_
  seq(randNorm(mu,sigma),k,1,12)->v_
  faces(v_[1],v_[2],v_[3],v_[4],v_[5],
        v_[6],v_[7],v_[8],v_[9],v_[10],
        v_[11],v_[12])
EndPrgm
```

Wenn wir die Statistik ins Spiel bringen, dann ist eine einzige Ausprägung alleine natürlich nicht sehr aussagekräftig. Daher erzeugen wir gleich eine ganze „Ahnengalerie“ eines Menschenschlags und rufen dann die erzeugten Bilder ab.

```
ahnen(mu,sigma,anz)
Prgm
  Local i_ : ClrDraw
  For i_,1,anz
    facenorm(mu,sigma)
    StoPic #("fa"&string(i_))
    ClrDraw
  EndFor
EndPrgm

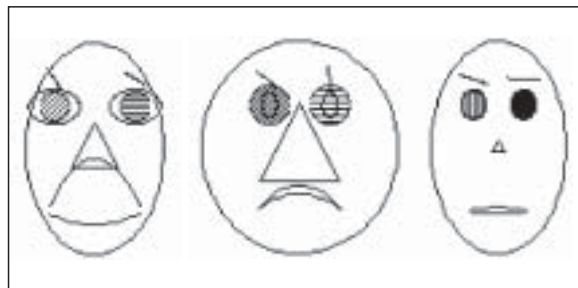
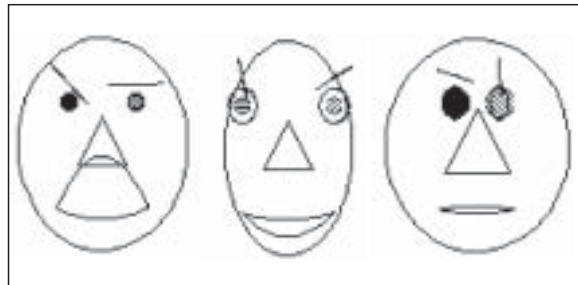
showfam(anz)
Prgm
  Local i_ : ClrDraw
  For i_,1,anz
    RclPic #("fa"&string(i_))
    Pause : ClrDraw
  EndFor
EndPrgm
```

So können wir etwa vier meiner Vorfahren väterlicherseits reproduzieren – die alle ein eher breites Gesicht hatten und sich bei sehr stabilen Verhältnissen nicht wesentlich veränderten: ahnen(3,1,4)



Wesentlich schlanker im Durchschnitt erscheint die Verwandtschaft mütterlicherseits, die aber, bedingt durch die Lebensumstände, eine deutlich größere Varianz in ihren Physiognomien aufweist:

ahnen(-2,3,6) und dann showfam(6)



Hier verursacht die Standardabweichung 3 schon eine wesentlich größere Variabilität in den Gesichtern.

Wie ich eingangs erwähnt habe, befasste ich mich mit diesem Thema zuerst mit DERIVE. Die neuen Programmiermöglichkeiten von DERIVE5 sind herausfordernd und faszinierend zugleich. Hier kann man auf dem PC-Schirm seine ganze Ahnengalerie auf einmal hinzaubern.

Der DERIVE-Code wird zusammen mit einer beeindruckenden Bildergalerie im nächsten DERIVE & TI-92 Newsletter, der regelmäßig erscheinenden Zeitschrift der International DERIVE & TI-92 User Group, veröffentlicht.²

Als Unterrichtsvorschläge könnten der Geist PARABOLICUS und ein wirkliches Strichmännchen dienen, aber die besten Ideen haben die Schüler, wenn man sie frei gestalten läßt.

² Der Autor dieses Beitrages ist Gründer und Spiritus Rector dieser bemerkenswerten User Group. Auskünfte bei ihm unter nojo.boehm@pgv.at



Hier muss man zuerst die Grundfigur fixieren, und sich dann überlegen, welche Eigenschaften, bzw. Formen innerhalb welcher Grenzen variierbar sein können.

Zusammenfassend möchte ich sagen, dass mich hier die Verbindung von Kreativität, dem Einsatz von Parametern und der Visualisierung von Grundbegriffen der Statistik begeistert.

Für Erfahrungsberichte wäre ich sehr dankbar.

Autor:

Josef Böhm, nojo.boehm@pgv.at

Anhang: Kasten mit dem Programmlisting

```
faces(f_f,e_f,e_s,e_sp,p_s,b_l,br_sr,br_sl,n_s,m_l,u_f,o_f)
Prgm
Local nase,bry,brx,b_l,mptr
ClrDraw : ClrGraph
setGraph("Grid","OFF"):setGraph("Axes","OFF"):ZoomDec
(1+0.1*n_s)*[[0,1.7][1.5,-1.3][1.5,-1.3]]>nase
© Gesicht
DrawParm (5+0.4*f_f)*cos(t),5*sin(t),0,6.4,0.1
© rechtes und linkes Auge
DrawParm (1.2+0.1*e_s+0.1*e_f)*cos(t)+1.7+0.1*e_sp,(1.2+0.1*e_s)*sin(t)+2,0,6.4,0.1
DrawParm (1.2+0.1*e_s+0.1*e_f)*cos(t)-1.7-0.1*e_sp,(1.2+0.1*e_s)*sin(t)+2,0,6.4,0.1
© rechte und linke Pupille
Shade -sqrt((0.6+0.08*p_s)^2-(x+1.7+0.1*e_sp)^2)+2,sqrt((0.6+0.08*p_s)^2-
(x+1.7+0.1*e_sp)^2)+2,,rand(4),rand(3)
Shade -sqrt((0.6+0.08*p_s)^2-(x-1.7-0.1*e_sp)^2)+2,sqrt((0.6+0.08*p_s)^2-
(x-1.7-0.1*e_sp)^2)+2,,rand(4),rand(3)
© Augenbrauen rechts und links
1.7+0.1*e_sp>brx:3.7+0.1*e_s>bry
norm([[1,tan(br_sr*pi/20)]]>b_l
DrawParm brx+t/b_l,bry+t*tan(br_sr*pi/20)/b_l,-1-0.06*b_l,1+0.06*b_l,0.05
norm([[1,tan(br_sl*pi/20)]]>b_l
DrawParm -brx+t/b_l,bry+t*tan(br_sl*pi/20)/b_l,-1-0.06*b_l,1+0.06*b_l,0.05
© die Nase
Line nase[1,1],nase[1,2],nase[2,1],nase[2,2]
Line nase[2,1],nase[2,2],nase[3,1],nase[3,2]
Line nase[3,1],nase[3,2],nase[1,1],nase[1,2]
© der Mund
2.1+0.1*m_l>mptr
DrawFunc when(x>=mptr and x<=mptr,-0.3*u_f/mptr^2*x^2-3+u_f*0.3,undef)
DrawFunc when(x>=mptr and x<=mptr,0.3*o_f/mptr^2*x^2-3-o_f*0.3,undef)
Pause:setMode("Split Screen","FULL"):setMode("Split 1 App","Home")
EndPrgm
```

Autoren willkommen! Kritik erwünscht!

Ihr Beitrag zu den TI-Nachrichten ist herzlich willkommen, besonders natürlich Beispiele aus dem Unterricht.


Ihre Kritik hilft uns, Ihren Wünschen besser gerecht zu werden. Ihr Lob spornt uns an.

Senden Sie Ihre Beiträge an unsere Länderredaktion:

D: W. Pröpfer: w.proepfer@wpro.franken.de · A: Ch. Birnbauer: c.birnbauer@aon.at · CH: Urs Oswald: osurs@bluewin.ch

oder an

Texas Instruments, E&PS, TI-Nachrichten, Haggertystraße 1, D-85356 Freising, E-Mail: ti-nachrichten@ti.com

 In Thüringen wird der Einsatz von CAS (TI-89) seit ca. zwei Jahren an acht Gymnasien erprobt. Unter anderem zeigt sich, dass sich durch die Verwendung des TI-89 vorher nicht vorhandene Möglichkeiten bieten, den Mathematikunterricht auch auf der Basis der derzeitigen Lehrpläne interessant und anspruchsvoll zu gestalten, obwohl durch das Zentralabitur die Spielräume für inhaltliche Veränderungen begrenzt sind. Im folgenden möchte ich am Beispiel der partiellen Integration zeigen, wie durch den Einsatz von CAS-Taschenrechnern über das Wechselspiel von Arbeiten mit und ohne Rechner eine intensive selbstständige Schülertätigkeit und ein tieferes theoretisches Verständnis von Mathematik erreicht werden kann.

Bei der Einführung des unbestimmten Integrals hatte ich im Unterricht eines Leistungskurses nach der Begriffsbildung und einfachen Übungen auch Verfahren wie

$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} \cdot F(ax+b) + c$ und die partielle Integration behandelt.

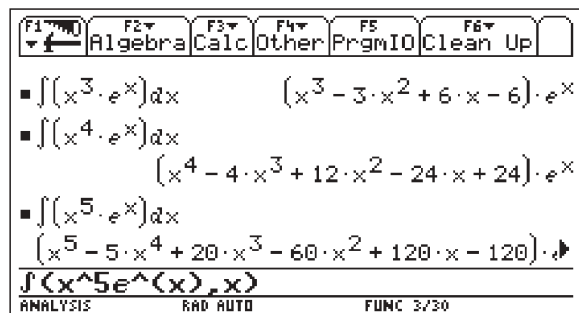
Ich hatte mich zunächst gefragt, ob das überhaupt notwendig ist, denn schließlich liefert der TI-89 viele dieser Integrale „auf Knöpfchendruck“. Aber weil Integrationsverfahren wegen der Möglichkeit theoretischer Vertiefung m. E. ein wichtiger Unterrichtsgegenstand sind – und weil auch meine Schüler immer wieder fragen: „Wie geht denn das ohne Rechner?“ – wollte ich nicht auf eine Besprechung einiger solcher Verfahren verzichten.

Es hat sich gezeigt, dass dieser Weg richtig ist. Dabei kommt man über große Strecken ohne TI-89 aus, ja ich verlange bei gewissen Aufgaben den bewussten Verzicht auf dieses Hilfsmittel. Natürlich gehört es ebenso zu meinem Unterricht, mit den Schülern auch über die Berechnung unbestimmter Integrale mit dem TI-89 zu sprechen.

Nun zu dem Beispiel:

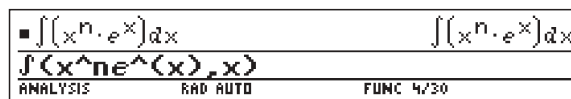
Bei der Ermittlung von $\int x \cdot e^x dx$ und $\int x^2 \cdot e^x dx$ ergab sich folgende Situation:

Beide Integrale haben wir zunächst ohne TI-89 bestimmt, um das Verfahren der partiellen Integration zu üben. Das haben die Schüler gut bewältigt, aber gewissermaßen im gleichen Atemzug kamen einige von ihnen auf die Idee, die Aufgabenstellung zu verallgemeinern. So wurden – nun aber mit TI-89 – Integrale der Form $\int x^n \cdot e^x dx$ für $n = 3; 4; 5; \dots$ ermittelt:



Es entwickelte sich eine **spannende und intensive Diskussion** der Schüler untereinander!
Die durch dieses **experimentelle Vorgehen** entstandenen

Ergebnisse forderten zwingend nach einer Verallgemeinerung von $\int x^n \cdot e^x dx$ für allgemeines natürliches n . Aber der Rechner liefert das nicht:



Nun begannen die Schüler **selbstständig nach einer Formel** für die bei der Integration entstandenen Summen zu **suchen**.

Dazu müssen die Rechneranzeigen richtig **interpretiert** werden:

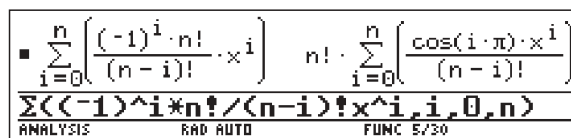
- Offensichtlich kommt in jedem Summanden eine Potenz von x vor, beginnend mit dem Exponenten n und jeweils um 1 kleiner werdend.
- Es scheint stets $n + 1$ Summanden mit wechselndem Vorzeichen zu geben, also muss ein Faktor $(-1)^i$ vorkommen.
- Die Koeffizienten ab dem zweiten Summanden könnten Produkte natürlicher Zahlen sein, wobei beim zweiten Summanden der erste Faktor n ist. Dann steigt die Anzahl der Faktoren wird jeweils um einen Faktor größer, wobei dieser jeweils eine um 1 kleinere Zahl ist. Das sieht nach Fakultäten oder Binomialkoeffizienten aus!?

Schauen wir ein Beispiel an:

$$5 = \frac{5!}{4!}; 20 = 5 \cdot 4 = \frac{5!}{3!}; 60 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{5!}{2!}; \dots$$

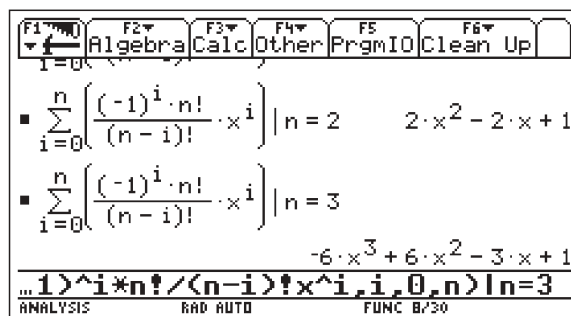
$$\Rightarrow \text{Wir haben ein Muster: } \frac{n!}{(n-i)!} \text{ für } i = 0, \dots, n$$

Probieren wir:



Wo kommt da der Kosinus her? Ach ja, $\cos(i \cdot \pi)$ liefert auch abwechselnd $+1$ und -1 .

Vergleichen wir für $n = 0, 1, \dots, 5$ diese Summe mit den Ausdrücken in oben ermittelten unbestimmten Integralen:



Da stimmt etwas nicht! Der Exponent von x passt nicht zu den Koeffizienten, die Reihenfolge stimmt nicht, also ändern wir die Formel und **experimentieren weiter**:

$$\sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i \cdot n!}{(n-i)!} \cdot x^{n-i}$$

$$n! \cdot \sum_{i=0}^n \frac{\cos(i \cdot \pi) \cdot x^{n-i}}{(n-i)!}$$

... 1) ^i * n! / (n-i)! * x^(n-i), i, 0, n

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	

$$\sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i \cdot n!}{(n-i)!} \cdot x^{n-i} \Big|_{n=3}$$

$$x^3 - 3 \cdot x^2 + 6 \cdot x - 6$$

$$\sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i \cdot n!}{(n-i)!} \cdot x^{n-i} \Big|_{n=4}$$

$$x^4 - 4 \cdot x^3 + 12 \cdot x^2 - 24 \cdot x + 24$$

... *n! / (n-i)! * x^(n-i), i, 0, n | n=4

Jetzt haben wir, so scheint es, eine richtige **Verallgemeinerung** gefunden:

$$\int x^n \cdot e^x dx = e^x \cdot \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i \cdot n!}{(n-i)!} \cdot x^{n-i}$$

Soweit etwa gingen die Überlegungen in der Unterrichtsstunde. Ich halte fest:

- Der TI-89 liefert rasch Material zum Experimentieren und Vermuten.
- Ohne gefestigte Grundkenntnisse ist ein Folgern aus dem vom TI gelieferten „Rohmaterial“ hier nicht möglich.
- Die TI-Anzeige zwingt zum vernetzten Denken.

Ich forderte nun einen **Beweis** der Summenformel. Für einen Leistungskurs scheint mir das angemessen zu sein.

Zwei Möglichkeiten bieten sich an:

- (1) Beweis durch vollständige Induktion
- (2) Beweis durch Ableiten.

Für den Beweis durch vollständige Induktion kann man das Verfahren der partiellen Integration anwenden. Im Induktionsschritt hilft der Ansatz:

$$\int x^{k+1} \cdot e^x dx = x^{k+1} \cdot e^x - \int (k+1) \cdot x^k \cdot e^x dx.$$

Man muss das Verfahren der partiellen Integration also kennen, wenn man den Beweis auf diesem Wege führen will! Außerdem ist ein souveränes Umgehen mit dem Summenzeichen eine weitere wichtige Voraussetzung für die Beweisführung. In weiteren Übungen (z.B. $\int x^n \cdot e^{-x} dx$ oder $\int x^n \cdot e^{1-x} dx$) wurde das Verfahren vertieft.

Zusammenfassung: Auch bei recht engen Spielräumen bezüglich der Inhalte, wie sie ein Mathematiklehrgang mit Zentralabitur bietet, kann durch den Einsatz des CAS-Taschenrechners der Unterricht experimenteller, intensiver, offener, theoretisch anspruchsvoll und interessant organisiert werden. Natürlich bietet das Vorhandensein von CAS allein noch keine hinreichende Voraussetzung dafür. Es bedarf stets eines entsprechenden methodischen Ansatzes durch die Lehrkraft.

Anmerkung der Redaktion:


Die Ideen dieses Artikels lassen sich natürlich ebenso mit einem Rechner der TI-92 Reihe oder auch mit dem neuen Voyage 200 realisieren. Die Abbildungen wurden mit dem Voyage 200 erstellt.

Autor:

Dr. Wilfried Zappe
 Schleusinger Straße 4
 D-98693 Ilmenau/ Thüringen
 Zappe.Ilmenau@t-online.de

Einführung in die Fraktale

Michael Bostelmann

 Fraktale erfuhren ab Mitte der 80er Jahre durch die Einführung des PC eine ungeheure Popularität, nicht zuletzt durch ihren hohen Grad an Ästhetik. Von der verwandten Chaosforschung erhoffte man sich neue Erkenntnisse über nichtlineare Systeme. Auch wenn sich die erste Euphorie inzwischen etwas gelegt hat, bleibt das Thema aktuell, denn auch bei neueren Entwicklungen, wie z.B. bei Handyantennen oder effizienteren Verfahren der Bildkomprimierung, spielen Fraktale eine Rolle.

Im Folgenden beschreibe ich eine Unterrichtsreihe, die ich in einer 11. Klasse im Zusammenhang mit Folgen durchgeführt habe. Eine detailliertere Darstellung dieser Reihe findet man in [1].

Bei der Untersuchung einer Sprungfolge auf einer Strecke gelangt man zum wahrscheinlich einfachsten Fraktal, dem Cantor-Staub. Daran werden die zentralen Begriffe „Selbstähnlichkeit“ und „Fraktale Dimension“ erläutert und anschließend ein komplexeres Fraktal untersucht.

Auf den ersten Blick erscheint die Verwendung des TI-92 Plus anstelle eines PC fast als Anachronismus. Die Schüler empfinden jedoch, dass die vordergründigen Nachteile (lange Rechenzeit, schlechte Grafikauflösung, keine Farben) durch die leichte Bedienung und die schnelle Verfügbarkeit mehr als wettgemacht wurden.

Motivation

Ein Floh springt auf einer Strecke AB nach folgenden Regeln hin und her:

- Startpunkt ist die Mitte zwischen A und B
- Er wirft eine Münze. Bei Kopf springt er in Richtung A und zwar genau 2/3 der Entfernung bis A. Bei Zahl springt er in Richtung B und zwar genau 2/3 der Entfernung bis B.

Abb. 1 zeigt die ersten Sprünge einer mögliche Sprungfolge.

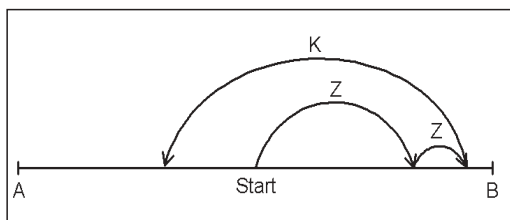


Abb.1: Sprungfolge Zahl-Zahl-Kopf

Nach einigen Sprüngen hält der Floh inne und betrachtet die bisher erreichten Punkte. Mithilfe eines kleinen Programms können wir diese Punkte sichtbar machen.

```
floh(n)
Prgm
Local k,p,x
FnOff:PlotsOff:ClrDraw
setGraph("axes","off")
-0.1->xmin:1.1->xmax:0->ymin:1->ymax
Line 0,0.4,0,0.6
Line 1,0.4,1,0.6
0.5->x
PtOn x,0.5
For k,1,n
  rand(2)->p
  If p=1 Then
    x/3->x
  Else
    2/3+x/3->x
  EndIf
  PtOn x,0.5
EndFor
EndPrgm
```

Floh(300) markiert 300 Sprünge und es zeigt sich folgendes Bild:

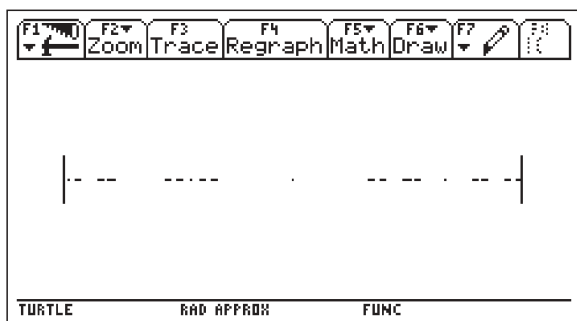


Abb.2: 300 Sprünge

Es lässt sich vermuten, dass einige Punkte der Strecke überhaupt nicht getroffen werden. Außerdem erscheint eindeutig ein Muster. Dies soll nun genauer untersucht werden.

Welche Punkte werden erreicht?

Repräsentiert man die Strecke AB durch das Intervall [0;1], dann lässt sich die Folge der Sprungpunkte berechnen, wie bereits in dem Programm ersichtlich ist. Die neue Position berechnet sich aus der alten wie folgt:

Kopf: $x_{neu} = 1/3 \cdot x_{alt}$
 Zahl: $x_{neu} = x_{alt} + 2/3 \cdot (1 - x_{alt}) = 2/3 + 1/3 \cdot x_{alt}$

Für die Folge aus Abb.1 ergibt sich:

$x_0 = 1/2 ; x_2 = 5/6 ; x_3 = 17/18 ; x_4 = 17/54$

Es ist leicht einzusehen, dass die Form der Brüche immer unangenehmer wird. Abhilfe schafft die Darstellung im Dreiersystem, da die Multiplikation mit 1/3 nur eine Komma-verschiebung bedeutet.

Mit $1/2 = 0,1\bar{3}_3$ und $2/3 = 0,2\bar{3}_3$ folgt für die Sprungfolge nun

$x_0 = 0,1\bar{3}_3 ; x_2 = 0,21\bar{3}_3 ; x_3 = 0,221\bar{3}_3 ; x_4 = 0,0221\bar{3}_3$

Ein Baumdiagramm macht dieses Schema deutlich.

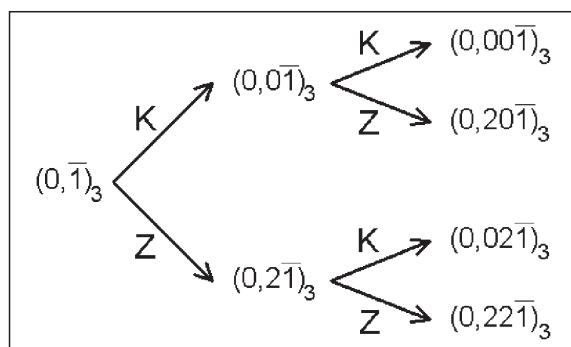


Abb.3: Baumdiagramm der ersten beiden Sprünge

Die Periode rutscht mit jedem Sprung um eine Stelle nach rechts und hinter dem Komma schiebt sich eine 0 oder 2 ein. Positionen, die zwischen dem Komma und der Periode eine 1 haben, werden nicht erreicht. Umgekehrt kann jede Position, die nach dem Komma eine Folge von Nullen und Zweien enthält und dann mit der Periode 1 weitergeht, durch eine entsprechende Münzwurffolge erreicht werden.

Woher kommt das Muster?

Schon nach wenigen Sprüngen rutscht die Periode soweit nach rechts, dass sie innerhalb der Bildschirmauflösung vernachlässigt werden kann. Schneidet man also die Periode ab, so bleibt folgende Menge:

$S = \{ (0, z_1z_2z_3\dots)_3 / z_i \in \{0,2\} \}$

Diese Menge lässt sich schrittweise aus der Menge $S_0 = [0;1]$ konstruieren. Aus S_0 bildet man S_1 , indem man alle Zahlen entfernt, die an der ersten Stelle nach dem Komma eine

1 enthalten. Geometrisch bedeutet das, dass man das mittlere Drittel herausnimmt. Dann entfernt man alle Zahlen, die an der zweiten Stelle eine 1 enthalten usw.. Die Entwicklung so entstehenden Folge S_0, S_1, S_2, \dots lässt sich grafisch gut veranschaulichen:

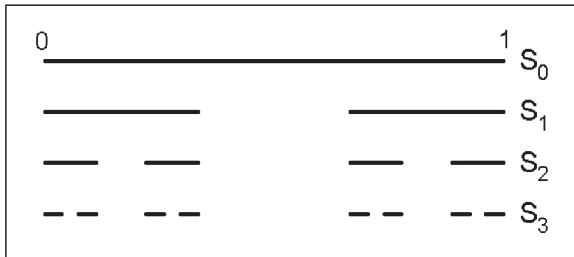


Abb.4: Entstehung des Cantor-Staubes

Offenbar gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$. Diese Menge ist unter dem Namen

Cantor-Staub bekannt. Es handelt sich hierbei um ein Fraktal, wie wir gleich sehen werden.

Selbstähnlichkeit

Der Cantor-Staub eignet sich gut, um den für Fraktale typischen Begriff der Selbstähnlichkeit zu verdeutlichen. Hier greifen wir auf den bekannten Ähnlichkeitsbegriff aus der Mittelstufen-geometrie zurück:

Zwei Figuren sind ähnlich, wenn sie durch eine zentrische Streckung in kongruente Figuren überführt werden können. Nehmen wir zum Beispiel das linke Drittel von S , also $S^* = \{ (0,0z_2z_3\dots)_3 / z_i \in \{0,2\} \}$ und strecken es mit dem Faktor 3. Dann erhalten wir

$$3 \cdot S^* = \{ 3 \cdot (0,0z_2z_3)_3 / z_i \in \{0,2\} \} = \{ (0,z_2z_3\dots)_3 / z_i \in \{0,2\} \} = S$$

Die Menge S ist zu einem Teil ihrer selbst ähnlich – eben selbstähnlich.

Fraktale Dimension

Um was für ein geometrisches Objekt handelt es sich eigentlich beim Cantor-Staub?

Vom Gefühl her ist seine Dimension größer als die eines Punkts (die wäre Null), aber so richtig eindimensional erscheint es uns auch nicht. Im Vergleich zu einer Strecke hat es zu viele Löcher. Wir müssen unsere klassische Vorstellung vom ganzzahligen Dimensionsbegriff erweitern. Betrachten wir die folgende Herleitung der Dimension für bekannte geometrische Objekte. Verkleinert man eine Strecke im Maßstab 1:3, dann passt die verkleinerte Strecke 3-mal in die ursprüngliche Strecke. Verkleinert man ein Quadrat im selben Maßstab, dann passt das verkleinerte Quadrat 9-mal in das ursprüngliche Quadrat. Verkleinert man einen Würfel im selben Maßstab, dann passt der verkleinerte Würfel 27-mal in den ursprünglichen Würfel. Fassen wir zusammen:

Objekt	Verkleinerungs-faktor k	Anzahl n im urspr. Objekt
Strecke	3	$3 = 3^1$
Quadrat	3	$9 = 3^2$
Würfel	3	$27 = 3^3$

Verallgemeinern wir dies, so erhalten wir:

Verkleinert man ein Objekt im Maßstab 1:k und passt das neue Objekt dann n-mal in das ursprüngliche Objekt, dann bezeichnet die Zahl d mit $n = k^d$ die Dimension des Objekts.

Wenden wir diese Überlegung nun auf den Cantor-Staub an. Wir verkleinern S im Maßstab 1:3 und erhalten das erste Drittel von S . Dieses passt aber nur 2-mal in S , nämlich im ersten und im letzten Drittel. Damit erhalten wir:

$$2 = 3^d \rightarrow d = \log_3(2) = 0,6309\dots$$

Also keine ganzzahlige, sondern eine gebrochene, eben fraktale (lat. fractus: zerbrochen) Dimension, die zwischen 0 und 1 liegt. Diese bezeichnet man auch als Hausdorff-Dimension (nach dem dt. Mathematiker Felix Hausdorff).

Ein naher Verwandter des Cantor-Staubes

Vor einigen Jahren wurde im Bundeswettbewerb-Informatik folgende Aufgabe gestellt (sinngemäß):

Ein Goldgräber erhält einen Claim, der die Form eines Dreiecks hat. Da er keine Ahnung hat, wo er mit dem Graben anfangen soll, sucht er sich zunächst einen beliebigen Punkt aus. Um den nächsten Grabungsort zu finden, wählt er einen der drei Eckpunkte beliebig aus und bestimmt den Mittelpunkt zwischen diesem Eckpunkt und seiner momentanen Position. Dies wiederholt er immer wieder.

Das folgende Programm stellt die Grabungsorte für n Grabungen grafisch dar.

```
gold(n)
Prgm
Local k,p,x,y
FnOff:PlotsOff:ClrDraw
setGraph("axes","off")
0->xmin:100->xmax:0->ymin:100->ymax
[20;80;50]->px:[5;5;90]->py
50->x:50->y
Line px[1,1],py[1,1],px[2,1],py[2,1]
Line px[2,1],py[2,1],px[3,1],py[3,1]
Line px[3,1],py[3,1],px[1,1],py[1,1]
PtOn x,y
For k,1,n
  rand(3)->p
  (x+px[p,1])/2->x
  (y+py[p,1])/2->y
  PtOn x,y
EndFor
EndPrgm
```

Nach 3000 Grabungen ergibt sich folgendes Bild:

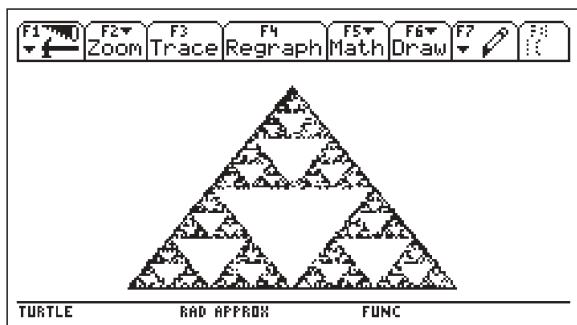


Abb.6: 3000 Grabungen

Der relativ langsame Bildaufbau hat bei Verwendung eines TI-ViewScreens den Vorteil, dass die Schüler während der Entstehung bereits Vermutungen über die Struktur des Bildes anstellen können – eine Art Montagsmaler-Effekt.

Bei der entstandenen Figur handelt es sich um das sogenannte Sierpinski-Dreieck, ebenfalls ein Fraktal. Geometrisch entsteht es, wenn man aus einem Dreieck das Mittendreieck heraus-schneidet, dann aus den verbleibenden drei Dreiecken wieder das Mittendreieck entfernt usw.. Auch hier lässt sich die Dimension leicht berechnen.

Nach der Verkleinerung im Maßstab 1:2 passt das Dreieck 3-mal in das ursprüngliche Dreieck. Für die Dimension gilt dann

$$3 = 2^d \rightarrow d = \log_2(3) = 1,5849\dots$$

Eine ausführliche Untersuchung des Sierpinski-Dreiecks findet man in [2].

Die Schüler können an dieser Stelle mit anderen Sprung-regeln oder anderen Grundfiguren anstelle des Dreiecks experi-mentieren.

Empfehlenswert als Weiterführung ist ein Video, das über die Betrachtung von Flohsprüngen zur Juliamenge bzw. zur Mandelbrotmenge hinführt [3].

Literatur:

- [1] <http://matheag-sii.bildung-rp.de>
- [2] M. Schroeder, Fraktale, Chaos und Selbstähnlichkeit, Spektrum Verlag 1994
- [3] Der Fraktale Flohmarkt, Video, Spektrum-Verlag

Autor:

Michael Bostelmann
 Westerwaldstraße 15a
 D-56335 Neuhäusel
 mail@mbostelmann.de

Die irrationalen Zahlen im mathematischen Labor (2) Annäherung von π mit der Methode des Archimedes

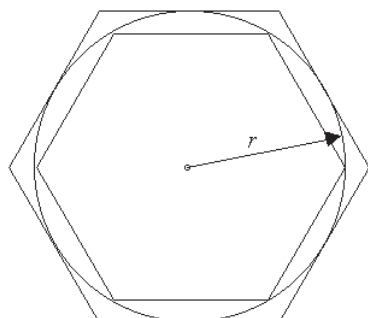
Diego Colosio



1. Theorie

Archimedes (Syrakus, 287 – 212 v.Chr.) hat eine Methode für die Abschätzung von π ausgedacht, welche überraschen-derweise der modernen Definition der reellen Zahlen sehr nahe steht. Allgemein wird dieser Wissenschaftler als einer der größten aller Zeiten anerkannt.

Natürlich konnte sich Archimedes damals nicht auf die moder-nen Methoden der Grenzwertberechnung von Folgen stützen.



Einige Ideen des Verfahrens sind jedoch seiner Zeit um 2000 Jahren voraus. Es war damals aus der euklidischen Geometrie klar, dass der Kreisumfang zwischen den Umfängen von einbe-schriebenen und umbeschriebenen regulären Vielecken liegt.

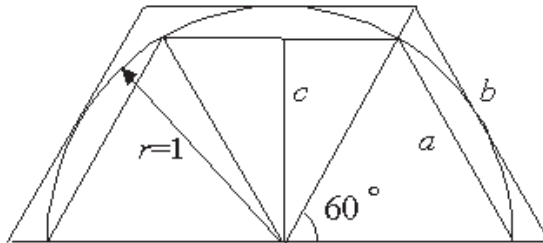
Archimedes erkannte, dass der Umfang der Vielecke umso näher an den Kreisumfang rückt, je größer die Zahl der Seiten wird.

Setzt man in der Formel $C = 2\pi r$ des Kreisumfanges $r = 1$, so erhält man die gewünschte Zahl π als Länge des

Halbkreises: $\pi = \frac{C}{2}$.

1.1 Erste Annäherung

Man erhält eine erste, grobe Abschätzung von π durch die Berechnung des halben Umfanges von einbeschriebenem bzw. umbeschriebenem regulärem Sechseck.



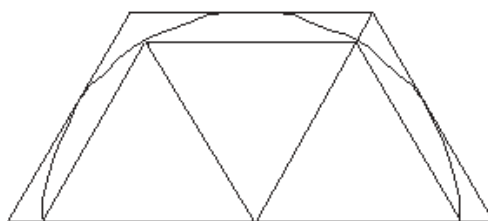
$$a = 1 \qquad c = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad b = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Es ergibt sich:

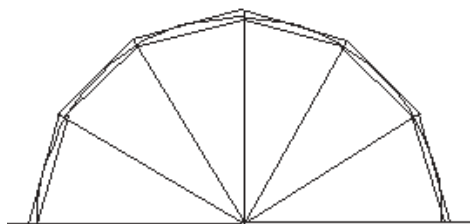
$$\begin{aligned} 3a &< \pi < 3b \\ a &< \pi < 3 \frac{2}{\sqrt{3}} \\ a &< \pi < 3.464 \end{aligned}$$

1.2 Die nächsten Schritte

Bei Verdoppelung der Seitenzahl bekommt man eine bessere Abschätzung für π .



Sechseck



Zwölfeck

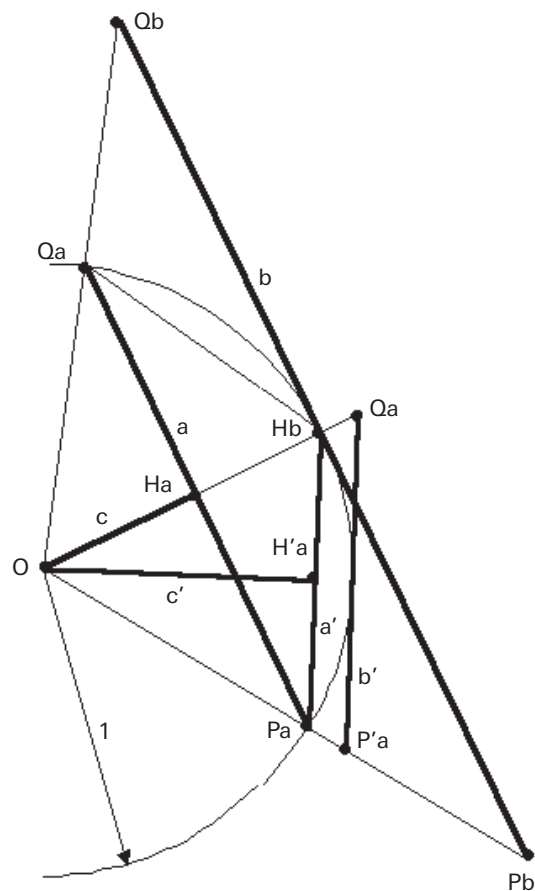
Führt man die Verdoppelung der Seiten fort, so bekommt man für π eine immer bessere Abschätzung.

Das Problem von Archimedes war nun die Berechnung der neuen Seitenlängen bei Verdoppelung der Seitenzahl. Die Trigonometrie war zu seiner Zeiten noch wenig entwickelt, er musste sich auf die Erkenntnisse der klassischen Geometrie stützen.

1.3 Verdoppelung der Seitenzahl

Archimedes schlägt ein kluges Induktionsverfahren vor, welches uns ermöglicht, aus den Seiten eines gegebenen regulären Vielecks diejenigen des Vielecks mit verdoppelter Seitenzahl zu berechnen.

In der folgenden Figur seien a und b die Seiten eines beliebigen ein- und umbeschriebenen regulären n -Ecks, und c sei der Inkreisradius des einbeschriebenen n -Ecks. Es sind die entsprechenden Größen a' , b' , c' des neuen $2n$ -Ecks zu berechnen.



1.4 Geometrische Zusammenhänge

Pythagoras: $c^2 + \frac{a'^2}{4} = 1 \Rightarrow a'^2 = 4(1 - c^2)$ (1)

Fläche des Viereckes $OP_aH_bQ_a$:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \overline{OH_b} \cdot \overline{P_aQ_a} = \frac{1}{2} a \\ A &= \overline{P_aH_b} \cdot \overline{OH_a'} = a' \cdot c' \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \overline{OH_b} \cdot \overline{P_aQ_a} = \frac{1}{2} a \\ A &= \overline{P_aH_b} \cdot \overline{OH_a'} = a' \cdot c' \end{aligned}} \right\} \Rightarrow a' \cdot c' = \frac{1}{2} a \Rightarrow a' = \frac{a}{2c'} \quad (2)$$

$\Delta H_a H_b O_a$ ist rechtwinklig:

$$\Rightarrow \left(\frac{a}{2}\right)^2 + (1-c)^2 = a^2 \quad (3)$$

Ersetzung von (1), (2) in (3):

$$\Rightarrow c' = \sqrt{\frac{c+1}{2}} \quad (4)$$

Mit dem TI-92 Plus bekommt man die Formel (4) durch folgende Rechensequenz (hier als Kommandozeilentext im Text Editor abgelegt):

```

F1 CommandView F2 F3 F4 F5
C: a^2=4*(1-c^2)→eq1
C: aa=a/(2*cc)→eq2
C: (a/2)^2+(1-c)^2=aa^2→eq3
C: eq3|eq1 and eq2→eq31
C: eq31|eq1→eq32
C: eq32|cc^2=s→eq33
C: solve(eq33,s)→eq34
C: √(eq34)|s=cc^2 and cc>0→eq4
:
    
```

Der letzte Bildschirm sieht wie folgt aus:

```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up F6
■ eq32 | cc^2 = s → eq33      2 - 2 · c =  $\frac{-(c^2 - 1)}{s}$ 
■ solve(eq33, s) → eq34      s =  $\frac{c + 1}{2}$ 
■ √eq34 | s = cc^2 and cc > 0 → eq4
                                cc =  $\frac{\sqrt{2} \cdot (c + 1)}{2}$ 
√(eq34)|s=cc^2 and cc>0→eq4
    
```

$\Delta O_p H_b \approx \Delta O_p A' O_a'$:

$$\Rightarrow \frac{b'}{1} = \frac{a'}{c'} \Rightarrow b' = \frac{a'}{c'} \quad (5)$$

Zusammenfassend hat man folgende Formeln:

$$c' = \sqrt{\frac{c+1}{2}} \quad (4) \quad a' = \frac{a}{2c'} \quad (2) \quad b' = \frac{a'}{c'} \quad (5)$$

2. Näherungswert für π

Die oben berechneten Formeln (4), (2) und (5) ermöglichen nun die Automatisierung des Übergangs vom 6-Eck zum 12-Eck und dann weiter zum 24-Eck u.s.w.

2.1 Rekursionsverfahren

ANFANGSBEDINGUNG:

Eingabe der Werte c, a, b des regulären 6-Ecks (siehe 1.1).

REKURSIONSSCHRITTE:

Gegeben: c, a, b, n

Iterieren	}	(4) → c'
		(2) → a'
		(5) → b'
		$2n \rightarrow n'$
Ersetzen: $a', b', c', n' \rightarrow a, b, c, n$		
Halbumfang des ein- und umbeschriebenen Vielecks:		
$\begin{cases} p_a = \frac{n}{2} x_a \\ p_b = \frac{n}{2} x_b \end{cases}$		

Anwendung des TI-92 Plus

Eingabe der Anfangswerte:

```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up F6
■ 1 → a      1
■  $\frac{2}{\sqrt{3}}$  → b       $\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3}$ 
■  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  → c       $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 
■ 6 → n      6
6 → n
    
```

Programmierung der Rekursionsschritte (ebenfalls mit Kommandozeilen im Text Editor):

```

F1 CommandView F2 F3 F4 F5
C: √((c+1)/2)→cc
C: a/(2*cc)→aa
C: aa/cc→bb
C: 2*n→nn
C: aa+a:bb→b:cc→c:nn→n
C: n/2*a→pa
C: n/2*b→pb
C: [n;pa;pb]
    
```

Erster Rekursionsschritt:

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgMIO	Clean Up	
$\frac{n}{2} \cdot a \rightarrow pa$				$3 \cdot (\sqrt{3} - 1) \cdot \sqrt{2}$	
$\frac{n}{2} \cdot b \rightarrow pb$				$-12 \cdot (\sqrt{3} - 2)$	
$\begin{bmatrix} n \\ pa \\ pb \end{bmatrix}$				$\begin{bmatrix} 12 \\ 3 \cdot (\sqrt{3} - 1) \cdot \sqrt{2} \\ -12 \cdot (\sqrt{3} - 2) \end{bmatrix}$	
[n;pa;pb]					
AAARESP4F RAD AUTO FUNC 12/30					

... und der dritte Rekursionsschritt:

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgMIO	Clean Up	
48					
				$24 \cdot (\sqrt{3} - 1)$	
				$(\sqrt{6} + \sqrt{2} + 4)^{1/4} \cdot \sqrt{2 \cdot \sqrt{6} + \sqrt{2} + 4} + \sqrt{3} + 2 \cdot \sqrt{2}$	
				$48 \cdot (\sqrt{3} - 1) \cdot \sqrt{2}$	
				$(\sqrt{6} + \sqrt{2} + 4)^{1/4} \cdot \sqrt{(\sqrt{6} + \sqrt{2} + 4)^{3/2} + 8 \cdot \sqrt{6} + \sqrt{2}}$	
[n;pa;pb]					
AAARESP4F RAD AUTO FUNC 24/30					

Hier sieht man, wie die symbolischen Ausdrücke schon sehr früh kompliziert werden. Schneller geht die Berechnung im „approximate mode“. Speichert man die jeweiligen Ergebnisvektoren als p12, p24, p48 ... ab, kann man sie mit Hilfe der „augment“ Funktion zu einer großen Ergebnismatrix

zusammenfassen. Dabei ist gut zu sehen, wie der Wert für p eingekapselt wird:

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgMIO	Clean Up	
24.		3.13262861328		3.1396599421	
48.		3.13935020305		3.14608621513	
96.		3.14103195089		3.14271459965	
192.		3.14145247229		3.14187304998	
384.		3.14155760791		3.14166274706	
768.		3.14158389215		3.1416101766	
1536.		3.14159046323		3.14159703432	
augment(p24;augment(p48;augme...					
AAARESP4F RAD APPROX FUNC 30/30					

Im Vergleich zu modernen Methoden ist die Konvergenz ziemlich schlecht. Zur Zeit von Archimedes waren jedoch symbolisches Rechnen, Dezimalzahlen und vor allem elektronische Rechner unbekannt: Man musste mit einer noch sehr groben Bruchzahldarstellung arbeiten.


Man kann sich die Freude des Archimedes kaum vorstellen, wenn er einen TI-92 Plus als Weihnachtsgeschenk bekommen hätte!

Autor:

Diego Colosio
Liceo 1
CH-6900 Lugano, Schweiz
colosio@bluewin.ch

Dynamisch Geometrie entdecken mit elektronischen Arbeitsblättern

Hans-Jürgen Elschenbroich – Günter Seebach

 Dieser Beitrag ist die gekürzte Fassung eines umfangreicheren Artikels, der die aufgezeigten Intentionen mit weiteren Beispielen illustriert. Die vollständige Fassung kann auf der TI-Materialien Seite (<http://education.ti.com/deutschland/>, ►Lehrerwelt, ►Unterrichtsmaterialien) in der Rubrik Cabri/Abhandlungen eingesehen und zusammen mit einigen Cabri-Arbeitsblättern heruntergeladen werden.

In den neunziger Jahren wurde Dynamische Geometrie-Software (DGS) entwickelt, Wegbereiter war Cabri Géomètre. Es gab nicht nur inhaltliche Impulse, noch bedeutsamer waren die methodischen Auswirkungen, die eine starke Betonung des Visuellen und Experimentellen ergaben.

Zwar waren die Auswirkungen auf die Konzeption von Inhalt und Methodik eines computergestützten Geometrieunterrichts groß, aber es waren erst vereinzelt stattfindende Aktivitäten. Zu einer Breitenwirkung fehlt auch heute noch vieles.

Einige Gründe dafür:

- Der organisatorische Aufwand ist groß.
- Das Unterrichten mit DGS hat Tücken: Kleine Fehler können unerwünschte Auswirkungen haben, die bis zur Unbrauchbarkeit einer Konstruktion führen.
- Das Konstruieren geometrischer Figuren mit einem DGS erweist sich als eine spezielle Form des Programmierens.
- Neben den Tücken und Risiken bei der Durchführung ist der zeitliche Mehraufwand in der Vorbereitung für den Lehrer beim erstmaligen Einsatz beträchtlich.

Hier setzen die elektronischen Arbeitsblätter an.

- Weg vom Programmieren als Konstruieren **von** Figuren,
- hin zum Arbeiten **mit** geometrischen Figuren, zum Deuten von Ortslinien, zum Aufstellen und Überprüfen von Vermutungen, zum Entdecken von Eigenschaften.

Elektronische Arbeitsblätter mit ihren vorbereiteten Konstruktionen verstehen wir als eine mediale Brücke zwischen der Welt der Mathematik (den Sätzen der Geometrie) und der Welt der DGS (mit ihren Konstruktionsbefehlen, Zugmodus, Ortslinien). Im Folgenden soll ein Beispiel¹ eines derartigen Arbeitsblatts vorgestellt werden.

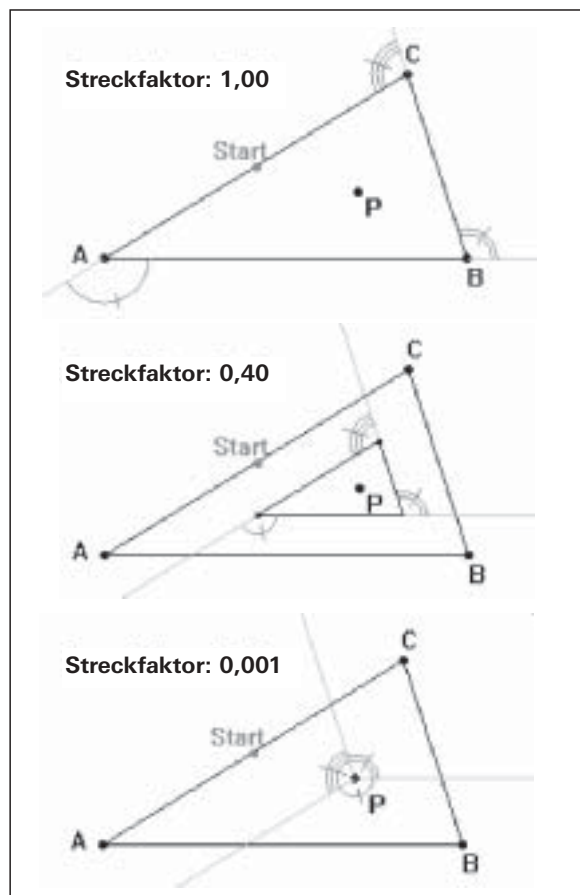
Außenwinkelsumme am Dreieck

Hier wird ein Dreieck sukzessive ‚geschrumpft‘, wobei die Winkel wegen paralleler Linien gleich bleiben, bis es (fast) zu einem Punkt wird und die Außenwinkel sich zu einem Vollkreis ergänzen.

Stelle dir vor, du wanderst von Start nach A, drehst dich in Richtung B und gehst nach B, drehst dich in Richtung C und gehst nach C, drehst dich in Richtung A und gehst bis Start.

Um welchen Winkel hast du dich insgesamt gedreht? Verändere nun den Streckfaktor (durch Doppelklick auf die Zahl).

Wieso kannst du deine Vermutung damit begründen?



¹ Aus: Elschenbroich/Seebach: Dynamisch Geometrie entdecken. Klasse 7, 8, 9. CoTec 2002. Der ungekürzte Artikel im Internet enthält weitere Beispiele.

Schüler-Rolle & Lehrer-Rolle

Die Rolle des Schülers wandelt sich durch den Einsatz neuer Medien. Wurde früher der Schüler eher belehrt, so lernt er heute zunehmend selbst aktiv. Die Betonung des Visuellen und die Aufforderung zum experimentellen Arbeiten geben nicht nur dem Geometrieunterricht eine andere Note, sondern ermöglichen in verstärktem Maße selbstständiges Lernen. Zur Ergebnissicherung ist das Zusammenfassen und Auswerten der Beobachtungen von Beginn an unerlässlich.

Der Lehrer ist nicht mehr zentraler Wissensvermittler, sondern wichtiger denn je als Organisator und Moderator für Schüleraktivitäten. Nach dem derzeitigen Stand der Lernpsychologie baut sich jeder Schüler auf seinen Vorerfahrungen sein eigenes Wissen auf. Besteht schon im klassischen lehrerzentrierten Unterricht die Gefahr eines Flickenteppichs unterschiedlichen Wissens, so ist es bei derartigen elektronischen Arbeitsblättern, die auf ein hohes Maß an Eigenständigkeit der Schüler abzielen, noch viel ausgeprägter möglich, dass isolierte Wissens-Inseln produziert werden. Auch muss der Lehrer darauf gefasst sein, dass die Schüler gar nicht die von ihm gewünschten Vorstellungen entwickeln oder auf anderen Wegen lernen als er es erwartet hat.

Die neue Rolle des Lehrers wird deshalb darin bestehen, die einzeln aufgebauten subjektiven Erfahrungen und Deutungen der Schüler zu sammeln, ggfs zu korrigieren, zu organisieren und zu vernetzen und eine gemeinsame Wissensbasis für zukünftiges Arbeiten herzustellen.

Ebenfalls wird ein anderer Umgang mit Fehlern erforderlich. „Falsche“ Vermutungen kommen beim visuellen und experimentellen Arbeiten häufig vor, sind aber nicht als Fehler zu werten, sondern als wichtige Stufen im Erkenntnisprozess. Dafür ist wesentlich, dass die Schüler in einem Lernklima arbeiten, das zum Vermuten und Ausprobieren ermutigt und dass der Lehrer Phasen der Erarbeitung neuen Wissens von Phasen der Leistungsüberprüfung für Schüler deutlich trennt.

Der Mathematikunterricht erhält durch den Computer eine stärkere sprachliche Akzentuierung, weil die Schüler das Wahrgenommene sprachlich formulieren müssen. Der Computer macht somit den Mathematikunterricht nicht sprachloser, sondern schafft gerade Raum für eine Kommunikation!

Visuell-dynamisches Beweisen

Beim Einsatz von DGS geht es nicht darum, auf einer experimentellen Stufe des Wissenserwerbs stehen zu bleiben, sondern stets die Frage zu stellen „Warum muss das so sein“. Die Möglichkeiten des Zugmodus des DGS gehen durch die Macht der Dynamik weit über die Möglichkeiten der Visualisierung einer einzelnen Zeichnung hinaus. In der Folge der Bilder, die im Zugmodus erzeugt werden, kann ein Beweis als eine Geschichte in Bildern erzählt werden. Dieses präformale, aber vollgültige Beweisen ist auch *visuell-dynamisches Beweisen* genannt worden.

Das Untersuchen von beweglichen Figuren ist ein alter Ansatz in der Geometrie, der in Gedanken („Wir stellen uns vor, der Punkt bewegt sich ...“), in Folgen von einzelnen Zeichnungen erfolgte, später in Trickfilmen umgesetzt wurde und der jetzt mit DGS eine neue Qualität erhält. Zum einen ermöglicht DGS (fast) spielerisch leicht Zeichnungen stetig zu variieren. Zum anderen ist DGS ein interaktives Medium: Schüler werden im Unterschied zu Trickfilmen, Videos und Multimedia-Animationen geradezu herausfordert, eigentätig zu werden; sie werden zu Vermutungen angeregt und können diese selbstgesteuert überprüfen. Jeder Schüler kann gemäß den eigenen Lernfortschritten auch Veränderungen rückgängig machen und neu ansetzen oder auch Prozesse wiederholen.

Literatur:

Elschenbroich, Hans-Jürgen/Seebach, Günter:
Dynamisch Geometrie entdecken. Elektronische Arbeitsblätter mit Cabri II, Klasse 7, 8, 9. CoTec, Rosenheim 2002.
www.dynamische-geometrie.de

Elschenbroich, Hans-Jürgen/ Seebach, Günter:
Dynamisch Geometrie entdecken mit elektronischen Arbeitsblättern. Tagungsband der T3-Pfingsttagung 2001 Neues Lernen – Neue Medien – Neuer Blick auf Standardthemen. ZKL-Texte, Münster 2002.

Elschenbroich, Hans-Jürgen:
Neue Ansätze im Geometrieunterricht der S I durch elektronische Arbeitsblätter. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2000.

Elschenbroich, Hans-Jürgen:
Visuell-dynamisches Beweisen. In: mathematik lehren 110.

Autoren :

Hans-Jürgen Elschenbroich, Kirchstraße 26,
D-41352 Korschenbroich, elschenbroich@t-online.de

Günter Seebach, Im alten Garten 13, D-53773 Hennef,
guenter.seebach@t-online.de

Modellbildung – schon zu Beginn des des Analysis-Unterrichts

Angela Fässler



An der FHS, Hochschule für Technik, Wirtschaft und Soziale Arbeit St. Gallen wird im Bereich Technik seit einiger Zeit im Mathematik-Unterricht der TI-89 intensiv genutzt. Dies deshalb, weil es gerade für angehende Ingenieure wichtig ist zu sehen, wie sehr die zu lernenden mathematischen Werkzeuge für die Modellierung realer Situationen gebraucht werden.

Didaktische Überlegungen

Der Aufbau des Analysis-Unterrichts erfolgt an der FHS nach den Black Box/White Box-Prinzip (vgl. [1]) folgendermaßen:

Die Studienanfänger werden zunächst mit realen Problemstellungen konfrontiert, die in erster Linie auf den Begriff der Änderungsrate ausgerichtet sind, aber gleichzeitig auch schon auf Differentialgleichungen und auf das Thema Regression hinsteuern. Diese Begriffe werden inhaltlich erarbeitet, die Notation definiert und die zugehörige Bedienung des TI-89 erklärt. Damit können die betrachteten Probleme gelöst werden. Anschließend folgt – sozusagen als Essenz aus den Beispielen – die präzise mathematische Definition der genannten Begriffe.

Auf diese Weise gelingt es, im ersten Semester (17 Wochen mit je 4 Lektionen Analysis) alle wichtigen mathematischen Begriffe, die in der Physik gebraucht werden, bereit zu stellen. Die Studierenden können einfache Rechnungen von Hand erledigen, sind aber mehrheitlich auf das CAS angewiesen. Anschließend folgt dann die vertiefte Behandlung des Stoffes

so, dass zu Beginn des dritten Semesters dieselben Problemstellungen wie zu Beginn (und natürlich komplexere) nochmals angegangen werden können – jetzt aber mit einem vom CAS unabhängigen Lösungsweg.

Beispiele aus dem Analysis-Unterricht der FHS

Aus der siebten Woche des ersten Semesters:

Beispiel 0.1 In den Hausaufgaben zum ersten Kapitel haben Sie gelernt, dass eine Weg-Zeitfunktion gilt: Die momentane Änderungsrate gibt gerade die Momentangeschwindigkeit $v(t)$ an. Aus der Homepage des Autors von [2] stammen die folgenden Angaben:

Richard Zimmer, Canyon del Oro High School, Tuscon, AZ. shot a 120 grain hollow point bullet from a 300 Winchester Magnum rifle. He measured the velocity in ft/sec (second row) as a function of distance travelled in ft (first row).

0	300	600	900	1200	1500
3290	2951	2636	2342	2068	1813

Jemand behauptet nun, dass die Geschwindigkeitsänderung proportional zur Geschwindigkeit sei: $v'(t) = a \cdot v(t)$. Wir überprüfen diese Aussage auf Plausibilität: Mit dem CAS bestimme man $v(t)$, daraus $s(t)$ als unbestimmtes Integral und vergleiche dann das Modell mit den gegebenen Daten.

Lösung

Wenn die Behauptung richtig wäre, müsste gelten:

$$v'(t) = a \cdot v(t) \Rightarrow v(t) = C_1 \cdot e^{a \cdot t}$$

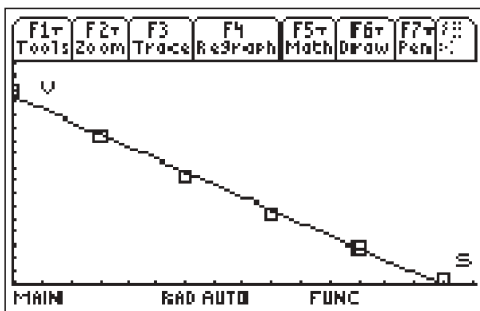
$$\Rightarrow s(t) = \int C_1 \cdot e^{a \cdot t} dt = \frac{C_1 \cdot e^{a \cdot t}}{a} + C_2 = \frac{v(t)}{a} + C_2$$

$$\Rightarrow v(s) = (s - C_2) \cdot a$$

v(s) müsste also eine lineare Funktion sein. Führen wir deshalb als Test eine lineare Regression für die gegebenen Messpunkte durch:

$$TI-89 \Rightarrow v = -0.983619 \cdot s + 3254.38$$

Damit erhält man in der folgenden Graphik in einem sv-Koordinatensystem die Datenpunkte und die Regressionsgerade:



Aus der ersten Woche des zweiten Semesters:

Beispiel 0.2 Es soll ein vereinfachtes Modell für den Landeanflug eines Linienflugzeuges entwickelt werden (alle Angaben aus [3]).

Annahmen:

1. Der Zielflughafen liegt in einer großen Ebene und es sei windstill. Die Anflugrichtung des ankommenden Flugzeuges sei gerade so, dass nur die Höhe zu verringern ist, also keine Seitwärtsbewegungen mehr durchzuführen sind.
2. Die Flughöhe zum Zeitpunkt, in dem der Landeanflug eingeleitet wird, betrage H, und das Flugzeug sei dann in einer Distanz L vom Aufsetzpunkt entfernt. (Der Landeanflug erfolgt aus der Horizontalen.)
3. Vom Piloten wird verlangt, dass er während des gesamten Landeanfluges eine konstante Horizontalgeschwindigkeit v beibehält.
4. Der Absolutbetrag der vertikalen Beschleunigung darf eine gewisse Konstante k nicht übersteigen (k muss sehr viel kleiner als die Erdbeschleunigung sein, damit den Passagieren noch wohl ist).

Aufgabe

- a) Zeichnen Sie nach Augenmaß eine Kurve im xz-Koordinatensystem, welche Ihren Vorstellungen eines Landeanflugs entspricht. Bestimmen Sie eine möglichst einfache Funktion z(x), die mit diesen Vorstellungen übereinstimmt und die gegebenen Parameter enthält.
- b) Bestimmen Sie nun die Weg-Zeit-Funktion x(t) und z(t) sowie den Absolutbetrag von z̈(t).
- c) Wir nehmen an, eine Airline entschließt sich, die vertikale Beschleunigung auf maximal k = 550 Nmi/h² zu beschränken (in der Luftfahrt wird mit „nautischen Meilen“ Nmi gearbeitet). Die Reisehöhe sei 35000 ft und die Geschwindigkeit 460 Nmi/h². In welcher Entfernung zum Flughafen muss der Pilot den Landeanflug einleiten?

Lösung

Die Studierenden stellen schnell fest, dass die Annahme über die konstante Horizontalgeschwindigkeit unrealistisch ist und in einem nächsten Schritt eine Verbesserung des Modells hier anzusetzen hätte.

- a) Mit einer Handskizze erkennt man, dass z(0) = 0, z(L) = H, z'(0) = 0 und z'(L) = 0 eine Beschreibung unserer Vorstellung ist. Als einfache Funktion, die vier Parameter zur freien Bestimmung offen lässt, wird z(x) = a · x³ + b · x² + c · x + d gewählt.

$$\text{CAS} \Rightarrow a = \frac{-2H}{L^3}, b = \frac{3H}{L^2}, c = 0 \text{ und } d = 0$$

$$\text{Es ist also } z(x) = \frac{-2H}{L^3} \cdot x^3 + \frac{3H}{L^2} \cdot x^2$$

- b) Die Annahme über die konstante Horizontalgeschwindigkeit liefert:

$$\dot{z}(t) = -v \Rightarrow x(t) = -v \cdot t + C, \text{ wobei aus } x(0) = L \text{ folgt, dass } C = L \text{ sein muss.}$$

Damit wird aber

$$z(t) = \frac{-2H}{L^3} \cdot (-v \cdot t + L)^3 + \frac{3H}{L^2} \cdot (-v \cdot t + L)^2$$

$$\text{CAS} \Rightarrow z(t) = \frac{H \cdot (t \cdot v - L)^2 \cdot (2 \cdot t \cdot v + L)}{L^3}$$

$$\text{CAS} \Rightarrow \ddot{z}(t) = \frac{6 \cdot H \cdot v^2 \cdot (2 \cdot t \cdot v - L)}{L^3}$$

z̈(t) ist eine lineare Funktion in t! Das betragliche Maximum wird also am Rand des Definitionsbereichs [0, t₀] angenommen, wobei t₀ der Zeitpunkt des Aufsetzens des Flugzeugs auf dem Boden sei.

$$\text{Berechnung von } t_0: x(t_0) = 0 \Rightarrow t_0 = \frac{L}{v}$$

$$\ddot{z}(0) = \frac{-6 \cdot H \cdot v^2}{L^2} \text{ und } \ddot{z}(t_0) = \ddot{z}\left(\frac{L}{v}\right) \Rightarrow \frac{6 \cdot H \cdot v^2}{L^2}$$

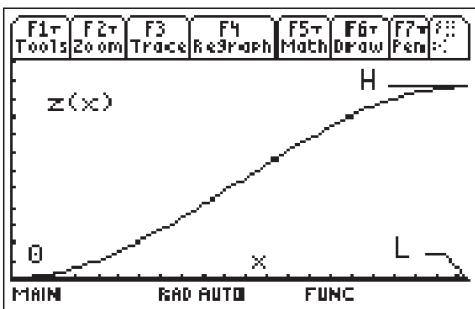
Der Absolutbetrag der vertikalen Beschleunigung ist

$$\text{also } \frac{6 \cdot h \cdot v^2}{L^2}.$$

c) Um den erlaubten Maximalwert von $k = 500 \text{ Nmi/h}^2$ voll

auszuschöpfen setzen wir $\frac{6 \cdot H \cdot v^2}{L^2} = k$ und erhalten daraus

– unter Verwendung der Umrechnungsfähigkeiten des TI-89 bei den Maßeinheiten – $L \approx 115.3 \text{ Nmi} \approx 213 \text{ km}$. Dies ist, nach Angabe eines Piloten, eine recht gute Näherung für Verkehrsflugzeuge der Größenordnung MD-11.



Persönliche Schlussbemerkung

Aus den Rückmeldungen der Studierenden zu dieser Art Unterricht weiß ich, dass sie ihn als sehr anspruchsvoll, aber auch als ausgesprochen interessant einstufen. Nie vorher habe ich so häufig ein spontanes „cool!“ gehört, wie seit ich diesen Weg gehe.

Literatur:

- [1] Helmut Heugl u. a. – Mathematikunterricht mit Computer-algebra-Systemen, Addison Wesley 1996
- [2] David Lomen, David Lovelock – Differential Equations: Graphics Models Data, Wiley 1999
(vgl. auch: www.math.arizona.edu/~dsl/book.htm)
- [3] James Stewart – Calculus, Concepts and Contexts Books/Cole Publishing Company 1998

Autorin:

Angela Fässler
angela.faessler@fhsg.ch

Ein erster Kontakt mit dem neuen Voyage 200

Wolfgang Pröpper



Die Gerüchte gingen schon länger um, aber auf der MNU-Hauptversammlung 2002 in Hannover war er dann erstmals zu sehen und anzufassen: Der neue CAS-Rechner von Texas Instruments mit dem neuen Namen Voyage 200. Damit wird von der bis in die 70er Jahre des vergangenen Jahrhundert zurückreichenden Tradition abgegangen, Taschenrechner aus dem Hause Texas Instruments mit „TI-“ und einer angehängten Ordnungsnummer zu benennen. Ob man nun „Voyage“ englisch oder französisch ausspricht, ist ziemlich gleichgültig. Wichtig ist, dass sich etwas Neues getan hat und Möglichkeiten für weitere Neuerungen eröffnet wurden. Zum Erscheinungstermin dieses Heftes der TI-Nachrichten wird die endgültige Freigabe und Markteinführung erfolgt sein.

Das äußere Erscheinungsbild hat sich gewandelt. Die Abmessungen des Voyage 200 sind 18,5 cm x 12 cm bei einer maximalen Dicke von 3 cm und einem Gewicht von 400 g. (Zum Vergleich beim TI-92: 22 cm x 13 cm x 4 cm bei 600 g.) Unverändert geblieben sind

- das Display (mit nach wie vor 240 x 128 Pixel, was sicher aus Kompatibilitätsgründen wichtig ist) und
- der überwiegende Teil der Tastatur. Einzig die bisher links liegenden Funktionstasten wurden nun in einer Reihe unterhalb des Displays platziert. Dies erfordert eine kleine Umgewöhnung in der Bedienung, die man aber schnell verinnerlicht hat. Auch die in 8 Richtungen kippbare

Cursortaste wurde durch 4 Einzeltasten ersetzt. Diagonale Bewegungen sind dennoch möglich. Man muß nur zwei Cursortasten gleichzeitig drücken.



Abb. 1

Die erste wirkliche Überraschung zeigt sich, wenn man den Rechner einschaltet. Man landet nicht mehr im gewohnten Hauptbildschirm, sondern hat eine graphische Benutzeroberfläche mit vielen Icons vor sich (davon 12 sichtbar, die anderen werden durch Scrollen mit den Cursortasten erreicht).

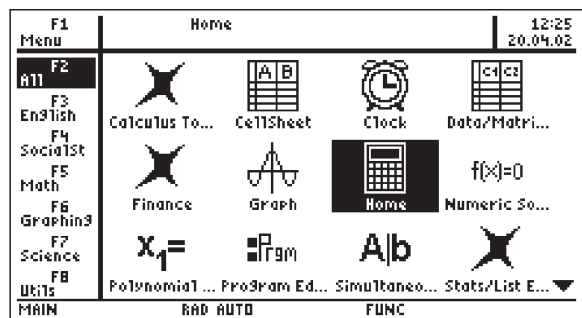


Abb. 2

Es gehört nicht viel Phantasie dazu, zu vermuten, dass man mit einem **[ENTER]** genau die Applikation öffnen wird, die eben markiert ist. So würde ein **[ENTER]** aus der in Abb. 2 gezeigten Situation in den Hauptbildschirm führen, von wo aus sich der Voyage 200 vollkommen identisch verhält, wie der gewohnte TI-92 (mit oder ohne Plus). D.h. **[Y=]** Editor, **[WINDOW]** Editor oder **[GRAPH]** Bildschirm werden vom Home Screen aus mit **[W]**, **[E]** oder **[R]** erreicht, wie bisher. Einzig die **[APPS]** Taste hat nun eine andere Funktion: Wenn man sie aus irgendeiner Applikation heraus betätigt, landet man wieder in der Benutzeroberfläche.

Bei genauem Hinsehen sieht man in der rechten oberen Ecke Uhrzeit und Datum eingeblendet. Dazu wird sicher das Icon „Clock“ passen, eine simple Applikation zum Einstellen der Uhr. Aber ebenso denkbar ist, dass mit Uhr und Datum auch ein funktionstüchtiger Organizer betrieben werden kann.

Bleiben noch die am linken Rand sichtbaren Einträge. Mit ihnen kann man das Erscheinungsbild der Benutzeroberfläche für spezielle Aufgabengebiete anpassen. Die Vorgaben wie English, Math, Graphing, etc. können individuell umbenannt werden. Die dahinter stehende Philosophie ist die Idee des Personal Learning Tool (PLT), mit dem der Voyage 200 zu einem individuellen Lernwerkzeug ausgebaut werden soll. Der Anwender (Schüler) soll sich also Oberflächen für einzelne Lerngebiete oder Fächer wie Fremdsprachen, Gesellschaftkunde, Mathematik etc. einrichten können. Wie das aussehen kann, zeigt Abb. 3, die natürlich noch insofern unvollständig ist, als spezielle Applikationen für andere Fächer derzeit noch nicht verfügbar sind.

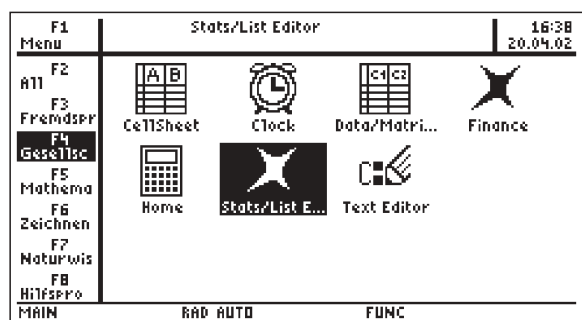


Abb. 3

Hier wird sich in näherer Zukunft sicher einiges tun: Man kann sich neben dem Text Editor eine echte Textverarbeitung vorstellen, die Texte zum direkten Weiterverarbeiten auf dem PC sichern lässt. Ebenso sind fremdsprachige Wörterbücher, Landkarten oder Sammlungen mit geographischen Daten,

die in der Tabellenkalkulation weiter verwendet werden können, denkbar.

Eine erste, von den mathematischen Werkzeugen abweichende Applikation, ist der StudyCards Viewer. Er erlaubt es, virtuelle Karteikarten zu beliebigen Themen, die auf ihrer Vorderseite Fragen, auf der Rückseite Antworten tragen, durchzuarbeiten und nach unterschiedlichen Kriterien auszuwerten. Die Kartenstapel werden mit einer eigenen, von Texas Instruments kostenlos bereitgestellten Software am PC erzeugt und von dort auf den Voyage 200 geladen. Die Fragen können in multiple choice Form gestellt sein, wobei der Rechner die Antwortkontrolle übernehmen kann, oder auch in freier Form, wo der Lernende seine Antwort mit einer vorgegebenen Antwort vergleichen und eventuell bewerten muß.

Ein Blick auf die Liste der bei Auslieferung standardmäßig installierten Applikationen zeigt ein deutliches Mehr gegenüber dem TI-92 Plus. Zwei Geometrie Systeme (Cabri Geometre und Geometer's Sketchpad), die Tabellenkalkulation Cellsheet, der Student Math Guide zu Einüben mathematischer Kalküle und, und, und ...

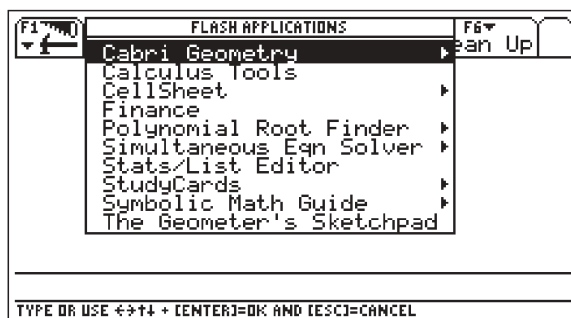


Abb. 4

Ein wesentlicher Grund, weshalb alle diese Erweiterungen denkbar erscheinen und machbar sind, ist der gegenüber den Vorgängern (TI-92) wesentlich erweiterte Speicher. Das normale RAM, in dem das System und der zum Arbeiten verfügbare Speicher liegen ist bei 256 kB geblieben. Aber das Flash ROM, das für Archivierung und Flash Applikationen zuständig ist, ist von 702 kB sogar auf 2,7 MB angewachsen. Und dennoch bleibt viel Platz im Flash ROM frei.

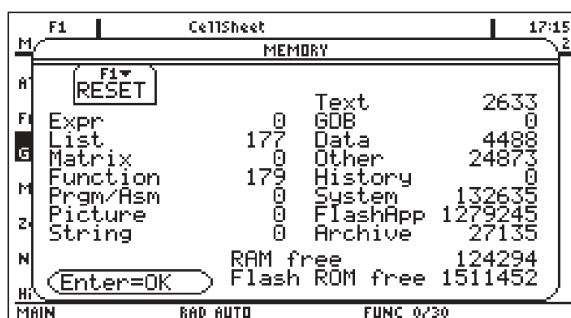


Abb. 5

Somit bleibt als Letztes die Frage nach dem Betriebssystem. Im About-Fenster des getesteten Geräts weist es sich als ein AMS 2.07 aus, ist also numerisch nicht weit entfernt vom derzeit aktuellen AMS 2.05 für den TI-92 Plus. Und mit Ausnahme des

erweiterten Speichers soll es auf jedem TI-92 Plus laufen (allerdings erfordert die Zeit- und Datumsanzeige mindestens die Hardware Version 2.00).

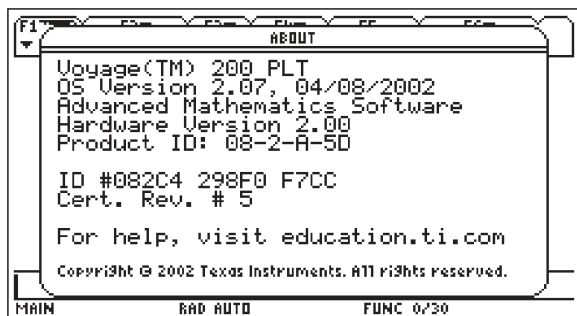


Abb. 6

Für den Lehrer stellt sich natürlich die Frage „und was wird mit unseren bisherigen TI-92 Plus, die wir erst vor einem Jahr angeschafft haben?“

Die Antwort ist einfach. Das neue Betriebssystem soll auch für den TI-92 Plus verfügbar werden. Dann lassen sich der TI-92 Plus und der Voyage 200 völlig unproblematisch nebeneinander verwenden. Entweder versieht man den TI-92 Plus mit dem neuen Betriebssystem. Dann weist er die gleiche Oberfläche auf, wie oben beschrieben. Oder man nutzt die Möglichkeit,

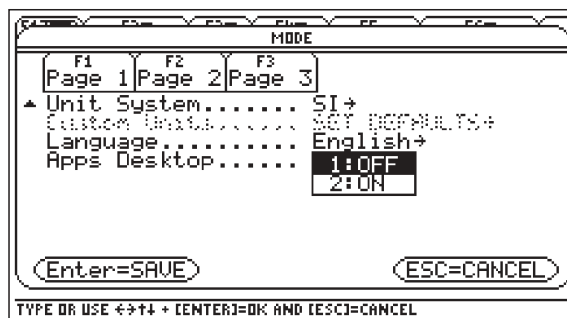


Abb. 7

beim Voyage 200 die graphische Benutzeroberfläche auszuschalten. Dies geht über eine zusätzliche Option auf der Seite 3 des Mode Menüs. Man kann nämlich das „Apps Desktop“ dauerhaft ausschalten. Und dann verhält sich der Voyage 200 genauso wie man es vom TI-92 Plus her gewöhnt ist: Beim Einschalten kommt man in den Hauptbildschirm des CAS und ein Druck auf die [APPS] Taste öffnet das bekannte Auswahlm Menü.

Autor:

Wolfgang Pröpper, Josef-Simon-Str. 59, D-90473 Nürnberg,
w.proepper@wpro.franken.de

Hüllkurven in Klasse 9

Hartmut Müller-Sommer



Einführung

Viele Leser werden sich fragen: „Hüllkurven in Klasse 9, geht das überhaupt?“ Die Antwort lautet: „Ja, mit einem CAS-Rechner!“

Der folgende Beitrag beschreibt einen entsprechenden Unterrichtsgang mit dem TI-92 Plus und zeigt, wie im Rahmen des Themenbereichs „Quadratische Funktionen und Gleichungen“ in Klasse 9 ein sinnvoller Rechneinsatz einen schüler- und problemorientierten Zugang zum Thema „Hüllkurven“ eröffnen kann.

Dabei ergeben sich Möglichkeiten für experimentelles, hypothesenbildendes und -überprüfendes Arbeiten. Beim Experimentieren können die Schülerinnen und Schüler sowohl auf die graphischen als auch auf die algebraischen Fähigkeiten des Rechners zurückgreifen und verschiedenartige Wege zur Bestimmung der Hüllkurvengleichung entdecken.

Beschreibung der Unterrichtsreihe

Ausgangspunkt der Unterrichtsreihe ist die Kurvenschar mit der Gleichung

$$f_t(x) = (x-t)^2 + 0,5t^2.$$

Die Klasse erhält den folgenden Arbeitsauftrag:
Stelle die Kurven der Schar mit dem TI-92 Plus graphisch dar. Wähle die Parameterwerte von $t = -2,5$ bis $t = 2,5$ bei einer Schrittweite von $0,5$.

Die Schülerinnen und Schüler entdecken schnell, dass durch diese einfache Parabelschar auf ganz neuartige Weise eine Kurve erzeugt wird: Alle Parabeln der Schar liegen oberhalb einer „Hüllkurve“, die die gegebene Kurvenschar von unten her „einhüllt“. Diese Kurve ist ebenfalls von parabelförmiger Gestalt und geht durch den Ursprung (Abb. 1).

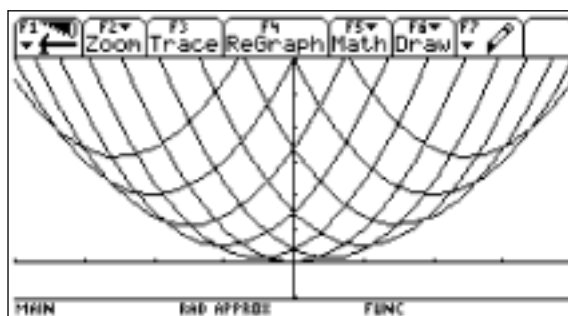


Abb. 1

(Der Zeichenbereich geht von -4 bis 4 in x - und von -1 bis 6 in y -Richtung. Wichtig: Die x -Auflösung ist 10 , um den Plot schnell zu bekommen.)

In einer ersten Ergebnispräsentation zeichnen wir auf einer Folie, die passend auf dem Display-Fenster liegt, die entdeckte Hüllkurve mit einem roten Folienstift nach. (Eventuell kann der Lehrer eine noch „schönere“ Schar mit $t \in \{-3,4; \dots; 3,4\}$ und $\Delta t = 0,2$ vorbereiten, als PIC-Variable speichern und schnell im Unterricht projizieren.)

Wir löschen die Kurvenschar und lassen noch einmal einige Scharparabeln in diese gezeichnete Hüllkurve „hineinregnen“ (Abb. 2).

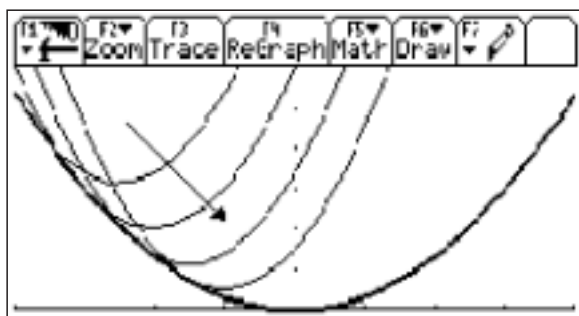


Abb. 2

Diese Darstellung führt auf eine erste Charakterisierung der Hüllkurve:

Jede Scharparabel berührt die Hüllkurve in genau einem Punkt. Die Schülerinnen und Schüler stellen nun selber die Frage nach der Gleichung der Hüllkurve. Die gesuchte Hüllkurve ist vermutlich eine Parabel mit der Gleichung $h(x) = k \cdot x^2$ ($k \in \mathbb{R}$). In der sich anschließenden Partnerarbeitsphase sollen sie durch experimentelle Untersuchungen zur Hüllkurvengleichung gelangen. Wie sie experimentieren bleibt ihnen überlassen. Erste *graphische Experimente* können bereits zur Vermutung

$k = \frac{1}{3}$ führen (Abb. 3).

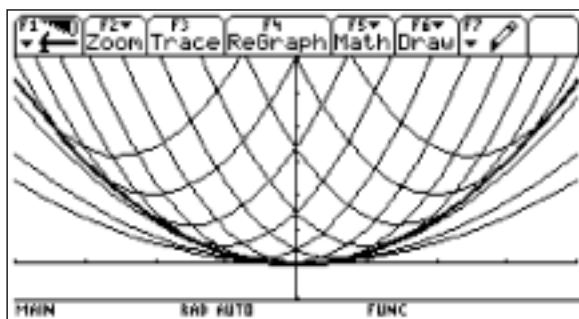


Abb. 3

Die Gleichungen der hier dargestellten Graphen lauten (von unten nach oben):

$$h_1(x) = 0,15x^2, h_2(x) = 0,2x^2, h_3(x) = 0,3x^2 \text{ und } h_4(x) = \frac{1}{3}x^2.$$

Die Schülerinnen und Schüler können aber auch von Anfang an CAS-Experimente durchführen und beispielsweise Schritt für Schritt die Lösungen der Gleichungen

$$f_t(x) = 0,3 \cdot x^2, f_t(x) = 0,4 \cdot x^2, f_t(x) = 0,5 \cdot x^2, \dots, f_t(x) = \frac{1}{3} \cdot x^2$$

untersuchen. Die erste Charakterisierung der Hüllkurve zeigte uns ja:

Diejenige Parabel ist die gesuchte Hüllkurve, bei der es genau eine „Schnittstelle“ gibt!

Die Protokolle der CAS-Experimente belegen (Abb. 4), dass der Rechner für die erste der oben angegebenen Gleichungen keine und für die beiden nächsten Gleichungen jeweils zwei verschiedene Lösungen angibt.

Nur die Gleichung $f_t(x) = \frac{1}{3} \cdot x^2$ liefert für jedes $t \in \mathbb{R}$ *genau* eine Lösung: $x = x(t) = \frac{3}{2}t$.

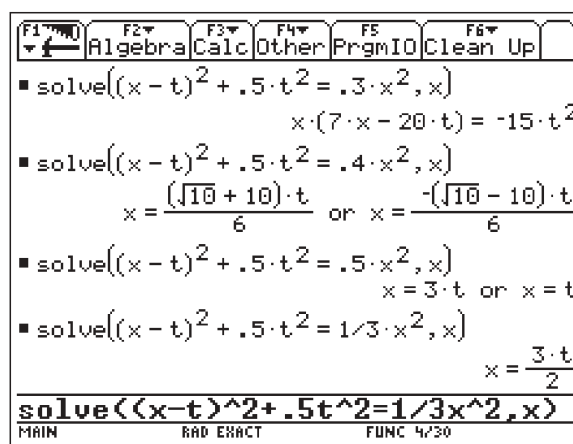


Abb. 4

Diese Ergebnisse sind nun sorgfältig zu interpretieren. Insbesondere muss herausgearbeitet werden, dass es sich bei $x = \frac{3}{2}t$ tatsächlich um eine *Berührstelle* handelt:

Würde eine Scharparabel die Parabel mit der Gleichung $h(x) = \frac{1}{3} \cdot x^2$ an dieser Stelle *schneiden*, so gäbe es aufgrund der geringeren Öffnungsweite der Scharparabeln noch eine zweite „Schnittstelle“! Jede Scharparabel mit dem Parameter t *berührt* also den Graphen von h an genau einer Stelle, nämlich bei $x = \frac{3}{2}t$.

Beispielsweise gehört zum Parameter $t = 1$ die Berührstelle $x = \frac{3}{2}$ (Abb. 5).

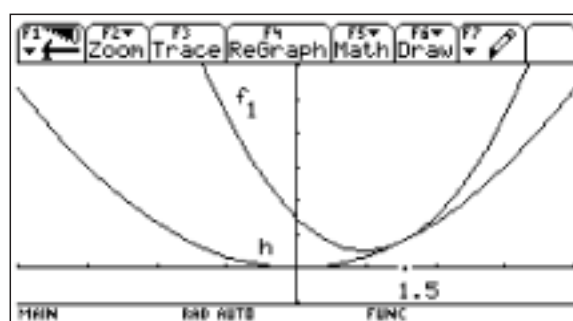


Abb. 5

Damit haben wir nachgewiesen, dass $h(x) = \frac{1}{3} \cdot x^2$ die gesuchte Hüllkurvengleichung ist. Einige Schülerinnen und Schüler werden sofort die Lösung der Gleichung $f_t(x) = k \cdot x^2$ untersuchen. Der Befehl „solve((x-t)^2 + 0.5t^2 = k · x^2, x)“ liefert hier:

$$x = \frac{-\left(\sqrt{2(3k-1)} + 2\right) \cdot t}{2(k-1)} \text{ oder } x = \frac{\left(\sqrt{2(3k-1)} - 2\right) \cdot t}{2(k-1)}.$$

Offenbar gibt es genau dann *nur* eine Lösung, wenn der Radikand Null wird. Dies ist aber gerade für $k = \frac{1}{3}$ der Fall: Als einzige Lösung erhalten wir wieder $x = \frac{3}{2}t$. Die Gleichung $x = \frac{3}{2}t$ lässt sich offenbar eindeutig nach t auflösen: $t = \frac{2}{3}x$. Damit haben wir für die Hüllkurve eine zweite Charakterisierung gefunden: *Jede Stelle x der Hüllkurve ist auch Berührstelle für genau eine Scharparabel.*

Beispielsweise wird die Hüllkurve an der Stelle $x = 1,5$ von der Parabel mit dem Parameter $t = 1$ (Abb. 5) und an der Stelle $x = 3$ von der Parabel mit dem Parameter $t = 2$ berührt (Abb. 6).

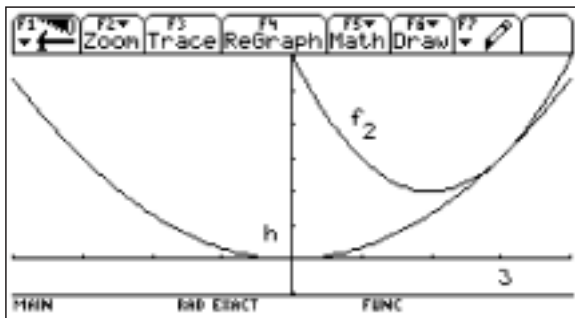


Abb. 6

Diese zweite Berühreigenschaft der Hüllkurve eröffnet uns auch einen weiteren Zugang zur Gleichung der Hüllkurve: Unter den „Kandidaten“ $h(x) = k \cdot x^2$ für die Hüllkurvengleichung wäre diejenige Gleichung die Richtige, bei der „solve((x-t)² + 0.5t² = k · x², t)“ genau eine Lösung für t liefert. Wir wählen zunächst spezielle Werte für k und führen die folgenden CAS-Experimente durch:

- (1) solve((x - t)² + 0.5t² = 0.5x², t)
- (2) solve((x - t)² + 0.5t² = 0.2x², t)
- (3) solve((x - t)² + 0.5t² = $\frac{1}{3}$ x², t).

Bei (1) erhalten wir (für $x \neq 0$) zwei Lösungen:

$t = \frac{x}{3}$ oder $t = x$. Beispielsweise liefert $x = 3$ die Parameterwerte $t = 1$ oder $t = 3$ (Abb. 7).

Bei (2) findet der Rechner keine Lösung: Für alle $x \neq 0$ liegt der Graph von $y = 0,2x^2$ unterhalb der Kurvenschar (Abb. 8).

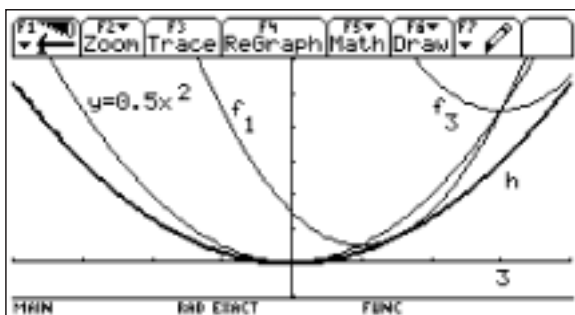


Abb. 7

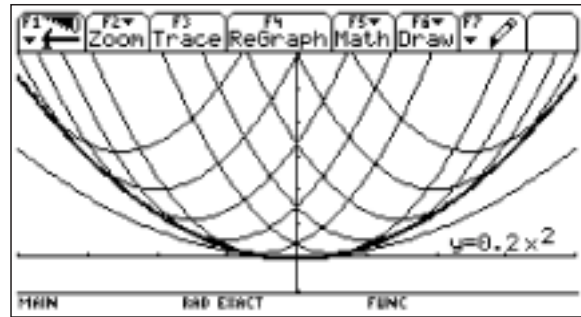


Abb. 8

Schließlich ergibt sich bei (3) die bekannte Lösung $t = \frac{2}{3}x$.

Auch hier würde die *allgemeine* Untersuchung der Gleichung $f_t(x) = k \cdot x^2$ zum Ziel führen: Der Befehl „solve((x-t)² + 0.5t² = k · x², t)“ liefert

$$t = \frac{(\sqrt{2(3k-1)} + 2)x}{3} \text{ oder } t = \frac{-(\sqrt{2(3k-1)} - 2)x}{3}.$$

Genau eine Lösung gibt es offensichtlich nur für $k = \frac{1}{3}$. Als einzige Lösung erhalten wir wieder $t = \frac{2}{3}x$.

Für die Schülerinnen und Schüler ist die beschriebene Vorgehensweise zwar einsichtig, sie fragen sich aber an dieser Stelle, ob es nicht eine „**schnellere**“ Methode gibt, die auch dann „funktioniert“, wenn der Funktionsterm der Hüllkurve komplizierter ist. Wir fragen uns also:

Wie groß muss an der Stelle x der Funktionswert y der Hüllfunktion sein, damit der Befehl „solve((x-t)² + 0.5t² = y, t)“ nur genau einen Wert für t liefert ?

Die Ausführung ergibt:

$$t = \frac{\sqrt{-2(x^2 - 3y)} - 2x}{3} \text{ oder } t = \frac{-(\sqrt{-2(x^2 - 3y)} - 2x)}{3}.$$

Wir erkennen, dass offenbar genau dann nur eine Lösung für t existiert, wenn der Term unter der Wurzel Null wird:

$$-2(x^2 - 3y) = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}x^2.$$

Für t ergibt sich dann der bekannte Wert $t = \frac{2}{3}x$.

Diese neue Methode liefert also mit einem Tastendruck (und einer kleinen Umformung) die vollständige Hüllkurvengleichung! Zur Überprüfung und Bestätigung bieten sich zwei weitere Aufgaben an:

1. Bestimme die Hüllkurve zu $f_t(x) = t \cdot x - t^2 + 1$.
2. Für welchen Wert von k wird $h(x) = \frac{1}{5}x^2$ Hüllkurve zu $f_t(x) = (x - t)^2 + k \cdot t^2$?

Zusammenfassung und Ausblick

Wir haben erkannt, dass CAS-Experimente von der Kurvenschar zur Hüllkurve und umgekehrt auch von der Hüllkurve zur Kurvenschar führen können. Ist der Term $f_t(x)$ der Kurvenschar

bei festem x eine quadratische Funktion von t , so sind offensichtlich die Methoden der Differenzialrechnung nicht erforderlich.

Hüllkurven sind „Verdichtungslinien“ einer Kurvenschar, und in gewisser Weise bildet der vorgestellte Unterrichtsgang für die Schülerinnen und Schüler auch eine „Verdichtung“ des Themas „Quadratische Gleichungen“. Dabei erhält der Begriff der „Diskriminante“ eine anschauliche Bedeutung. Bei der Lerngruppe muss selbstverständlich ein sicherer Umgang mit quadratischen Gleichungen vorausgesetzt werden.

Im Unterricht der Sekundarstufe II eröffnet die Thematik „Hüllkurven“ in Verbindung mit dem Einsatz des Rechners sinnstiftende Querverbindungen zwischen den Teilgebieten Analysis und Geometrie. Die Wiederholung der hier vorgestellten Unter-

suchungen sollte später in die Erarbeitung der neuen Methoden integriert werden: Die Schülerinnen und Schüler können dann die Grenzen des alten Verfahrens und die Möglichkeiten der Differenzialrechnung erkennen (vgl. [1]).

Literatur:



[1] Kroll, W.: Grund- und Leistungskurs Analysis, Bd. 1. Bonn: Dümmler 1988

Autor:

Hartmut Müller-Sommer
Kringelkamp 28, D-49377 Vechta
Mueller-Sommer@t-online.de

Konfidenzintervalle einfach berechnet (Teil 2)

Friedrich Tinhof

 Im Heft 1/2001 der TI-Nachrichten, im ersten Teil dieses  Artikels, wurde gezeigt, wie man mit dem TI-83 und dem TI-89/TI-92Plus Konfidenzintervalle berechnen kann.

Das neue Softwarepaket **TI-Interactive 1.1** gibt uns ebenfalls die Möglichkeit schließende Statistik auf anspruchsvollem Niveau, aber ohne komplizierte Berechnungen zu betreiben und ist besonders für Notebookklassen sehr geeignet. Die Form der Eingabe und die Berechnung ist, wie bei allen Produkten von TI sehr ähnlich, leicht zu lernen und macht es möglich, plattformunabhängig zu arbeiten.

Für das Konfidenzintervall gilt die Formel: (Z-Intervall)

$$P\left(\bar{x} - z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = c$$

Man berechnet zunächst aus einer Stichprobe vom Umfang n den Mittelwert \bar{x} dieser Stichprobe. Um diesen berechneten Mittelwert gibt man dann ein Intervall an, in dem der gesuchte Mittelwert μ der Grundgesamtheit mit der Wahrscheinlichkeit c liegt.


Beispiel:

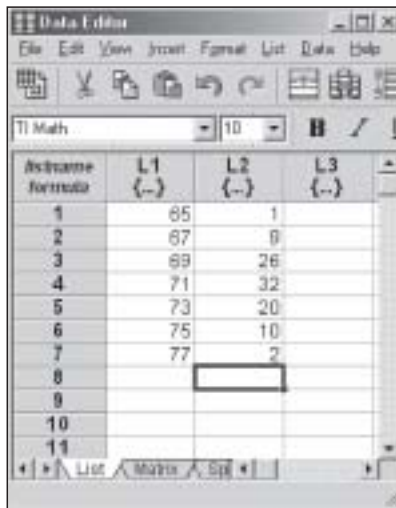
Eine Firma füllt Kräuter für Tee ab. Eine Zufallsstichprobe von $n = 100$ Packungen ergibt die in der Tabelle ersichtliche Anzahl der Packungen mit einer bestimmten Abfüllmenge. Die Daten liegen in Klassen eingeteilt vor (s. Tabelle).

Menge	65	67	69	71	73	75	77
Anzahl	1	9	26	32	20	10	2

In welchem Intervall liegt die mittlere Abfüllmenge von 95% aller abgefüllten Packungen?


Mit TI-Interactive können wir ein Arbeitsblatt erstellen, das bei Änderung der vorgegebenen Daten interaktiv auch die Ergebnisse anpasst. In der neuen Version 1.1 lassen sich sogar Schieberegler einfügen. Die Dokumente lassen sich im Word- und im HTML-Format speichern.

Im ersten Schritt geben Sie zunächst die vorliegenden Daten in den Listeneditor ein. Klicken Sie auf , um den Listeneditor aufzurufen. Das Ergebnis zeigt Abb. 1.



Abfüllmenge	L1 (-)	L2 (-)	L3 (-)
1	65	1	
2	67	9	
3	69	26	
4	71	32	
5	73	20	
6	75	10	
7	77	2	
8			
9			
10			
11			

Abb. 1

Das Auswerten dieser Daten erfolgt, indem Sie auf  klicken und **One-Variable Statistics** ausführen. Liste **L1** enthält die Klassenmitten der jeweiligen Klasse und Liste **L2** enthält die absoluten Häufigkeiten (Frequenzliste).

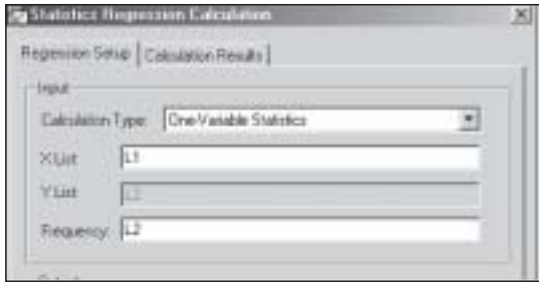


Abb. 2


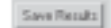

Die Berechnung erfolgt durch klicken auf . Die Resultate der Auswertung zeigt Abb. 3.



Abb. 3

Durch Klicken auf  werden die Ergebnisse ins aktuelle Dokument (s. Abb. 10) eingefügt.

Die grafische Darstellung der Daten in einem Histogramm erfolgt, indem Sie zunächst auf das Icon  klicken. Es erscheint ein Eingabefenster für die Darstellung von Funktionen.

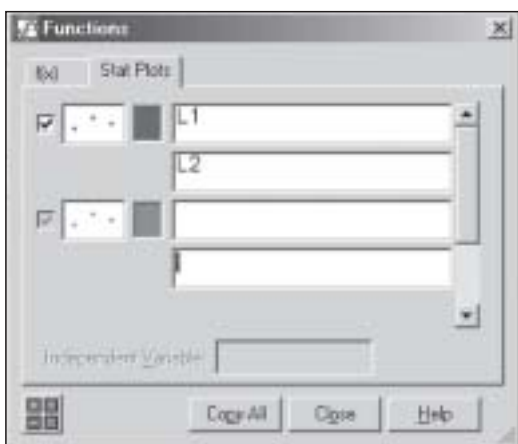


Abb. 4




Geben Sie im Registerblatt Stat Plots die Bezeichnung der Listen **L1** und **L2** ein. Klicken Sie nun auf  um die genaueren Grafikeinstellungen vorzunehmen.



Abb. 5

Klicken Sie auf  um die Einstellungen im Vorschau-fenster zu überprüfen und auf  um die aktuelle Grafik in das aktuelle Dokument zu übernehmen.

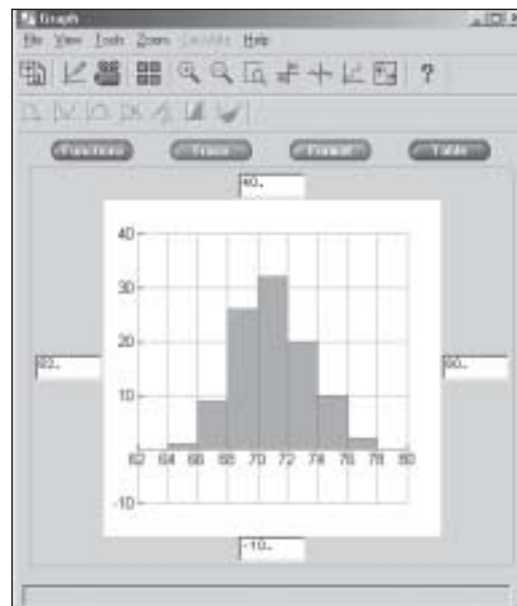



Abb. 6

Im zweiten Schritt wird das **Konfidenzintervall** berechnet. Die für die Berechnung der Intervalle benötigten Befehle erhält man entweder aus dem Befehlskatalog oder man verwendet die Eingabemaske für Statistik zur Berechnung, die man mit  erhält. Die Befehle von TI-Interactive und die verschiedenen Eingabemasken stimmen mit den CAS-Befehlen und den Eingabemasken des TI-92 Plus/TI-89 und des TI-83 Plus weitestgehend überein.

Wir berechnen zunächst das **Z-Intervall**.

Da Sie mit konkreten Daten arbeiten, aktivieren Sie den Menüpunkt **Data**.

Bei Verwendung des Z-Intervalls wird angenommen, dass die Standardabweichung s der Grundgesamtheit *bekannt* ist. Sollte σ nicht gegeben sein, wird für σ der erwartungsgetreue Schätzwert $s_{n-1} = s_x = 2.45353$ eingesetzt.

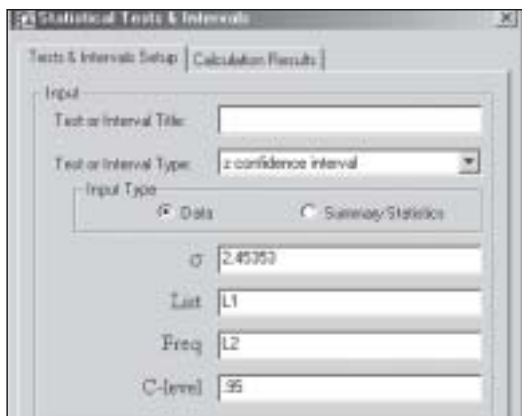


Abb. 7

Das Registerblatt Calculation Results (Abb. 8) zeigt dann die Ergebnisse.

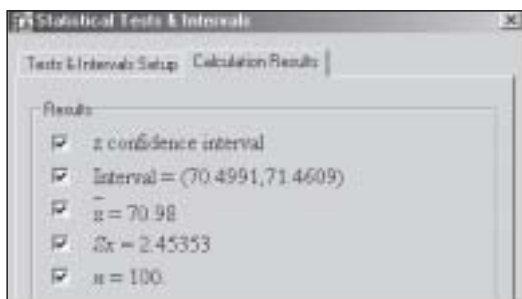


Abb. 8

Ergebnis:
Das berechnete Konfidenzintervall [70.499 ; 71.461] enthält mit

Das fertige Arbeitsblatt könnte das folgende Aussehen haben:

Konfidenzintervalle mit TI-Interactive

L1	L2
65	1
67	9
68	26
71	32
73	20
76	10
77	2

Auswertung der Daten
One-Variable Statistics
 $\bar{x} = 70.98$
 $\Sigma x = 7098$
 $\Sigma x^2 = 504412$
 $Sx = 2.45353$
 $\sigma x = 2.44123$
 $n = 100$
 $\max X = 65$
 $Q1 = 69$
 $\text{Median} = 71$
 $Q3 = 73$
 $\max X = 77$

Konfidenzniveau (mit dem Regler änderbar)
 $c = .95$

t confidence interval
 Interval = (70.4932, 71.4668)
 $\bar{x} = 70.98$
 $Sx = 2.45353$
 $n = 100$

z confidence interval
 Interval = (70.4991, 71.4609)
 $\bar{x} = 70.98$
 $Sx = 2.45353$
 $n = 100$

Abb. 8

einer Wahrscheinlichkeit von $c = 95\%$ den Erwartungswert der Grundgesamtheit, dh. die mittlere Abfüllmenge aller abgefüllten Packungen.

Im zweiten Schritt (alternativ) wird das **T-Intervall** berechnet. Aktivieren Sie wieder den Menüpunkt **Data**. Bei Verwendung des T-Intervalls ist es nicht notwendig einen Wert für die Standardabweichung anzugeben.

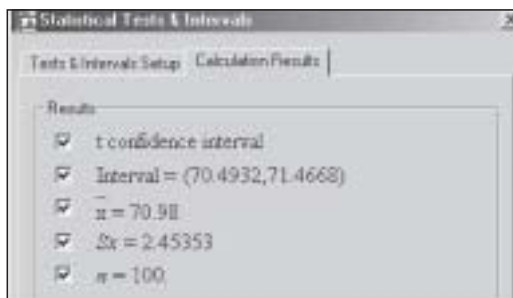


Abb. 9

Ergebnis:
Mit einer Wahrscheinlichkeit von $c = 95\%$ enthält das berechnete Konfidenzintervall [70.493 ; 71.467] die mittlere Abfüllmenge aller abgefüllten Packungen.

Das Arbeiten mit TI-Interactive ist für Anwender von TI-Rechnern sehr einfach und schnell zu erlernen. Schon nach kurzer Einarbeitungszeit lassen sich hervorragende Arbeitsblätter erstellen. Besonders beeindruckend sind die grafischen Darstellungen.

Literatur:

Schneider u.a.;
Mathematik Bd4 für HAK
und WB; TRAUNER Verlag
<http://www.trauner.at>

Autor:

Friedrich Tinhof;
BHAK Eisenstadt;
tinhof@utanet.at
<http://tinhof.freeyellow.com>

Eine Klassenarbeit Klasse 9 – Beispiel für CAS-Einsatz



Zu den besonderen Zielsetzungen im Rahmen des Berliner CAS-Projekts (TI-92-Plus) für die neunten Klassen von fünf Schulen gehören Klassenarbeiten mit Einsatz des Taschencomputers. Die folgende Arbeit entstand als Entwurfshilfe für die eigenen Klassenarbeiten der am Projekt beteiligten KollegInnen zum Thema „Lineare Gleichungssysteme“. Die Aufgaben sind „im üblichen Stil“ formuliert und erfordern teilweise CAS-Einsatz.

Kennzeichen: Aufgaben mit CAS-Einsatz (TI-92-Plus) und Aufgaben ohne CAS.

Motto/Ziele: Weniger (stumpfsinnig) rechnen/zeichnen – mehr verstehen

Aufgabe 1

1.1 In Abbildung 1 sind drei Geraden zu sehen. Rekonstruiere die Abbildung mit deinem CAS und dokumentiere den Arbeitsweg.

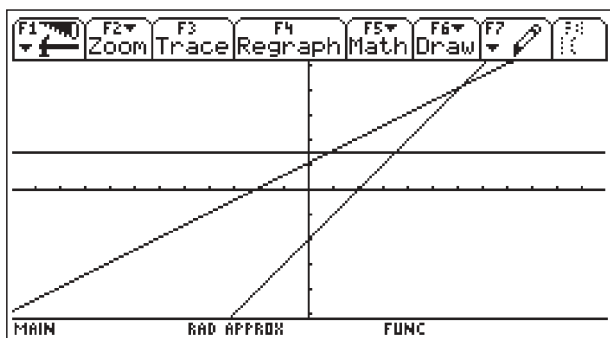


Abb. 1: Drei Geraden

(Hinweis: Zeige das Zeichenergebnis deiner Arbeit bitte deinem Lehrer!)

1.2 Was hat Abbildung 1 mit dem Thema „Lösung linearer Gleichungssysteme“ zu tun?

Aufgabe 2

2.1 Du siehst drei Gleichungssysteme. Das erste LGS hat die Lösungsmenge $\{(3, 1)\}$. Alle LGS haben eine gemeinsame Eigenschaft, die es zu entdecken gilt. Benutze dazu Dein CAS.

- a) $2x - 3y = 3$ $5x + 2y = 17$
- b) $-2a + 5b = -1$ $3a - b = 8$
- c) $-2x + 5y = -1$ $4x + 2y = 14$

2.2 Wie könntest du den Schülern deiner Parallelklasse verständlich machen, dass so etwas durchaus möglich ist? Benutze eine algebraische Erklärung.

Aufgabe 3

Erläutere, dass die Bearbeitung der folgenden Problemstellung zu dem angegebenen LGS führt und löse dieses mit der Matrixmethode.

Frau Meier erbt von ihren Eltern das Guthaben von 5220 Euro zweier Bankeinlagen. Die Eltern hatten seinerzeit insgesamt 5000 Euro. Der Vater hatte seinen Betrag zu einem Zinssatz von 4% angelegt, die Mutter hatte eine Bank mit 4.5% Zinsen gefunden.

Wieviel Euro haben Mutter und Vater jeweils angelegt?

Das LGS:

$$(1) \quad x + y = 5000, \quad (2) \quad 0.045x + 0.04y = 220$$

Aufgabe 4

Löse das LGS von Aufgabe 2.1.a von Hand – nach einem von dir gewählten Verfahren.

$$(1) \quad 2x - 3y = 3 \quad (2) \quad 5x + 2y = 17.$$

Wie könnte man die Lösungen mit Hilfe des CAS überprüfen – ohne das LGS mit einem Verfahren ausrechnen zu lassen?

Lösungen und Kommentare für den Lehrer (Arbeit insgesamt ca. 70')

Zu Aufgabe 1 (1.1 ca. 15', 1.2 ca. 5')

1.1 Um zur Rekonstruktion der Zeichnung zu kommen, muss der Schüler den Zusammenhang zwischen Funktionsgleichung und Graph (hier: lineare Funktionen und Geraden) verstanden haben. Er liest m und n oder 2 Punkte aus dem Graphen ab, erhält die Funktionsgleichung und zeichnet erneut. Dabei muss er noch die Fenstergröße und den Maßstab beachten.

Anspruch: leicht bis mittel

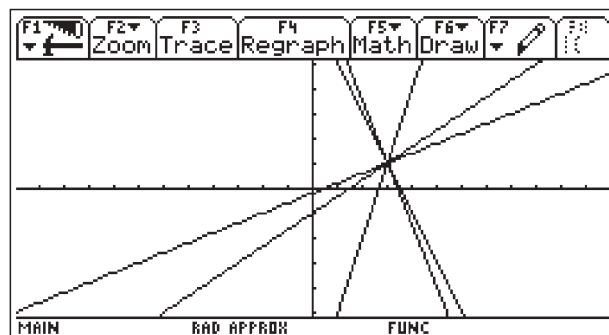
1.2 Schnittpunktberechnungen von Geraden führen zu LGS. Beispiel nennen.

Anspruch: leicht bis mittel

Zu Aufgabe 2 (2.1 ca. 5', 2.2 ca. 15')

2.1 Mit dem TI bestätigen, dass überall $(3, 1)$ die Lösung ist.

Anspruch: leicht.

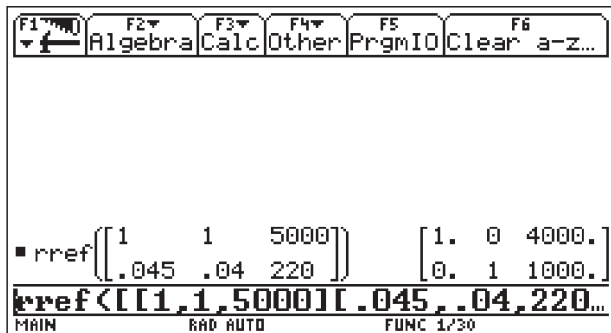


2.2 Algebraisch: Es gibt viele Gleichungen mit 2 Variablen, die als Lösung $(3, 1)$ haben. Lösungspaar einsetzen. Ein Beispiel für die Konstruktion einer weiteren Gleichung zeigen. [Geometrisch: Bei der Deutung der Lösungsmenge eines LGS als Geradenschnittpunkt ist sofort einsichtig, dass es viele Geraden durch einen Punkt (hier $(3, 1)$) gibt.

Möglicherweise zeichnet ein Schüler: Dann müssen alle Gleichungen nach y aufgelöst, eingegeben und gezeichnet werden. Alles mit dem TI möglich, siehe u.a. Abb. 2.]

Insgesamt hoher Anspruch.

Zu Aufgabe 3 (ca. 5' + 10')



Mutter zahlte 4000 Euro, Vater 1000 Euro ein.
 Erläuterung: x ist Einzahlung der Mutter und y Einzahlung des Vaters, usw.

Mittlerer Anspruch, Bearbeitung mit rref leicht, Lösung interpretieren schwerer, ebenso die Erläuterung

Zu Aufgabe 4 (ca. 15')

Handlösung nach einem Verfahren.

Überprüfung: z. B. $2 \cdot 3 - 3 \cdot 1$ und $5 \cdot 3 + 7 \cdot 1$ ausrechnen, oder $2x - 3y = 3 \rightarrow \text{glei1}(x,y)$ sowie $5x + 2y = 17 \rightarrow \text{glei2}(x,y)$ und dann $\text{glei1}(3, 1)$ sowie $\text{glei2}(3, 1)$ eingeben, was jeweils „true“ ergibt. Oder ...

Mittlerer Anspruch, Teil 1 prüft die Rechenfertigkeiten an einem einfachen Beispiel, Teil 2 geht mehr auf die Verständnisebene, insbesondere wenn mehrere Verfahren angeboten werden.

Der Autor:

Eberhard Lehmann
 mirza@berlin.snafu.de

CBR: Was nicht in den Handbüchern steht (Teil 2)

Störungen bei der berechneten Geschwindigkeit und Beschleunigung Karl-Heinz Keunecke



1. Einleitung

Das CBR (**C**omputer **B**ased **R**anger) misst nicht nur die Entfernung in vorgegebenen Zeitintervallen, sondern berechnet aus diesen Werten sowohl die Geschwindigkeit als auch die Beschleunigung. Die Ergebnisse dieser Berechnungen sind manchmal enttäuschend. Die grafische Darstellung der Geschwindigkeit und noch viel mehr der Beschleunigung sind häufig sehr stark verrauscht. Dies beobachtet man sogar bei den sehr gleichförmigen Bewegungen eines ruhig schwingenden Pendels von 1,7 m Länge, die in der Abb. 1 bis Abb. 3 gezeigt werden.

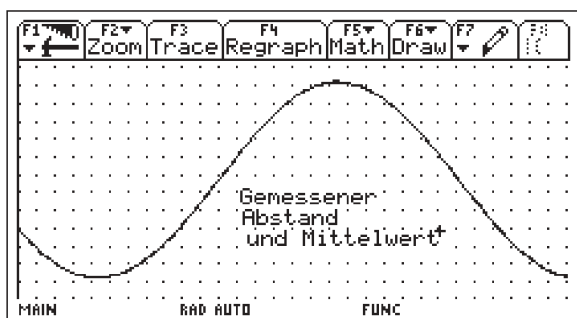


Abb. 1

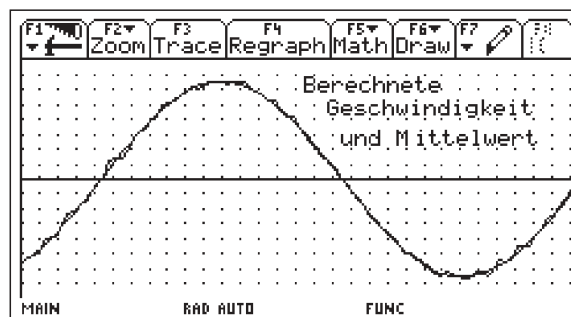


Abb. 2

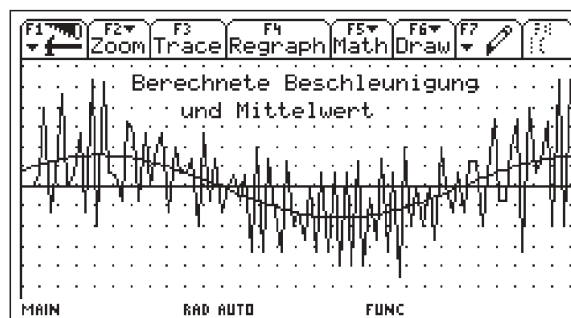


Abb. 3

Weg, Geschwindigkeit und Beschleunigung eines pendelnden Balles, mit eingezeichneter sinusförmiger Ausgleichsfunktion (Mittelwert)

Abb.1 zeigt die gemessene Auslenkung eines schwingenden Balles, der bifilar an der Decke aufgehängt ist. Es handelt sich um eine Pendelschwingung mit einer Amplitude von $s_0 = 5,5 \text{ cm}$ und der Schwingungsdauer von $T_p = 2,6 \text{ s}$. In den Abbildungen sind ebenfalls die sinusförmigen Regressionsfunktionen zu den Daten als Abschätzung der ungestörten Größen (genannt Mittelwert) eingezeichnet. Während bei der Auslenkung (Abb.1) keine Abweichungen vom Mittelwert zu erkennen sind, sieht man bereits bei der Darstellung der Geschwindigkeit in Abb.2 deutlich überlagerte Störungen. Bei der Berechnung der Beschleunigung aus diesen Geschwindigkeitsdaten sind die Schwankungen bereits größer als die Messgröße selbst. Offensichtlich wird in diesem Fall durch Bildung des Differenzenquotienten aus den Abstandswerten für die Berechnung der Geschwindigkeit oder aus den Werten der Geschwindigkeit für die Berechnung der Beschleunigung die Störung der ursprünglichen Werte erheblich vergrößert.

Das „Verrauschen“ der berechneten Geschwindigkeit und Beschleunigung tritt keineswegs bei allen Messungen mit dem CBR ein. Es ist durchaus möglich, dass alle Darstellungen so glatt aussehen wie Abb. 1. Es ist aber auch möglich, dass bereits die Geschwindigkeit einen Verlauf wie Abb. 3 hat und dass aus der Darstellung der Beschleunigung keine Informationen gewonnen werden können.

Warum das so ist, erkennt man, wenn man die Fehlerfortpflanzung bei der Berechnung des Differenzenquotienten aus den Abstands-, bzw. Geschwindigkeitsdaten betrachtet. Aus den Ergebnissen dieser Untersuchungen können dann die Parameter der Messung so optimiert werden, dass die Fehler nicht mehr auftreten oder mindestens minimiert werden.

2. Analyse der Messdaten

Die beobachteten Pendelschwingungen können durch sinusförmige Funktionen beschrieben werden. Der TI-92+ bietet die Möglichkeiten, zu Messdaten sinusförmige Ausgleichsfunktionen berechnen zu lassen. Die Ergebnisse sind als Funktionen y_1, y_2 und y_3 gespeichert und in den Abb. 1 bis 3 eingezeichnet worden. Aus der Differenz von Messdaten und Ausgleichsfunktion kann dann für die einzelnen Größen die Abweichung von der ungestörten Bewegung bestimmt werden. Dies ist in der Tabelle durchgeführt worden, die in Abb. 4 und 5 zu sehen ist.

DATA	Zeit	s	sm(c1)	s-sm	v
	c1	c2	c3	c4	c5
1	.065	.803	.803	-1.E-4	-.102
2	.097	.799	.800	-2.E-4	-.100
3	.129	.796	.797	-4.E-4	-.085
4	.161	.794	.794	-3.E-5	-.077
5	.194	.791	.791	-2.E-4	-.079
6	.226	.789	.789	-4.E-4	-.062
7	.258	.787	.787	-3.E-5	-.047

c1=l1
MAIN RAD AUTO FUNC

Abb. 4

DATA	vm(c1)	W-vm	a	am(c1)	a-am
	c6	c7	c8	c9	c10
1	-.102	3.2E-5	0.000	.196	-.196
2	-.096	-.004	.135	.214	-.079
3	-.088	.003	.788	.231	.557
4	-.081	.004	-.260	.247	-.506
5	-.073	-.006	.135	.261	-.126
6	-.064	.002	.923	.273	.649
7	-.055	.008	0.000	.284	-.284

c6=y2(c1)
MAIN RAD AUTO FUNC

Abb. 5

Tabelle zur Isolierung der Störungen von s, v, a.

Dort sind in Spalte c1 und c2 die Zeit und der Weg eingetragen in Spalte c3 wird der Wert der Ausgleichsfunktion $y_1(c1)$ berechnet und in Spalte c4 dann die Differenz zwischen Messwert und Ausgleichsfunktion $c2 - y_1(c1)$ berechnet. Diese Störungen in Spalte c4 können dann statistisch untersucht werden, was für den Abstand in Abb. 6 zu sehen ist.

DATA			
	X	=2.065217E-15	
	Σx	=1.9E-13	
	Σx ²	=4.36633E-6	.196
	Sx	=2.190471E-4	.079
	nStat	=92.	.67
	minX	=-4.346045E-4	.606
	q1	=-1.490607E-4	.126
	MedStat	=-2.760674E-5	.49
			.284

Pr1c10=-.19576901115816
MAIN RAD AUTO FUNC

Abb. 6

Statistische Untersuchung der Störungen der Abstandsmessungen.

Die ermittelte Standardabweichung S_x kann dann als mittlere absolute Störung interpretiert werden. Ebenso wird in der Tabelle mit der Geschwindigkeit (c5) und der Beschleunigung (c8) verfahren. Die Ergebnisse findet man in c7 und c10. Der Wert der absoluten Störung sagt noch nicht allzu viel über die Qualität der Messung aus. Wichtiger ist es, die relative Störung zu bestimmen, als Quotient aus der mittleren absoluten Störung und einem Mittelwert der gemessenen Größe. In der folgenden Tabelle sind die absoluten Fehler eingetragen, ebenso wie die Mittelwerte der Größen Abstand, Geschwindigkeit und Beschleunigung.

	Standardabw.	Mittlere Amplitude	Mittlerer rel. Fehler
s	$2,2 \cdot 10^{-4} \text{ m}$	0,04 m	0,6 %
v	0,05 m/s	0,09 m/s	6 %
a	0,41 m/s^2	0,5 m/s^2	85 %

Daraus ist dann die relative mittlere Schwankung gegenüber dem Mittelwert berechnet worden. Dieser Wert zeigt nun quantitativ, was bereits aus Abb. 1 bis Abb. 3 ersichtlich ist. Die Fehler wachsen in dem angeführten Beispiel bei der Berechnung des Differenzenquotienten jeweils näherungsweise um den Faktor 12 an. Eine Erklärung für diesen Anstieg liefert die Untersuchung der Fehlerfortpflanzung bei der Berechnung der Geschwindigkeit und Beschleunigung im nächsten Abschnitt.

3. Die Berechnung der Geschwindigkeit und der Beschleunigung durch das CBR

Im Programm **ranger()**, mit dem sich die Messparameter des CBR von einem grafischen Taschenrechner einstellen lassen, können Messzeiten T von 1s bis 99s gewählt werden. In der Zeit T werden dann stets 94 Abstandsmessungen durchgeführt und in der Liste L2 auf dem TI-92+ gespeichert. Die zugehörigen Zeitintervalle befinden sich in der Liste L1. ($L1_n/L2_n$) gibt die

Abstandsmessung zum Zeitpunkt $t=L1_n = \frac{T}{94}n$ an. Im CBR

wird, solange nicht Realtime – grafische Darstellung der Abstände während der Messung – eingestellt ist, aus den gemessenen Abständen die Geschwindigkeit nach der folgenden Formel [1] berechnet und in L3 gespeichert:

$$L3_n = \frac{\frac{L2_{n+1} + L2_n}{2} - \frac{L2_n + L2_{n-1}}{2}}{L1_{n+1} - L1_n} \text{ mit } n = 1, \dots, 94 \quad (1)$$

Dieser Term lässt sich vereinfachen zu:

$$L3_n = \frac{L2_{n+1} - L2_{n-1}}{2\Delta t} \text{ mit } \Delta t = L1_{n+1} - L1_n. \quad (2)$$

Um nun die Entstehung der gezeigten Störungen zu verstehen, ersetzen wir den gemessenen Abstandswert $L2_n$ durch die Summe aus dem korrekten, störungsfreien Abstandswert s_n und einem individuellen Fehler δs_n . Werden die Fehler δs_n durch einen Mittelwert δs abgeschätzt, so wird aus (2)

$$L3_n \approx \frac{(s_{n+1} \pm \delta s) - (s_{n-1} \pm \delta s)}{2\Delta t} \quad (3)$$

$$\approx \frac{s_{n+1} - s_{n-1}}{2\Delta t} \pm \frac{1}{\Delta t} \cdot \delta s \approx v_n \pm \frac{1}{\Delta t} \cdot \delta s$$

Analog ergibt sich für die Beschleunigung:

$$L4_n \approx a_n \pm \frac{1}{\Delta t} \cdot \delta v = a_n \pm \frac{1}{\Delta t^2} \cdot \delta s \quad (4)$$

Es ist aus (3) und (4) zu ersehen, dass sich der absolute Fehler bei der Berechnung der Geschwindigkeit und der Beschleunigung jeweils um den Faktor $1/\Delta t = 94/T$ vergrößert. Je kürzer die Abfragerate ist, desto größer wird der Fehler bei den berechneten Größen.

Den Einfluss dieses Fehlers sieht man erst, wenn der relative Fehler betrachtet wird. Bei einer Pendelschwingung

$s = s_0 \sin \frac{2\pi}{T_p} t$ wie in Abb.1 ist der Betrag der mittleren

Auslenkung $\bar{s} = \frac{2}{\pi} s_0$. Die entsprechenden Beträge der Geschwindigkeit und der Beschleunigung sind dann

$$\bar{v} = \frac{2\pi}{T_p} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot s_0 = \frac{4}{T_p} \cdot s_0 \quad \text{und} \quad \bar{a} = \left(\frac{2\pi}{T_p}\right)^2 \cdot \frac{2}{\pi} \cdot s_0 = \frac{8\pi}{T_p^2} \cdot s_0$$

Daraus ergeben sich Formeln für die relativen Fehler:

$$\frac{\delta s}{\bar{s}} = \frac{\pi}{2s_0} \cdot \delta s \approx 0,6\%$$

$$\frac{\delta v}{\bar{v}} = \frac{T_p}{4s_0\Delta t} \cdot \delta s \approx 8\% \quad (5)$$

$$\frac{\delta a}{\bar{a}} = \frac{T_p^2}{8\pi s_0\Delta t^2} \cdot \delta s \approx 100\%$$

Bei Einsetzen der Parameter für die Pendelschwingung zeigt sich eine gute Übereinstimmung mit den Auswertungen der Messungen in der Tabelle. Die Formeln von (5) erlauben nun auch Aussagen, wie die Messparameter verändert werden müssen, um Störungen der berechneten Geschwindigkeit und Beschleunigung so gering wie möglich zu halten.

Wenn die Oberfläche des beobachteten Körpers glatt und schallhart ist, dann ist im Allgemeinen $\delta s = 2 \dots 5 \cdot 10^{-4}$ m. Bei einem mit Filz beschichteten Tennisball ist der Wert ca. zehnmal so groß.

T_p und s_0 sind Größen, die von dem physikalischen Experiment abhängen. Je langsamer die Bewegung ist (große Schwingungsdauer T_p und kleine Amplitude s_0) desto größer ist bereits der relative Fehler der Abstandsmessung und desto stärker wirken sich die Fehler auf die berechneten Größen aus. Einen entscheidenden Einfluss hat auch die Abfragerate Δt , die im CBR eingestellt wird. Bereits eine Verdopplung der Messzeit reduziert die Störungen auf ein Viertel. Dies zeigt der Vergleich von Abb. 3 und Abb. 7, bei der die Messzeit von 3s auf 6s erhöht worden ist.

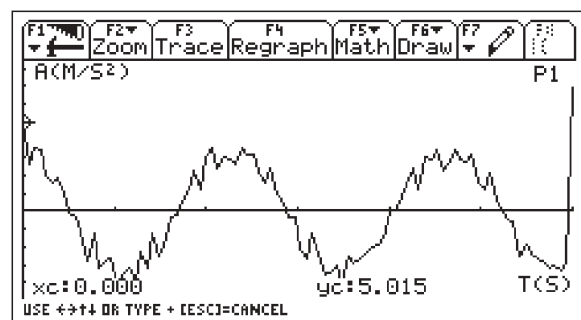


Abb. 7

Beschleunigung des pendelnden Balls. Messzeit. 6s

4. Zusammenfassung

Wenn die bei Messungen mit dem CBR berechnete Geschwindigkeit und Beschleunigung von Störungen überlagert sind, dann liegt das im Allgemeinen nicht an dem Gerät, sondern an den Versuchsbedingungen und/oder an der Art der Beobachtung.

Eine Bewegung, die mit einem Ultraschallabstandsmesser beobachtet werden soll, darf nicht zu langsam sein. Verändert

sich von Messung zu Messung der Abstand zum CBR nur um wenige mm, dann wirkt sich die nicht zu beeinflussende Ungenauigkeit δs erheblich aus. Wenn sich der Versuch nicht entsprechend modifizieren lässt, so kann diese Wegdifferenz vergrößert werden, indem die Abfragerate vergrößert wird. Dabei reduziert eine Verdopplung der Messzeit des CBR den mittleren relativen Fehler der Beschleunigung auf 25%.

Die untersuchten Zusammenhänge sind nicht nur für die experimentierende Lehrkraft von Bedeutung. Die Untersuchung der Störungen in Messdaten mit Hilfe statistischer Verfahren wie sie im zweiten Abschnitt durchgeführt werden, passen durchaus auch in den Stochastikunterricht. Wenn die Zusammenhänge erst einmal aufgedeckt worden sind, wird sicherlich

auch nach Erklärungen gefragt. Das wäre dann die Möglichkeit, auch im Unterricht die Fehlerfortpflanzung aus dem 3. Abschnitt zu untersuchen.

Literatur:

[1] Einführung in die Verwendung des CBR, Texas Instruments, 1997

Autor:

Dr. Karl-Heinz Keunecke
Gorch Fock Str. 2, D-24159 Kiel
kh.keunecke@t-online.de

Workshop zum Thema Kurven

Johanna Schönenberger-Deuel



1. Einführung

Dieser Artikel beschreibt einen Workshop, in dem ich – mit Unterstützung von René Hugelshofer – einer Klasse angehender Sekundarlehrerinnen und -lehrer gezeigt habe, wie mit einem Rechner vom Typ TI-89/92 Funktionen und Kurven dargestellt und verschiedene Probleme in diesem Zusammenhang gelöst werden. Nur wenige der Studierenden haben schon vor ihrer Matura mit einem CAS-Rechner gearbeitet. Die hier besprochenen Beispiele eignen sich auch gut zur Einführung der Kurvendarstellung in einem T³-Workshop.

2. Explizite Funktionen

Als Beispiel untersuchen wir die beiden Funktionen

$$y1(x) = 4 - x^2 \quad \text{und} \quad y2(x) = \left| x - \frac{3}{2} \right| - 2.$$

Wir geben sie im Homescreen und im y-Editor ein. Wie erfolgt die grafische Darstellung? Wir üben an diesen Funktionen das Einstellen der Window-Koordinaten, ZOOM-Arten und TRACE. Schließlich schneiden wir die Kurven. Das geschieht sowohl grafisch mit Intersection als auch mit SOLVE.

Richtig interessant für einen CAS-Rechner wird es, wenn die Aufgabe dynamisiert wird, z.B. durch Einführung eines Parameters in der ersten Funktion:

$$y1(x) = a - x^2.$$

Wir schneiden nun die beiden Kurven für verschiedene Parameterwerte von a. Wieder lösen wir die Aufgabe mit SOLVE und grafisch.

Die Lösung mit einem allgemeinen Parameter a zeigt den Vorteil des CAS-Rechners.

Die Eingabe

$$\text{solve}(y1(x) = y2(x), x)$$

liefert das umfangreiche Resultat

$$x = \frac{-(\sqrt{4a+15}+1)}{2} \text{ and } \sqrt{4a+15}+1 \leq -3$$

$$\text{or } x = \frac{\sqrt{4a+15}-1}{2} \text{ and } \sqrt{4a+15}-1 \geq 3$$

$$\text{or } x = \frac{\sqrt{4a+3}+1}{2} \text{ and } \sqrt{4a+3}+1 < 3$$

$$\text{or } x = \frac{-(\sqrt{4a+3}-1)}{2} \text{ and } \sqrt{4a+3}-1 > -3.$$

Wie kommt dieses Resultat zustande? Wir müssen unweigerlich die möglichen Fälle untersuchen, die wegen der Absolutfunktion entstehen. Dabei wird deutlich, dass algorithmisch erzeugte Lösungen nicht immer in vereinfachter Form wiedergegeben werden.

Für das Aufzeichnen der Kurven bei verschiedenen Werten von a führen wir zum ersten Mal Listen ein.

3. Implizite Darstellung

Als implizit gegebene Funktion untersuchen wir die Kurve mit der Gleichung

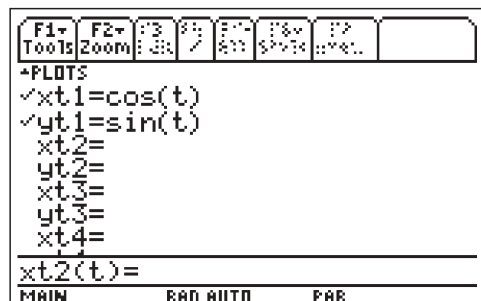
$$|x|^{\frac{2}{3}} + |y|^{\frac{2}{3}} = 1$$

Dieses Beispiel zeigt instruktiv, wie Symmetrieeigenschaften mathematisch beschrieben werden können. Die Kurve ist symmetrisch bezüglich $y = 0$, $x = 0$, $y = x$. Wegen diesen Symmetrien müssen wir nur einen Teil der Kurve untersuchen und zeichnen. Wir können weiter überlegen, dass die Kurve bei $y = x$ ($x, y > 0$) senkrecht auf der Symmetrieachse $y = x$ stehen muss (dies können wir auch mit der ersten Ableitung zeigen). Wir lösen die Gleichung der Kurve nach y auf und zeichnen die beiden Kurventeile.

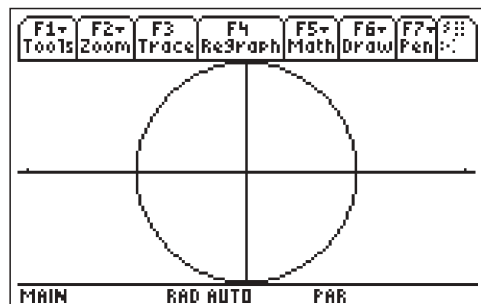
Es entsteht eine sternförmige Kurve (Astroide), die wir später als Rollkurve wieder antreffen werden.

4. Lissajous-Figuren

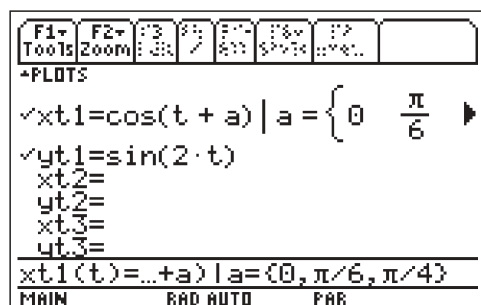
Hier lernen wir mit dem PARAMETRIC-Mode zu arbeiten. Zur Einführung besprechen wir kurz die Parameterdarstellung des Kreises und geben die Gleichungen im y-Editor ein:



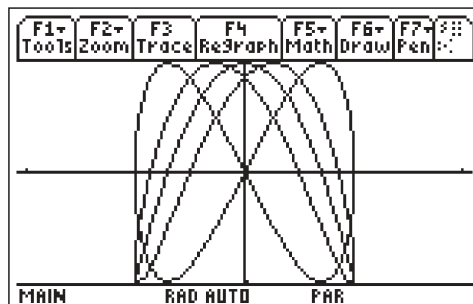
Mit den ZOOM-Einstellungen ZoomFit und ZoomSqr erhalten wir eine bildschirmfüllende proportionale Darstellung des Kreises.



Nun ändern wir die 2. Gleichung ab: $y1t=\sin(2t)$. Mit TRACE verfolgen wir den Verlauf der Kurve in Abhängigkeit des Parameters. Schließlich zeichnen wir mehrere Lissajous-Figuren gleichzeitig mit Listen. Dazu ändern wir auch noch die erste Gleichung ab und untersuchen die neue Kurve (der Scharparameter a ist die Phasenverschiebung):



Es ergibt sich die Graphik



Aufgaben

1. Warum läuft die obige Lissajous-Kurve für $a = \frac{\pi}{4}$ auf der gleichen Kurve zurück?
2. Untersuchen Sie die Lissajous-Figuren

 $xt1 = \cos(t)$

 $yt1 = \sin(kt)$

für $k = 1, 2, 3, 4$. Was bewirkt eine Änderung des Parameters k ?
3. Experimentieren Sie mit selbstgewählten Funktionen (z.B. $t^n, \frac{1}{t^n}, \sqrt{t}$). Die interessanteste Kurve wird prämiert!

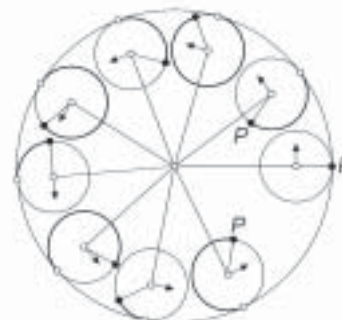
5. Rollkurve: Kreis rollt auf Kreis (Hypozykloide)

An diesem etwas anspruchsvolleren Beispiel lernen wir, eine Parameterdarstellung und schließlich die Kurve zu finden.

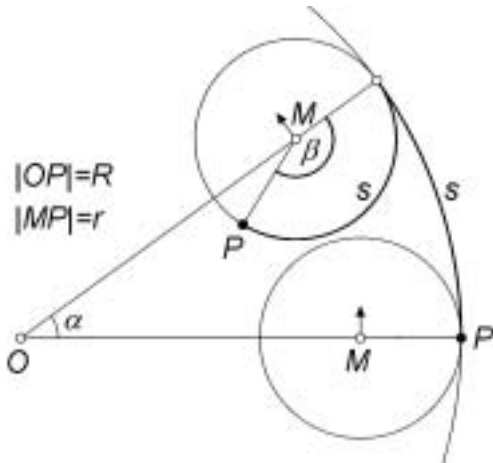
Aufgabe

Gegeben sind zwei Kreise mit den Radien R und $r = \frac{R}{4}$. Der kleine Kreis rollt im Innern des großen Kreises auf dessen Peripherie ab. Ein fester Punkt P auf dem kleinen Kreis beschreibt dabei eine Kurve. Diese Kurve suchen wir.

a) Um sich ein Bild dieser Kurve machen zu können, wählen Sie einige spezielle Positionen des kleinen Kreises ($\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}$ usw., siehe Figur) und zeichnen den Punkt P an diesen Stellen. Beachten Sie, dass die abgerollte Bogenlänge auf beiden Kreisen gleich groß ist!. (Wählen Sie als Einheit 10 cm). Überlegen Sie sich, ob die Kurve Symmetrien aufweist.



- b) Beschreiben Sie nun die Rollkurve in Parameterdarstellung! Überlegen Sie sich dazu, wo sich der Punkt P des kleinen Kreises befindet, wenn der kleine Kreis auf dem großen Kreis die Strecke s durchlaufen hat.



- b1) Stellen Sie den Ortsvektor \vec{OP} als Summe von \vec{OM} und \vec{MP} mit Hilfe von α und r dar (β kann durch α ersetzt werden!). Vereinfachen Sie die erhaltene Darstellung mit dem Taschencomputer und zeichnen Sie die Kurve.
- b2) Zeigen Sie, dass die gefundene Parameterdarstellung die Gleichung $|x|^{2/3} + |y|^{2/3} = c$ mit einer zu bestimmenden Konstanten c erfüllt (vgl. Abschnitt 3)
- c) Nun soll der Radius r des kleinen Kreises irgendein Vielfaches von R sein: $r = kR$. Testen Sie mit verschiedenen Werten k (auch $k > 1$). Warum zeichnet der Taschencomputer für $k = 1/2$ nichts?

Lösungen:

b1)
$$\vec{OP} = \vec{OM} + \vec{MP} = (R-r) \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} \cos(\alpha - \beta) \\ \sin(\alpha - \beta) \end{pmatrix}$$

Beachten Sie, dass die Winkel immer im Bogenmaß (radian) gemessen werden müssen. Da für die abgerollte Strecke s gilt: $s = R \alpha = 4r\alpha = r\beta$, folgt für die Winkel: $4\alpha = \beta$.

Wählen Sie als Parameter $t = \alpha$, dann ist die Parameterdarstellung der Rollkurve

$$\vec{OP} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \frac{R}{4} \begin{pmatrix} 3 \cos(t) + \cos(-3t) \\ 3 \sin(t) + \sin(-3t) \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \cos^3(t) \\ \sin^3(t) \end{pmatrix}.$$

Der letzte Schritt wurde mit dem CAS-Taschencomputer unter Verwendung von tExpand (t steht für trigonometric; F2:9) vereinfacht. Diese Umformung kann also bereits zu einem frühen Zeitpunkt im Sinne der Gerüstmethode durchgeführt und später bei der Behandlung der Additionstheoreme als Beispiel wieder aufgegriffen werden.

- b2) Wir klammern zunächst den Faktor R aus. Wir lassen außerdem den Betrag weg, denn die 3. Wurzel aus einer

negativen Zahl ist negativ und wird durch das Quadrieren wieder positiv (oder umgekehrt).

$$\begin{aligned} |x|^{2/3} + |y|^{2/3} &= (R/4)^{2/3} (\cos^3(t)^{2/3} + \sin^3(t)^{2/3}) = \\ &= \frac{R^2}{4^2} (\cos^2(t) + \sin^2(t)) = \frac{R^2}{16} = c \end{aligned}$$

- c) Die Parameterdarstellung erhalten wir wie bei b1).

$$\begin{aligned} \vec{OP} &= \vec{OM} + \vec{MP} = (R-r) \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} \cos(\alpha - \beta) \\ \sin(\alpha - \beta) \end{pmatrix} \\ &= R(1-k) \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} + kR \begin{pmatrix} \cos(\alpha - \beta) \\ \sin(\alpha - \beta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Der Vergleich der abgerollten Strecke s ergibt:

$s = R\alpha = \frac{1}{k}r\alpha = r\beta$. Dies ergibt für die Winkel die Beziehung $\frac{1}{k}\alpha = \beta$. Wählen Sie wieder $t = \alpha$ als Parameter.

$$\vec{OP} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} (1-k)\cos(t) + k\cos((1-\frac{1}{k})t) \\ (1-k)\sin(t) + k\sin((1-\frac{1}{k})t) \end{pmatrix}$$

Die Funktion tExpand bringt hier keine Vereinfachung. Zeichnen Sie die Kurve mit verschiedenen Parametern. Da die Kurve im Allgemeinen nach einem Umgang nicht geschlossen ist, muss der Parameterbereich in solchen Fällen mit dem WINDOW-Editor vergrößert werden.

6. Zusatzaufgaben

- Berechnen Sie die Bogenlänge der Rollkurve.
- Wählen Sie statt des Punktes P auf der Peripherie des kleinen Kreises den Punkt Q im Kreisinnern mit $|MQ| = 0.5 r$ oder außen mit $|MQ| = 2 r$. Bestimmen Sie die Parameterdarstellung für diese Kurven und zeichnen Sie die Kurven.
- Bestimmen Sie die Rollkurve, wenn ein Kreis auf einer horizontalen Geraden abrollt.
 - $|MP| = r$ (gemeine Zyklode)
 - $|MP| = c r$ (z.B. $c = 0.5, 2$).
- Zeichnen Sie die folgende Kurve in Polardarstellung (unter MODE/Graph Polar einstellen): $r(\theta) = 1 - \cos(\theta)$
 Durch Veränderung der Window-Koordinaten können Sie die Kurve zu einem echten (biologischen) Herzen verformen! Führen Sie eine Phasenverschiebung ein und versuchen Sie, das Herz senkrecht zu stellen. Suchen Sie eine Parameterdarstellung dieser Herzkurve (Kardioiden)?
- Stellen Sie die Rollkurven mit komplexen Zahlen dar (Polarform).

Autorin:

Dr. Johanna Schönenberger-Deuel,
 Mittelwiesstrasse 74
 CH-8708 Männedorf,
 deuel@math.ethz.ch

Service auf einen Blick

Innovative Technologie



Dank der Flash-Technologie unserer Graphikrechner TI-83 Plus, TI-83 Plus *Silver Edition*, TI-89 und Voyage™200 können Sie die bestehenden Fähigkeiten der Rechner durch Herunterladen zusätzlicher Applikationen erweitern und Ihren persönlichen Wünschen anpassen. Damit halten Sie sich alle Optionen für die Zukunft offen.

Kostenlose Ausleihe

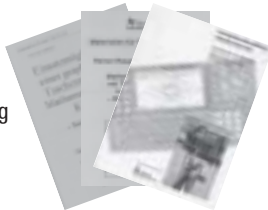
Sie möchten einen TI-Taschencomputer einschließlich Zubehör testen?

– Kein Problem! Wir leihen Ihnen Einzel-exemplare oder Klassensätze bis zu vier Wochen – kostenlos und unverbindlich!



Unterrichtsmaterialien

Zum Einsatz unserer Graphikrechner haben wir Unterrichtsmaterialien entwickelt, die Sie bei der Vermittlung der Lehrinhalte unterstützen. Über 60 Titel erhältlich!



Lehrerfortbildungen

Graphikrechner sind für viele Kollegen neu und unbekannt. Wir helfen Ihnen mit Fortbildungen, auch an Ihrer Schule! Anruf genügt!

Tel: +49 (251) 5 10 38-0;

E-Mail: tinfo@uni-muenster.de



CBL 2™/CBR™

Portables, universell einsetzbares Messwert-erfassungssystem für den naturwissen-schaftlichen Unterricht. Über 40 zusätzli-che Sensoren erhältlich. Kompatibel zu allen TI-Graphikrechnern.



TI-GRAPH LINK™

Die Verbindung zu Computer, Drucker und Internet. Liegt allen TI-Rechnern und Taschencomputern bei. Der TI-83 Plus ist auf Nachfrage auch ohne TI-Graph Link erhältlich.



TI ViewScreen™

Projizieren Sie das Display der Lehrerversion Ihres TI-Graphrechners mit ViewScreen und Over-headprojektor!



TI-Presenter™

Zur Projektion des Displays der Lehrerversion Ihres TI-Graphrechners mittels Beamer oder Fernseher.



Online-Fortbildungen

Zu den TI-Rechnern und zu Derive werden inter-netbasierte Echtzeit-Fortbildungen von T“-Deutschland angeboten. Informationen über

Fortbildung Online: www.lernnetz-sh.de/l3n/start.html,

Veranstaltungskalender: www.lernnetz-sh.de/l3n/start.html,

Mailingliste: www.lernnetz-sh.de/l3n/maillingliste.html

Allgemeine Informationen



Nehmen Sie mit unserem Customer Support Center Kontakt auf, wenn Sie technische Auskünfte benötigen oder Fragen zum Gebrauch unserer Rechner oder bezüglich einer Lehrerfortbildung haben. Auch zum Ausleihen der Rechner ist das CSC die erste Adresse:

Wir sind für Sie da: Mo – Fr, 9.00 – 17.00 Uhr

TI-CSC c/o SITEL
Woluwelaan 158
B-1831 Diegem

Tel D: +49 (6196) 975015

Fax D: +49 (6196) 975044

Tel AT: +43 (1) 50291007

Fax AT: +43 (1) 502910034

Tel CH: +41 (1) 2730688

Fax CH: +41 (22) 7100036

Allgemeine Informationen:

ti-cares@ti.com

Kostenlose Ausleihe von Graphikrechnern und Taschencomputern:

ti-loan@ti.com

Kostenloses Abonnement der TI-Nachrichten:

ti-nachrichten@ti.com

Garantie

Auf alle Schulrechner bietet Texas Instruments 2 Jahre Austauschgarantie. Sollte doch einmal etwas defekt sein, rufen Sie bitte zunächst unser CSC an. Meist kann das Problem bereits am Telefon behoben werden.

Defekte Rechner bitte dem Händler Ihrer Wahl übergeben.

education.ti.com/deutschland · education.ti.com/oesterreich · education.ti.com/schweiz
ti-cares@ti.com