

Ausgabe 2/03

Inhaltsverzeichnis

<i>W. Zappe; W. Moldenhauer:</i> Ein Sterndeuter und ineinander geschachtelte Folgen	1
<i>N. Frost:</i> Schokolade esse ich für mein Leben gern!	4
<i>E. Bichler:</i> Fraktale Geometrie und Turtle-Grafik mit dem Voyage 200	7
<i>R. Vehling:</i> Viele Wege führen zu einer Lösung (Teil 2)	9
<i>R. Hugelshofer:</i> Die Heronsche Formel für die Fläche eines Dreiecks	11
<i>K.-H. Keunecke:</i> Online-Fortbildung für Lehrkräfte bei T ³	14
<i>M. Paul:</i> Rule of 72 – Näherungsformel für die Verdoppelungszeit	15
<i>E. Malitte:</i> Mit dem Sinus auf der Spur des Mondes	17
<i>R. Schelldorfer:</i> Das Taubenproblem	19
<i>M. Harder:</i> Digitale Schaltkreissimulation auf dem Voyage 200	21
<i>H. Springer:</i> Wege zur „Bewegungsgleichung“	23
<i>M. Weber:</i> Analysis – eine Auseinandersetzung mit alten Problemen und neuen Werkzeugen	25
<i>H. Pichler:</i> Bewegungs-Simulation von Scheibenwischern	27
<i>A. Möckli:</i> Reibung	29
Literatur und Materialien für den Unterricht mit Graphikrechnern	31



Ein Sterndeuter und ineinander geschachtelte Folgen

Wilfried Zappe; Wolfgang Moldenhauer



Die Chance des Sterndeuters

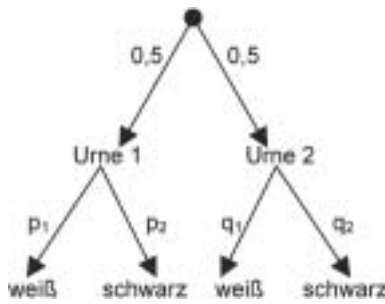
Vor langer Zeit lebte am Hofe eines Königs ein Sterndeuter, der dem König Ratschläge für seine Regierungsentscheidungen gab. Eines Tages riet der Sterndeuter, das erkrankte Lieblingspferd des Königs nicht zu behandeln, nur dann könne es wieder gesund werden. Der Stallmeister hielt sich an diese Empfehlung, aber das Pferd verstarb. Das ärgerte den König so sehr, dass er den Sterndeuter wegen des falschen Rates zu fünf Jahren Kerkerhaft verurteilte.

Nun bat der Sterndeuter seinen König um Gnade. Dieser wollte das Urteil nicht einfach abändern, dem Sterndeuter aber doch noch eine Chance geben. Er sprach deshalb zu ihm:

Ich gebe dir sieben gleichartige Kugeln, drei weiße und vier schwarze, und zwei Urnen. Du sollst die Kugeln irgendwie auf die zwei Urnen verteilen, aber so, dass keine Urne leer bleibt. Dann wird mein Hofmarschall zuerst eine der beiden Urnen auswählen und anschließend aus dieser Urne eine Kugel ziehen. Natürlich weiß der Hofmarschall nicht, welche Kugeln in welcher Urne liegen. Zieht er eine schwarze Kugel, so bleibt mein Urteil bestehen, zieht er eine weiße, so sollst du begnadigt werden und meine Tochter heiraten. Überlege dir, wie du die Kugeln verteilen willst. Du hast eine Stunde Zeit.“

(Werner Walsch in „alpha“, Berlin 23(1989) 3, S. 62)

Wir haben diese Aufgabe schon häufig Schülern gestellt mit dem Zusatz, die Geschichte zu Ende zu schreiben. Die Aufgabe lädt zum mathematischen Experimentieren und natürlich zum Fabulieren ein. Fast immer wird mit einem Baumdiagramm und verschiedenen konkreten Belegungen der Urneninhalte experimentiert, ehe eine allgemeine Lösung versucht wird:



Legt man a weiße und b schwarze Kugeln in Urne 1 mit $a + b \leq 7$, so liegen in Urne 2 genau $(3 - a)$ weiße und $(4 - b)$ schwarze Kugeln.

Damit ergeben sich folgende Pfadwahrscheinlichkeiten:

$$p_1 = \frac{a}{a+b}; p_2 = \frac{b}{a+b}; \text{ und}$$

$$q_1 = \frac{3-a}{7-(a+b)}; q_2 = \frac{4-b}{7-(a+b)}$$

Die Wahrscheinlichkeit, eine weiße Kugel zu ziehen, ergibt sich damit zu: $P(\text{„die gezogene Kugel ist weiß“}) =$

$$\frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}q_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{a+b} + \frac{3-a}{7-(a+b)} \right) \quad (*)$$

Lässt man a von 0 bis 3 und b von 0 bis 4 laufen, erfasst man alle möglichen Belegungen, ja es sind sogar zwei zu viel: Die Fälle $a = 0$ und $b = 0$, sowie $a = 3$ und $b = 4$ müssen ausgeschlossen werden, denn dann wäre jeweils eine Urne leer und das soll nicht vorkommen. Außerdem ist für diese Fälle der Term (*) nicht definiert.

Es sind also $4 \cdot 5 - 2 = 18$ Fälle zu untersuchen. Eine sehr einfache und übersichtliche Methode, diese Fälle zu begutachten, bietet der TI-89/Voyage 200, indem mit „Folge von Folge“ eine Übersicht über diese Fälle erstellt wird:

Der Term für die Wahrscheinlichkeit wird definiert und als $p(a,b)$ gespeichert.

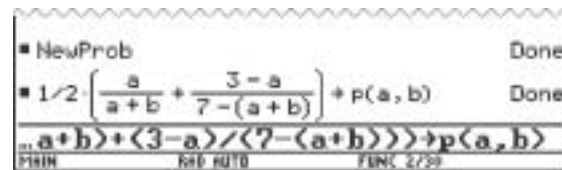


Abb. 1

Liebe Lehrerin! Lieber Lehrer!

Mit dem Inkrafttreten der neuen Rahmenrichtlinien ab dem 1. August dieses Jahres sind an niedersächsischen Gymnasien Graphikrechner ab Klasse 7 quasi verpflichtend eingeführt. Darüber hinaus wird auch der Einsatz von Computer-Algebra, Tabellenkalkulation und Dynamischer Geometrie verlangt. Diese Entscheidung markiert einen Meilenstein in der didaktisch-methodischen Entwicklung des Mathematikunterrichts in Deutschland. Der schon seit Jahren weitverbreitete Einsatz von CAS und GTR in der berufsbildenden Oberstufe und am Gymnasium in Österreich und in der Schweiz ist ohnehin hinlänglich bekannt.

Man muss kein Prophet sein, um zu erkennen, dass weitere Bundesländer dieser Entwicklung folgen werden. Die aktuellen Entwürfe der Standards sowohl auf der Ebene der Kultusministerkonferenz als auch in den einzelnen Bundesländern weisen eindeutig in diese Richtung.

„Nichts ist mächtiger, als eine Idee zur richtigen Zeit.“ (Victor Hugo)

Nach der beharrlichen Überzeugungsarbeit vieler engagierter Lehrerinnen und Lehrer, setzt sich nun allenthalben die Erkenntnis durch, dass sich mit Hilfe neuer, ständig verfügbarer Technologien lang formulierte Bildungsideale verwirklichen lassen. TIMMS und PISA haben schockierend gezeigt, dass die alten Rezepte nicht mehr den neuen Herausforderungen gewachsen sind.

Jeder, der an Bildung mitwirkt, ist nun aufgerufen, mitzutun und seinen Beitrag zu leisten, um die Ideen, die hinter den neuen Standards stecken, zu verwirklichen. Dies verlangt Mut und Zuversicht. Auch wenn man lokal noch Rückschläge einstecken müssen wird, ist die Zeit reif für Veränderung. Seien Sie der Kristallisationspunkt, um den herum sich das Netz des Aufbruchs organisiert!

Gerne begleiten wir Sie auf Ihrem Weg, die Zukunft zu gestalten.

Ihr TI Team

Zeichenerklärung:



Computer Algebra System
(TI-89, TI-92, TI-92 Plus, Voyage™ 200)



Graphische Taschenrechner
(TI-82, TI-83, TI-83 Plus, TI-83 Plus Silver Edition)



Messwerterfassungssystem
(CBL™, CBL 2™, CBR™)



PC Software
(Derive™, TI InterActive!™, Cabri Geometry II™)

Die möglichen Fälle ergeben sich numerisch als „Liste einer Liste“: Die innere Folge erzeugt die Wahrscheinlichkeiten als Liste für einen fest gewählten Wert von b und alle in Frage kommenden Werte von a. Die äußere Folge erzeugt als Liste dieser Liste eine Matrix mit den zu untersuchenden Wahrscheinlichkeiten.

Zum besseren Vergleichen lassen wir die Ergebnisse mit \diamond [ENTER] in dezimaler Form anzeigen.

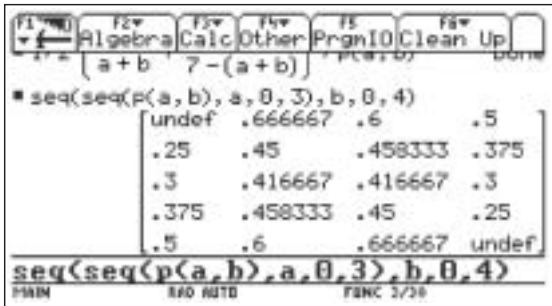


Abb. 2

Wir lesen ab, dass die größten Wahrscheinlichkeiten für a = 1 und b = 0 bzw. für a = 2 und b = 4 existieren. Was bedeutet das? Die Interpretation der Ergebnisse gelingt wohl nur, wenn man das Zustandekommen von (*) richtig verstanden hat:

a = 1 und b = 0 heißt, dass in der Urne 1 genau eine weiße Kugel und keine schwarze Kugel liegt.

a = 2 und b = 4 hat zur Folge, dass in Urne 1 zwei weiße und vier schwarze Kugeln liegen und demzufolge in Urne 2 genau eine weiße und keine schwarze Kugel enthalten ist.

Also besteht die für den Sterndeuter günstige Lösung darin, genau eine weiße Kugel in die eine und alle anderen in die zweite Urne zu legen.

Vergrößert man die Anzahl der weißen oder schwarzen Kugeln, kann es passieren, dass die Matrix nicht auf den Bildschirm passt. Angenommen, es stehen unter analogen Bedingungen zwei Urnen mit 10 weißen und 12 schwarzen Kugeln zur Verfügung. Dann würde die Wahrscheinlichkeit P(A) für das Ereignis A: „Die gezogene Kugel ist weiß.“ durch folgenden Term bestimmt werden:

$$P(A) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{a+b} + \frac{10-a}{22-(a+b)} \right)$$

Wir definieren wieder den Term für die Wahrscheinlichkeit und speichern ihn als p(a,b) ab.

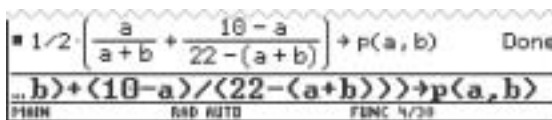


Abb. 3

Die Berechnung ergibt wie oben eine Matrix. Sie wird unter dem Namen „ma1“ gespeichert. Im Data-Matrix-Editor finden wir sie unter Type „Matrix“ wieder.

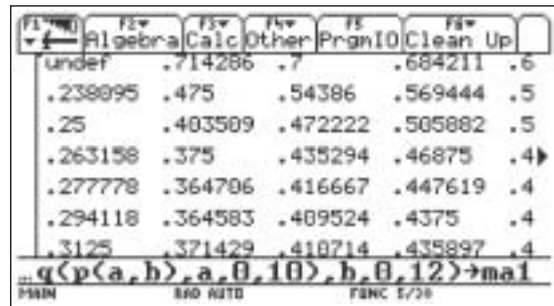


Abb. 4

Nach Durchsicht der Elemente erhält man als Ergebnis, dass für a = 1 und b = 0 sowie für a = 9 und b = 12 die Wahrscheinlichkeit P(A) maximal ist.

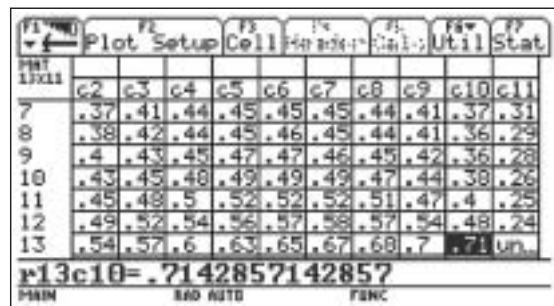


Abb. 5

(Der besseren Übersicht wegen wurde die Zellenbreite verkleinert.)

Also besteht auch hier die günstigste Verteilung für den Sterndeuter darin, genau eine weiße Kugel in die eine und alle anderen Kugeln in die zweite Urne zu legen.

Diese beiden Zahlenbeispiele (drei weiße, vier schwarze bzw. 10 weiße, 12 schwarze Kugeln) lassen die Vermutung aufkommen, dass es für den Sterndeuter auch bei w weißen und s schwarzen Kugeln am günstigsten ist, die Kugeln so auf die Urnen zu verteilen, dass genau eine weiße in die erste und alle anderen Kugeln in die zweite Urne gelegt werden.

Diese Vermutung soll hier der Vollständigkeit halber nachgewiesen werden.

Legt man a ≤ w weiße und b ≤ s schwarze Kugeln in die erste Urne, so liegen in der zweiten Urne w - a weiße und s - b schwarze. Die Wahrscheinlichkeit, eine weiße Kugel zu ziehen, ergibt sich analog zu den bisherigen Überlegungen zu

$$P(a, b) = P(\text{„die gezogene Kugel ist weiß“}) = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{a+b} + \frac{w-a}{w+s-(a+b)} \right)$$

Es gilt aus Symmetriegründen und wie man durch Einsetzen bestätigt:

$$P(a, b) = P(w - a, s - b) \quad (**)$$

Nun wird bewiesen, dass P nur für a = 1 und b = 0 maximal ist. (Bzw. wegen (**)) für a = w - 1 und b = s.) Dazu wird gezeigt, dass P(a, b) ≤ P(1, 0).

Wegen der Symmetrie von (**) genügt es, den Nachweis

für $a \leq \left\lfloor \frac{w}{2} \right\rfloor$ und $b \leq \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor$ zu führen.

In diesem Fall ist $w + s \geq 2 \left(\left\lfloor \frac{w}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor \right) \geq 2(a + b)$. (***)

Der Rechner bietet uns für den Beweis keine große Hilfe, denn er formt die Differenz $P(1, 0) - P(a, b)$ nicht im erforderlichen Maße um (s. Abb. 6).

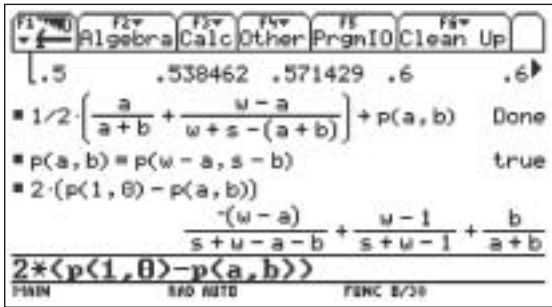


Abb. 6

Deshalb ist händisches Rechnen angesagt:

$$\begin{aligned} 2 \cdot [P(1,0) - P(a,b)] &= \\ &= \frac{b}{a+b} - \frac{w-a}{s+w-a-b} + \frac{w-1}{s+w-1} = \\ &= \frac{b}{a+b} + \frac{(w-1) \cdot (s+w-a-b) - (w-a) \cdot (s+w-1)}{(s+w-1) \cdot (s+w-a-b)} = \\ &= \frac{b}{a+b} + \frac{a \cdot s + b \cdot (1-w) - s}{(s+w-1) \cdot (s+w-a-b)} = \\ &= \frac{b}{a+b} + \frac{a \cdot s + b \cdot (1-w-s) + b \cdot s - s}{(s+w-1) \cdot (s+w-a-b)} = \\ &= \frac{b}{a+b} - \frac{b}{s+w-a-b} + s \cdot \frac{a+b-1}{(s+w-1) \cdot (s+w-a-b)} \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir:

$$= \frac{1}{2} \left(b \cdot \frac{s+w-2(a+b)}{(a+b)(s+w-a-b)} + s \cdot \frac{a+b-1}{(s+w-1)(s+w-a-b)} \right)$$

Wegen (***) und $a + b \geq 1$ ist die Summe in der Klammer ≥ 0 . Ferner liest man ab, dass das Gleichheitszeichen nur gilt, wenn $b = 0 \wedge a + b - 1 = 0$, d.h. $a = 1 \wedge b = 0$ ist. Damit ist aber die Vermutung bewiesen.

Wie wird die Geschichte zu Ende erzählt? Nun, da werden von den Schülern viele Varianten angeboten. Eine Geschichte von René soll hier den Abschluss bilden:

Der Sterndeuter überlegte lange Zeit, wie er die Kugeln verteilen sollte, bis er zu dem Entschluss kam, eine weiße Kugel in die eine und den Rest in die andere Urne zu füllen. Der König, der sich schon als Gewinner sah, ließ den Hofmarschall nach Ablauf der Frist eine Kugel ziehen und siehe da, der Sterndeuter gewann. Daraufhin war der König so verärgert (und fühlte sich wie so viele Mächtige nicht mehr an sein Versprechen gebunden), dass er den Sterndeuter in eine seiner überdimensionalen Steinschleudern spannen und auf den Mond schießen ließ. Seitdem hat den Sterndeuter nie wieder jemand gesehen und damit müsste nun auch bewiesen sein, dass die Amerikaner nicht die Ersten auf dem Mond waren.

Autoren:


Dr. Wilfried Zappe
Schleusinger Str. 4, D-98693 Ilmenau
wilfried.zappe@onlinehome.de

Dr. Wolfgang Moldenhauer
ThILLM, H.-Heine-Allee 2-4, D-99438 Bad Berka
WMoldenhauer@thillm.thueringen.de

Schokolade esse ich für mein Leben gern!

Einführung in die Testtheorie unter Nutzung des TI 83 Plus in 3 Doppelstunden

Norbert Frost

 Die Grundidee zum im Folgenden beschriebenen Einstieg in die Testtheorie entstammt einem Artikel der Zeitschrift „mathematiklehren“ (Bd.85, Dez.1997) der beiden Autoren Dr. W. Riemer und W. Petzold. Tabellen zu Computersimulationen wurden aus dem Artikel übernommen und im Unterricht integriert.

Der Schokoladentest – Teil 1

Vier Sorten (Alpen)Vollmilchschokolade (Milka ‚M‘, Lind ‚L‘, Alpia ‚A‘ und RitterSport ‚R‘) wurden geraspelt und auf vier nummerierten Tellern auf verschiedenen Tischen im Unterrichtsraum platziert. Jeder Schüler erhielt zum Test, ob er die Marke am Geschmack erkenne, einen Löffel und konnte die Sorten (wiederholt) probieren, um dann seine Entscheidung auf einem Zettel festzuhalten (z.B. 1: A; 2: R; 3: L; 4: M).



Abb. 1

Jede Sorte trat nur einmal auf. Die Zettel wurden von mir eingesammelt und ‚hochfeierlich‘ in einem verschlossenen und versiegelten Umschlag verwahrt. Bereits während des Probierens setzte bei den Schülern eine rege Diskussion über die Qualität, die Konsistenz, die Farbe, die Süße, etc. ein.

Ohne weitere Rückfragen und Arbeitsaufträge wählte ich als Tafelanschrieb die folgende Frage

„Sind wir alle Nullschmecker?“

Empörung wurde laut, die Hälfte des Kurses war der Meinung mindestens 2 Schokoladensorten richtig getippt zu haben, dabei wurde der eigene häufige Schokoladenkonsum sowie die Besonderheiten der einen oder anderen Sorte genannt. Ich forderte einzelne Schüler auf, Schätzwerte über die Trefferzahl anzugeben. Sechs Ergebnisse wurden in einer Tabelle an der Tafel festgehalten. Anschließend mussten alle Schüler ein Votum für einen dieser Vorschläge abgeben.

Vorschlag eines Schülers	Geschätzte Trefferzahl in Prozent					Votum (21 Schüler)
	0	1	2	3	4	
1 Alicija	5	25	50	15	5	-
2 Peter	10	25	30	25	10	-
1 Alicija*	15	27	50	0	8	3
2 Peter*	10	25	55	0	10	3
3 Henning	15	25	40	0	20	7
4 Aileen	15	30	50	0	5	6
5 Pamela	12	36	44	0	8	1
6 Florian	20	30	42	0	8	1

Tab.1 Geschätzte Wahrscheinlichkeiten

Die Schätzwerte der Tabelle spiegelten die vorher in der Diskussion aufgetretenen Selbsteinschätzungen der Schüler wieder. Ich kehrte zurück zur Tafelüberschrift und forderte die Schüler auf, eine Erklärung für einen „Nullschmecker“ zu geben. Schnell wurde klar, dass es sich um ein ‚zufälliges Raten‘ handeln musste. Es wurde die Idee entwickelt, das ‚Schmecken der Schokoladensorten‘ als Zufallsexperiment aufzufassen und die Wahrscheinlichkeit jeder beliebigen Reihenfolge zu ermitteln.

An jeden Schüler wurden nun 4 Karten (Kreuz Kr, Pik P, Herz H und Karo Ka) verteilt. Nach kurzer Überraschung (Was haben denn die Karten mit der Schokolade zu tun?) und Diskussion ergab sich, dass der Schokoladentest als zufälliges Experiment nun mit den Karten simuliert werden konnte. Jeder Schüler mischte seine Karten, deckte nacheinander je eine Karte auf und verglich mit einem Ergebnis, das ich zufällig gezogen und an die Tafel geschrieben hatte, z. B. P Ka Kr H.

Das Experiment wurde mehrfach wiederholt und die Ergebnisse wurden wiederum in einer Tabelle (Tab.2) festgehalten. Nach Diskussion über Sinn und Zweck der Simulation regte die Schülerin Aileen an, die Schokoladensorten mit den Buchstaben M, L, A und R abzukürzen und alle Kombinationsmöglichkeiten aufzuschreiben, um dann die Wahrscheinlichkeiten zu ermitteln.

Im Schüler-Lehrer-Gespräch wurde als zentrale Idee der Stunde herausgearbeitet, dass Vergleichsmaßstäbe notwendig seien, um eine Auswertung aller Daten im Hinblick auf das „Nullschmeckerprinzip“ zu ermöglichen und um festzustellen, wie gut der eigene Geschmackstest denn wohl gewesen ist. Dazu sollten in jedem Fall die Mittelwerte (Erwartungswerte) berechnet werden.

Die Hausaufgabe bestand aus 2 Teilen:

1. Ermittlung aller Erwartungswerte μ und Standardabweichungen σ der beiden Tabellen (Tab.1 und Tab.2), Berechnungen der jeweiligen 1- σ - Intervalle, Ergänzung der Tabellen
2. Aufschreiben aller Kombinationsmöglichkeiten und Auszählen der Trefferzahl der Schokoladensorten bei einem beliebigen, selbstdefinierten ‚Hauptgewinn‘ z. B. MLAR.

Der Schokoladentest – Teil 2

Um die Ergebnisse der Hausaufgabe in kompakter Form zusammenzustellen, wurde ein Arbeitsblatt verteilt, auf dem alle Tabellen der letzten Stunde notiert und die Hausaufgabe vorbereitet war. Die Schüler hatten den Auftrag, alle fehlenden Werte für μ und σ zu ergänzen bzw. neu zu berechnen. Aus Platzgründen sind an dieser Stelle nur einige Tabellen aufgeführt, im Unterricht entwickelte Lösungen sind bereits eingearbeitet.

Treffer	0	1	2	3	4	Anz.Tr.	μ	σ
Sim. 1	9	6	5	0	1	20	0,95	1,04
Sim. 2	11	5	4	0	1	17	0,81	1,05
Sim. 3	8	9	4	0	0	17	0,81	0,73
Sim. 4	10	4	5	0	2	22	1,05	1,25

Tab. 2 4 Kartensimulationen mit je 21 Schülern

Die Auswertung der Daten erfolgte durch schriftliche Berechnung oder Nutzung der 1-Variablen-Statistik des TI83Plus, die Ergebnisse wurden graphisch dargestellt und beurteilt (in Abb. 2 ist Sim.4 dargestellt).

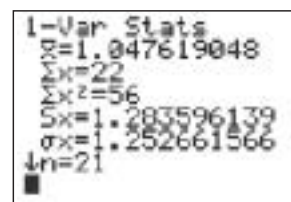


Abb. 2

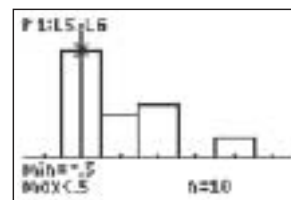


Abb. 3

*Nachdem die beiden ersten Schüler die Schätzwerte angegeben hatten und der Schüler Nr. 3 durch Argumentation belegte, dass genau 3 richtig bestimmte Schokoladensorten nicht möglich sein konnten, erhielten die Ersten die Möglichkeit ihre Schätzwerte zu korrigieren.

Simulation	Trefferquote T (mit je 25 Personen)		
	$T \leq 0,64$	$T \geq 1,36$	$0,64 < T < 1,36$
1	1	1	98
2	5	5	90
3	3	4	93
4	1	6	93
5	0	2	98
6	3	3	94
7	3	2	95
8	2	5	93
9	1	5	94
10	0	1	99

Tab. 3 10 Simulationen mit je 100 „Nullschmeckergruppen“

ALMR	1	LAMR	2	MALR	4	RALM	2
ALRM	0	LARM	1	MARL	2	RAML	1
AMLR	2	L		M		R	
A		L		M		R	
A		L		M		R	
A		L		M		R	

Tab. 4 Permutationen und Sortentreffer bei dem Hauptgewinn MALR (zufällig)

Arbeitsauftrag: Vervollständige die Daten!

Treffer	0	1	2	3	4	
Wahrscheinlichkeit	$\frac{9}{24} = 37,5\%$	$\frac{8}{24} = 33,3\%$	$\frac{6}{24} = 25\%$	0%	$\frac{1}{24} = 4,2\%$	$\mu=1$ $\sigma=1$
Erw.abs. Häufigk.	7,875	7	5,25	0	0,875	21 Sch

Tab. 5 Wahrscheinlichkeitsverteilung eines „Nullschmeckers“

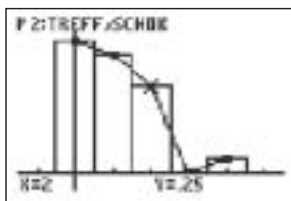


Abb. 4

Darstellung der Wahrscheinlichkeitsverteilung für 4 Schokoladensorten. Für alle selbst erstellten Daten wurde außerdem das jeweilige 1- σ - Intervall berechnet.

Zahlreiche Auswertungen und Berechnungen waren nun durchgeführt worden, aber immer noch stand kein Ergebnis des eigenen „Testschmeckens“ fest. Die Spannung war kaum zu überbieten.

Nach kurzer Diskussion unter Einbeziehung der Ergebnisse der Tab. 3 legten wir fest, dass der Erwartungswert unseres Tests in jedem Fall außerhalb des Intervalls $[0,65 \dots 1,35]$ liegen sollte. Wäre dies nicht der Fall, so müssten wir uns selbst zu den „Nullschmeckern“ zählen.

Ich hatte keine große Erwartung an ein positives Schülerergebnis, da ich selbst kaum eine Schokoladensorte am Geschmack erkennen konnte. Um so größer war die Überraschung, als das Briefkuvert geöffnet wurde und die Ergebnisse mit dem ‚Hauptgewinn‘ **LARM** verglichen wurden (Teller 1: Lindt **L**, Teller 2: Alpia **A**, Teller 3: Ritter Sport **R**, Teller 4: Milka **M**).

Treffer	0	1	2	3	4
Abs. Häufigkeit	5	3	7	0	6
Rel. Häufigkeit	23,8%	14,3%	33,3%	0%	28,6%

Hierbei ist $\mu = 1,95$ und $\sigma = 1,49$.

Damit war klar, dass die Schüler des Kurses als ‚Profitester‘ demnächst in der Fernsehsendung „Wetten Dass“ auftreten wollten.

Der Schokoladentest – Teil 3

Das vorliegende Testverfahren wurde genutzt, um die Begriffe H_0 - und H_1 - Hypothese einzuführen.

$$H_0: \mu_0 \in [0,65; 1,35]$$

$$H_1: \mu_1 \notin [0,65; 1,35] \Leftrightarrow \mu_1 > 1,35$$

Informationen mit Diskussion zu links- und rechtsseitigen Testverfahren schlossen sich an. Da Grundwahrscheinlichkeiten bei diesem Test nicht vorhanden waren und das Verfahren – basierend auf Berechnung und Vergleich von Erwartungswerten – sehr komplex war, bot sich mit der im Folgenden angegebenen Aufgabenstellung eine didaktische Reduktion an.

Aufgabe:

Ein Schokoladenhersteller möchte seine Marktposition im oberen Preissegment ausbauen. Eine neu entwickelte Schokoladensorte von ‚noch besserer sensorischer Qualität‘ soll weitere Käuferschichten gewinnen.

Die neue Sorte soll im Vergleich zu aktuellen sehr guten haus-eigenen Sorte getestet werden.

In einem Versuch werden 3 ‚Testschmeckergruppen‘ mit je 100 Personen aufgefordert, beide Sorten zu vergleichen.

In der 1. Gruppe entscheiden sich 50 Personen, in der 2. Gruppe 40 Personen und in der 3. Gruppe 60 Personen für die neue Sorte.

- Wie viele Personen müssen sich mindestens für die neue Sorte entscheiden, damit sie auf den Markt gebracht wird.
- Welche Risiken bestehen für den Hersteller bei einer Fehlentscheidung?

Lösungen:

Nach interaktivem Schülergespräch wurde festgelegt, dass sich mehr als die Hälfte aller Testpersonen für die neue Sorte entscheiden müssten.

Da nur 2 Sorten gegeneinander konkurrierten, wurden folgende Hypothesen festgelegt.

$$H_0: p = 0,5$$

$$H_1: p > 0,5$$

Die Binomialverteilung wurde benutzt, um die Ergebnisse zu berechnen:

$$P(H_1 | H_0: p = 0,5) = P(X > 50) = 1 - P(X \leq 50) = 1 - F(100; 0,5; 50) = 0,46$$

1-binomcdf(100, .5, 40)	.4602053621
1-binomcdf(100, .5, 60)	.9715560336
	.0176001

Abb. 5

Die Lösungen wurden mit dem GTR ermittelt und interpretiert. Anhand der Ergebnisse war klar, dass das Risiko einer Markteinführung des neuen Produktes bei nur 40 positiv urteilenden 'Testschmeckern' sehr groß war. Die Begriffe „Irrtumswahrscheinlichkeit“, „Signifikanzniveau“ und „ α -Fehler“ wurden eingeführt. Auch das an sich gute Ergebnis des α -Fehlers von ca. 1,8 % bei 60 positiv urteilenden 'Testschmeckern' wurde kritisch hinterfragt. Nicht nur mathematische Aspekte bzgl. der zu geringen Stichprobengröße von $n = 100$ spielten eine Rolle, sondern auch wirtschaftliche Fragen wurden besprochen.

Im Falle einer Fehlentscheidung wurden u.a. folgende Argumente in die Diskussion eingebracht:

- Imageverlust der Firma
- Zurückgehende Verkäufe der übrigen Produkte
- Kostenaspekte (Transportkosten, Verwaltungskosten, Gerichtskosten, Anwaltskosten, Regressansprüche, ...)
- Gesundheitliche Risiken (Die neu verwendete Kakaosorte erweist sich im Nachhinein als gesundheitsgefährdend) ...

Mit Hilfe der Funktion $f(x) = 1 - F(100; 0,5; x)$ wurden weitere α -Fehler tabellarisch und graphisch untersucht und ausgewertet.

X	V_1
57	.06661
58	.04421
59	.02894
60	.0176
61	.01099
62	.00692
63	.00322

X=60

Abb. 6

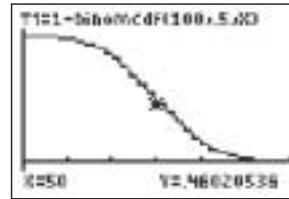


Abb. 7

Als Hausaufgabe schlossen sich weitere Untersuchungen mit größerer Testpersonenzahl und Benutzung der Normalverteilung an ($n = 500$, $n = 1000$, $n = 5000$...). Der kritische Wert k sollte jeweils für die α -Fehler von 0,05 und 0,01 ermittelt werden.

Autor:

Norbert Frost
Lange Straße 1a
D-31655 Stadthagen
Schule: Ratsgymnasium Stadthagen
norbert.frost@teleos-web.de

Fraktale Geometrie und Turtle-Grafik mit dem Voyage 200

Ewald Bichler



Die „Blütezeit“ der fraktalen Gebilde, zu der auch Fernsehsendungen und Zeitungsartikel mit derartigen Fragestellungen an der Tagesordnung waren, ist schon vorbei. Leider blieb es meist bei der kurzen Begeisterungswelle, so dass fraktale Geometrie schon fast in Vergessenheit geraten ist. Doch handelt es sich hierbei um einen Themenbereich, der gerade mit Schülerinnen und Schülern hervorragend erschlossen werden kann, sowohl auf anschaulicher Ebene (*Konstruktion von Fraktalen*) als auch auf eher theoretischer Ebene (*mathematische Untersuchung von Fraktalen, fraktale Dimension, Längenbetrachtungen*).

Die nachfolgend dargestellten Verfahren beruhen auf einem von mir durchgeführten Unterrichtsprojekt in einer 9. Jahrgangsstufe. (vgl. [1])

In diesem Artikel soll eine Beschränkung auf das Visualisieren von Fraktalen mithilfe des Grafikrechners Voyage 200 erfolgen. Natürlich treffen diese Ausführungen auch auf den TI 92 zu.

Ein hervorragendes und sehr einfach zu erläuterndes Konzept zur Visualisierung von Fraktalen ist das Konzept der Turtle-Grafik. Am Bildschirm steht eine virtuelle Turtle (Schildkröte) zur Verfügung, die über einen Zeichenstift verfügt. Nun kann man der Turtle Kommandos geben der Art „Gehe eine Strecke der Länge s vorwärts“, „Drehe dich um α Grad“, etc. Während die Turtle über den Bildschirm marschiert, kann sie den Zeichenstift auf das Papier (d.h. den Bildschirm) drücken und dabei zeichnen oder auch nicht.

Dieses Konzept lässt sich Schülerinnen und Schülern jeder Altersstufe schnell und anschaulich vermitteln.

Turtle-Grafik steht z.B. als kostenlose Windows-Software oder in alten Turbo Pascal Versionen zur Verfügung, sie kann jedoch auch leicht selbst implementiert werden.

Eine einfache Turtle-Grafik Version habe ich in Anlehnung an [2] auf dem Voyage 200 implementiert und erweitert. Die Vorgehensweise dabei würde den Rahmen dieses Artikels sprengen, hierzu sei auf [3] verwiesen. Die Turtle-Implementation nutzt den Grafikschilder des Voyage 200 und zwar nicht die

Pixelkoordinaten, sondern die Koordinaten des im WINDOW-Fenster festgelegten Koordinatensystems. Dort legt man die Längeneinheiten (LE) für das Grafikfenster fest.

Im Folgenden soll kurz die Konstruktion der Koch-Kurve erläutert werden. Dazu sind wenige Befehle aus dem Befehlssatz der Turtle-Grafik nötig, so der Befehl „forward(s)“, der die Turtle eine Strecke der Länge s (in LE) vorwärts bewegt, der Befehl „turn(α)“, der die Turtle um den Winkel α (im Gradmaß) im mathematisch positiven Sinn gegen ihre aktuelle Blickrichtung dreht, sowie der Befehl „pendown()“, der den Zeichenstift aufs Papier setzt.

Es gibt mehrere Wege, die Koch-Kurve mit Schülerinnen und Schülern zu erarbeiten, ich möchte mich hier auf den rekursiven Weg unter Einbeziehung der Rekursionstiefe stützen.

Zunächst betrachte man folgende Skizzen, die das Konstruktionsverfahren der Koch-Kurve veranschaulichen:

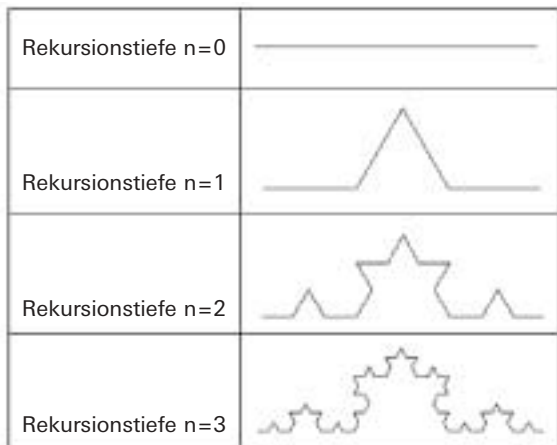


Abb. 1

Ist die Rekursionstiefe gleich 0, so soll unser Programm eine Strecke der Länge s zeichnen. Ist die Rekursionstiefe ungleich 0, so muss anstelle jedes geradlinigen Streckenabschnittes eine Koch-Kurve der vorgehenden Rekursionstiefe treten.

Der Programmcode sieht folgendermaßen aus:

```

koch(s,n)
Prgm
If n = 0 Then
  forward(s)
Else
  koch(s/3,n-1)
  turn(60)
  koch(s/3,n-1)
  turn(-120)
  koch(s/3,n-1)
  turn(60)
  koch(s/3,n-1)
EndIf
EndPrgm
    
```

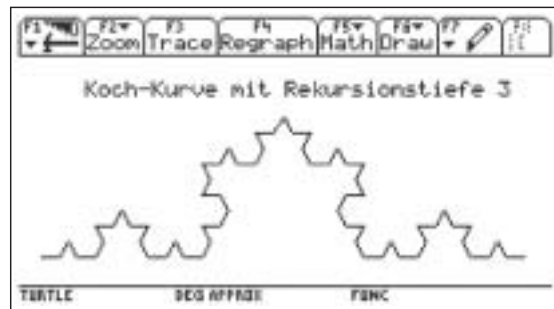


Abb. 2

Auf dem Schirm des TI lässt sich die schrittweise Entstehung der Koch-Kurve hervorragend beobachten.

Mit dieser Koch-Kurve kann man nun einige interessante Änderungen anstellen. So könnte man den Schülerinnen und Schülern den Auftrag erteilen, die Grundfigur (d.h. Drittelung der Strecke und Errichtung eines gleichseitigen Dreiecks) abzuändern, so wäre es denkbar, anstelle des gleichseitigen Dreiecks ein Quadrat zu errichten. Auf diese Art und Weise gelangt man zur sog. quadratischen Koch-Kurve.

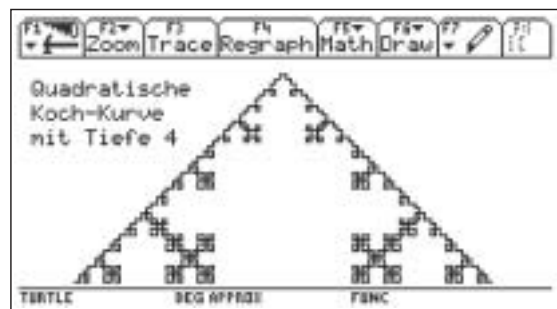


Abb. 3

Natürlich ist es auch möglich, die Drittelung der Strecke zu ändern und dies mit der Abänderung des gleichseitigen Dreiecks zu kombinieren. Der Einfallsreichtum der Schülerinnen und Schüler bringt hier viel Interessantes zu Tage.

Einmal in das Turtle-Grafik Konzept vertieft, lassen sich auch andere interessante Fraktale wie z.B. der fraktale Baum oder die Drachencurve erzeugen. Hierzu sei auf [3] verwiesen, als kurzer Eindruck seien noch die Screenshots gezeigt:

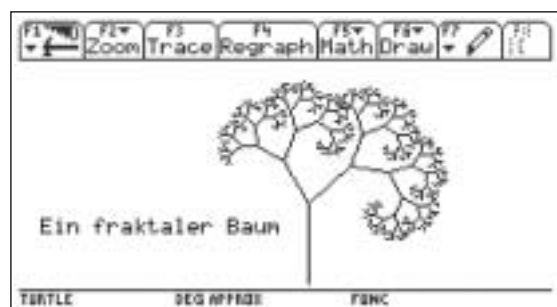


Abb. 4

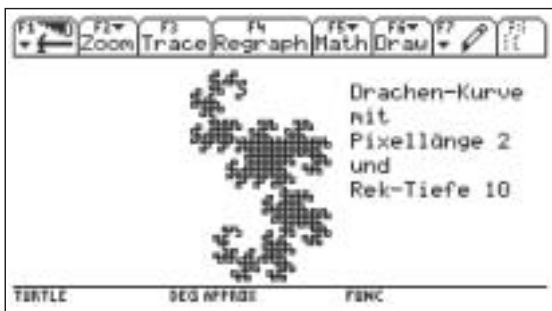


Abb. 5

Literatur:

- [1] <http://www.hans-leinberger-gymnasium.de/fachschaften/mathematik/ti92p/index.htm>

- [2] ALDER Andrea u.a.. **Rekursives Programmieren.** Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, 1995.
- [3] BICHLER Ewald. **Turtle-Grafik und fraktale Geometrie mit dem Voyage 200.** TI-Materialienseite, Rubrik Voyage200/Abhandlungen; von dort kann auch das Programmpaket herunter geladen werden
- [4] BOSTELMANN Michael. **Einführung in die Fraktale.** TI Nachrichten 2/2002.

Autor:

StR z.A. Ewald Bichler
 Moosstraße 34b, D-84030 Ergolding
 Schule: Hans-Leinberger-Gymnasium
 Jürgen-Schumann-Straße 20, D-84034 Landshut
 ewald.bichler@gmx.de bzw. mathematik.hlg@gmx.de

Viele Wege führen zu einer Lösung! (Teil 2)

Reimund Vehling



Rückblick

In ersten Teil dieses Beitrags (s. TI-Nachrichten, 1/03) war vom ruchlosen Mord an Eddi dem Wiesel und der kriminologischen Untersuchung mit Hilfe eines CAS berichtet worden. Dabei war der Verdacht, der auf Eddi's Freundin Clare wies, nicht zweifelsfrei ausgeräumt worden. Der Todeszeitpunkt von Eddi lag mit 22:50Uhr knapp in einem Zeitraum für den Clare kein Alibi hatte, denn sie war zuletzt um 22:45 Uhr in einer Bar gesehen worden.

Wie könnte es weitergehen?

Jetzt könnte eine Verfeinerung des Modells vorgenommen werden. Es soll nun untersucht werden, was passiert, wenn die Umgebungstemperatur nicht konstant ist. (Wäre das nicht ein Thema für eine Facharbeit?)

Um Datenmaterial zu bekommen, kann man das Internet zu Rate ziehen. Ich wurde z.B. bei der Adresse <http://stud-www.uni-marburg.de/~Ths/t2.htm> fündig, der Wetterseite der Theodor-Heuss-Schule in Marburg. Die Temperaturkurve vom 24. 07 - 31. 07. 99 läßt den Ansatz eines linearen Abfalls (hier um 1° je Stunde) als sinnvoll erscheinen.

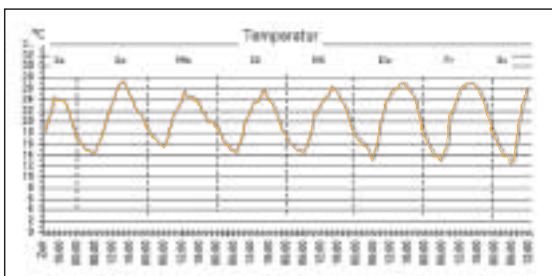


Abb. 1

Aus der konstanten Umgebungstemperatur C wird nun $C(t) = C_0 - m \cdot t$. Mit der mitternächtlichen Temperatur von 20° und dem Abfall von 1° pro Stunde ergibt sich $C(t) = 20 - \frac{1}{60} \cdot t$.

Die im ersten Teil benutzte Rekursionsformel muss nun verändert werden:

$$T_n = T_{n-1} \cdot (1 - k \cdot \Delta t) + k \cdot C \cdot \Delta t = T_{n-1} - k \cdot (T_{n-1} - C) \cdot \Delta t$$

Mit dem Zeitschritt $\Delta t = 1$ ergeben sich daraus im CAS die beiden Rekursionsgleichungen u2 und u3:

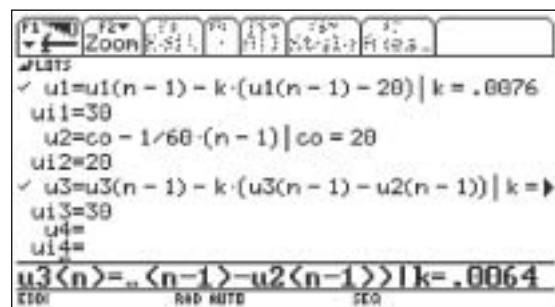


Abb. 2

Dargestellt sind hier die beiden Graphen u1 (C = konst) und u3 (C nimmt linear um 1° je Stunde ab) für $0 \leq t \leq 120$ (min). Die Konstante k hat für u1 den Wert 0,0076 (s. Teil 1) und wurde für u3 experimentell so bestimmt, dass $u3(120) \approx 24$ gilt. Dies ist in etwa für $k=0,0064$ der Fall.

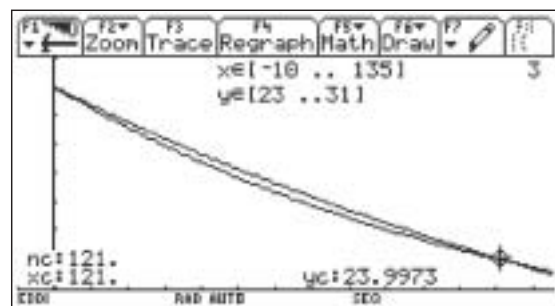


Abb. 3

In diesem Temperaturbereich ist kein nennenswerter Unterschied erkennbar.

Eine einfache Anfangspunktverschiebung von 30°C auf 37°C ist im zweiten Fall nicht möglich, da die Temperatur zur Todeszeit unbekannt ist. In der Gleichung $C(t) = C_0 - \frac{1}{60} \cdot t$ kann somit C_0 nicht angegeben werden.

Als Rettung bietet sich die Differenzialgleichung an. Ihre Lösung kann m.E. vorgegeben oder (evtl. mit Hilfen, z.B. Variation der Konstanten, ...) von leistungsfähigen Schülern erbracht werden. Das Ergebnis sieht zwar kompliziert aus, die einzelnen Rechenschritte sind aber nachvollziehbar.

Gegeben sei also die inhomogene, lineare DGL erster Ordnung

$$T'(t) = -k \cdot (T(t) - (C_0 - m \cdot t)), \text{ mit } T(0) = T_0.$$

$$\text{Dann gilt: } T(t) = (T_0 - C_0 - \frac{m}{k}) \cdot e^{-kt} + C_0 - m \cdot t + \frac{m}{k}.$$

Die Lösung sollte interpretiert und überprüft werden (Einsetzen in die DGL).

Folgende Fragen drängen sich auf:

- Was erhält man für $T(0)$?
- Was liefert eine konstante Umgebungstemperatur?
- Was passiert bei einem Temperaturanstieg?
- Wie sehen die zugehörigen Graphen aus (Klassifizierung)?
- Was passiert für $t \rightarrow \infty$?
- Wie groß ist der Fehler, wenn man konstante Umgebungstemperatur voraussetzt?

Mit den Anfangsbedingungen $T_0 = 30$; $C_0 = 20$ und $m = \frac{1}{60}$ folgt:

$$T(t) = (10 - \frac{1}{60k}) \cdot e^{-kt} + 20 - \frac{1}{60}t + \frac{1}{60k}$$

Wir untersuchen dazu den von k abhängigen Term $T(120)$. Aus der Nebenbedingung $T(120) = 24$ erhält man den Wert für k .

Im CAS benutzen wir für den Term $T(120)$ die Funktion $g(x)$ mit der Variablen x statt k .

Zum Lösen der Gleichung greifen wir auf die Funktion `nsolve` mit einer durch grobes Probieren bestimmten Anfangsnäherung von 0,01 für x zurück. Versucht man die Gleichung mit `solve` zu lösen, so führt das zu einer sehr langen Rechenzeit mit dem Hinweis in der Statuszeile, dass die Lösung möglicherweise doch nicht korrekt ist.

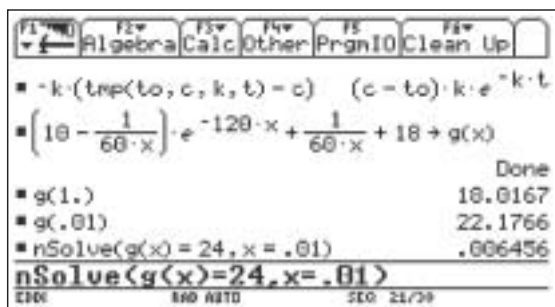


Abb. 4

Graphisches Lösen der Gleichung liefert ebenso $x = 0.006456$. Das ist unser gesuchter k -Wert.

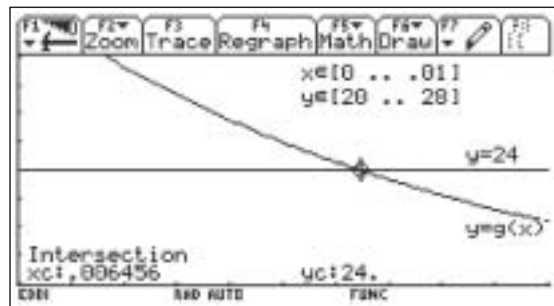


Abb. 5

Schließlich stellen wir die Graphen der exakten Lösung für konstante Umgebungstemperatur und der exakten Lösung bei einer um 1°C je Stunde abfallenden Umgebungstemperatur in einem gemeinsamen Schaubild dar.

Dabei verwenden wir für die Temperaturkurven die Gleichungen für $T(t)$ mit den jeweils berechneten Konstanten:

$$y_5 = 10 \cdot 0,9924^x + 20 \quad (\text{vergl. Teil 1})$$

$$y_6 = T(x), \text{ wobei } k = 0,006456$$

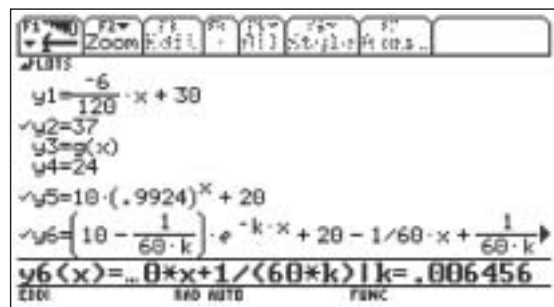


Abb. 6

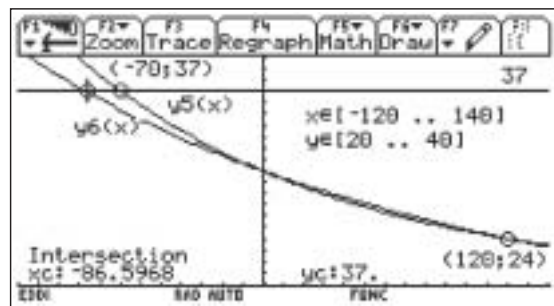


Abb. 7

Der Graph für den Fall konstanter Umgebungstemperatur liegt oberhalb des Graphen mit veränderlicher Umgebungstemperatur. Dies kann nicht nur festgestellt werden, sondern mit Hilfe des Newtonschen Abkühlungsgesetzes auch begründet werden: Da im zweiten Fall die Differenz zwischen der Temperatur des Körpers und der Umgebungstemperatur vor Mitternacht kleiner ist als im 1. Fall, ist die Änderungsrate T' im 2. Fall betragsmäßig kleiner.

Auf unser kriminalistisches Ausgangsproblem angewandt bedeutet dies, dass Eddis Tod bei linearer Temperaturabnahme der Umgebungstemperatur ca. 87 Minuten vor Mitternacht eintrat. Er ist damit 17 Minuten früher anzusetzen, als bei konstanter Umgebungstemperatur, wo Eddi ca. 70 Minuten vor Mitternacht verstarb.

Die im ersten Teil noch stark in Verdacht geratene Clare wird durch das neue Temperaturmodell stark entlastet. Eddis Todeszeitpunkt liegt jetzt bei 22:33 Uhr. Zu dieser Zeit war Clare aber noch in der Bar!

Die Fragen hören trotzdem nicht auf!

- Was passiert bei periodischen oder komplizierteren Temperaturverläufen?
- Und die vielleicht wichtigste Frage: Wie geht eigentlich die Polizei vor?

Viel Spaß beim Experimentieren und Problemlösen!

Autor:

StD Reimund Vehling
 r.vehling@t-online.de
<http://r.vehling.bei.t-online.de>

Die Heronsche Formel für die Fläche eines Dreiecks

René Hugelshofer



Das folgende Beispiel einer erprobten Unterrichtssequenz (mit Prüfungsaufgaben) zeigt,

- wie Schülerinnen und Schüler mit Hilfe des CAS und einer knappen Anleitung in Form eines Arbeitsblattes den Beweis der Heronschen Formel selbständig durchführen können, was von Hand für die meisten Schülerinnen und Schüler recht schwierig wäre
- wie die Heronsche Formel als Funktionsbaustein verwendet werden kann (funktionales Denken)
- wie die bisher üblichen reinen Berechnungsaufgaben zur Heronschen Formel durch anspruchsvolle, CAS-gerechte Aufgaben ersetzt werden können, welche zum Nachdenken und Vertiefen der Mathematik anregen.

Dieser Artikel ist Teil einer T³-Publikation in englischer Sprache einer europäischen CAS-Arbeitsgruppe. Das Buch wird in Kürze unter dem Titel „Cases for CAS“ erscheinen.

Arbeitsblatt Heronsche Formel (2-3 Lektionen)

Ein Dreieck kann aus den 3 Seiten konstruiert werden, damit ist auch seine Fläche bestimmt. Der griechische Mathematiker Heron von Alexandrien hat folgende Berechnungsformel publiziert:

Die Heronsche Flächenformel

$$A_{ABC} = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)} \text{ mit}$$

$$s = \frac{a + b + c}{2} \text{ (s = halber Umfang)}$$

Aufgabe 1

Speichere die obige Formel unter heron(a,b,c)! (Zusatzbedingung mit |)

Berechne die Fläche des rechtwinkligen Dreiecks mit Seiten 3, 4, 5.

Berechne die Fläche einiger anderer Dreiecke (Seiten selber wählen). Deute allfällige Fehlermeldungen.

Berechne die Seite c eines Dreiecks aus A=5, a=3, b=4!

Aufgabe 2

Beweise die Formel von Heron anhand der folgenden Anleitung und Figur (direkt auf dem Blatt lösen):

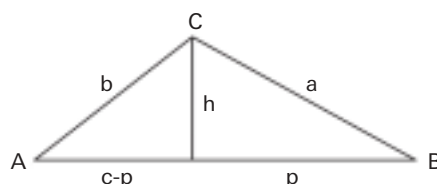


Abb. 1

Arbeitsblatt Heronsche Formel

Beweise die Heronsche Formel nach folgender Anleitung:

- a) Um Wurzeln zu vermeiden berechnen wir das Quadrat der Heronschen Formel $heron(a,b,c)^2$. Der Rechner gibt folgende Formel (s ist bereits ersetzt durch a, b und c)

$$A^2 = \frac{-(a + b + c) \cdot (a + b - c) \cdot (a - b - c) \cdot (a - b + c)}{16}$$

welche zu beweisen ist.

- b) Die Dreiecksfläche, bzw. A^2 , ergibt sich nach der bekannten Formel aus Grundlinie c und Höhe h.

$$A^2 = \frac{c^2 \cdot h^2}{4}$$

- c) c ist bekannt. Drücke zunächst h^2 mit Hilfe des Satzes von Pythagoras durch a und p und dann noch durch b und c-p aus.
 $h^2 = \dots$ (mit a und p, speichern in h2)
 $h^2 = \dots$ (mit b und c-p)
- d) Setze die beiden obigen Ausdrücke für h^2 gleich und löse diese Gleichung nach p auf.
 Zur Kontrolle: $p = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}$
- e) Zerlege h^2 von c) in ein Produkt und setze p von d) ein (CAS: factor(...)|p=...). Speichere das Resultat wieder in $h2 (=h^2)$ und setze h^2 in die Fläche A^2 von b) ein. Vergleiche mit der Formel in a)!

Weitere Aufgaben:

- Berechne die Fläche eines Trapezes aus den 4 Seiten $a = 6, b = 4, c = 3, d = 3$.
 Definiere allgemein ein Funktionsmodul `trapez(a,b,c,d)`.
- Gibt es ein Dreieck mit Seiten $x, x+1, x+2$ und Fläche $A=10$?
 Für welche vorgegebene Fläche A ist eine Lösung möglich?
- Gibt es ein Dreieck mit Seiten $3, x, 2x$ und Fläche $A = 10$?
 Für welche vorgegebene Fläche A ist eine Lösung möglich?
 Probiere auch mit $A = 1, 3, 0$!
 Zeichne die Fläche als Funktion $y1(x) = \text{heron}(3,x,2x)$ und bestimme grob den Definitionsbereich und Wertebereich der Funktion!
 Zeichne die Ecken C möglicher Dreiecke ABC mit $|AB| = 3$!
 Auf welcher Kurve liegen diese Eckpunkte?
 Freiwillig für Schnelle: Zeichne die Ortskurve mit Cabri.
- Wer war Heron von Alexandrien und welches waren seine bedeutendsten Leistungen? Wo liegt Alexandrien? Wofür war die Stadt berühmt? Suche im Internet, in einem Lexikon oder anderen Quellen nach Informationen!

Lösungen zum Arbeitsblatt

Aufgabe 1

Wenn eine Seite größer ist als die Summe der andern beiden, dann existiert keine reelle Lösung. Das letzte Beispiel zeigt, dass es im allgemeinen maximal 4 Lösungen gibt, wobei nur zwei davon ($x > 0$) einem Dreieck entsprechen. Es lohnt sich, die Dreiecke zu zeichnen und die Höhe zur Kontrolle zu berechnen.

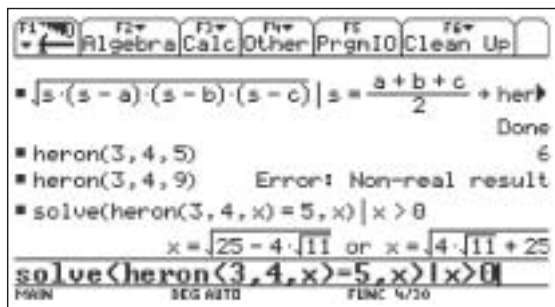


Abb. 2

Aufgabe 2

Die Beweisschritte entnimmt man den untenstehenden Bildschirmen.

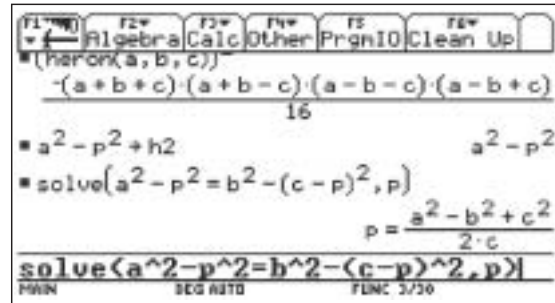


Abb. 3

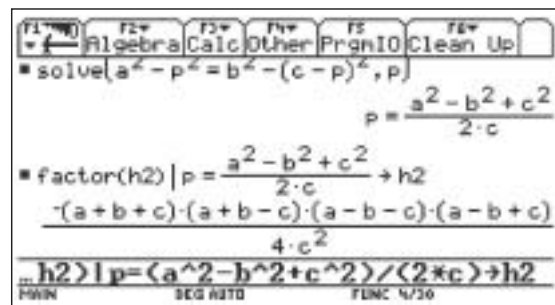


Abb. 4

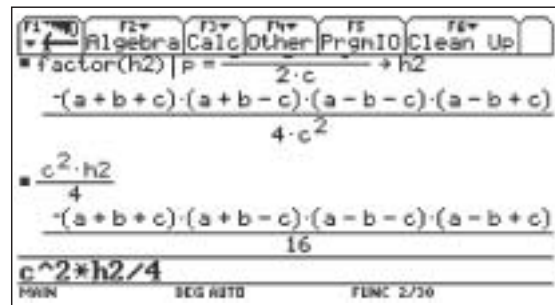


Abb. 5

Der Beweis mit CAS ist viel einfacher als von Hand, denn der schwierigste Teil ist die Umformung des letzten Ausdrucks auf die Form der Heronschen Formel. CAS vereinfacht Herons Formel automatisch auf den letzten Ausdruck. Nebenbei sei erwähnt, dass das CAS uns hilft, die Idee für diesen einfacheren Weg auch für die Lösung von Hand zu benutzen.

Aufgabe 3

Wir berechnen die Höhe h des Trapezes mit Hilfe des Teildreiecks EBC: `solve(heron(abs(a-c),b,d)=h*abs(a-c)/2,h)`

Die Fläche berechnet sich dann mit $\frac{(a+c)h}{2}$. Diese allgemeine

Formel ist sehr umfangreich und kann als Funktionsmodul `trapez(a,b,c,d)` abgespeichert werden.

Beispiel: $\text{trapez}(6,4,3,3) = 6\sqrt{5}$

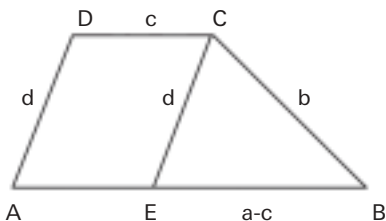


Abb. 6

Aufgabe 4

$\text{solve}(\text{heron}(x,x+1,x+2)=10,x)$ gibt die Lösung $x = 4.018$ (und eine negative).

Mit $\text{solve}(\text{heron}(x,x+1,x+2)=c,x)$ ist das CAS überfordert (Gleichung 4. Grades).

Mit geometrischen Überlegungen sieht man, dass für große x stets ein Dreieck konstruiert werden kann, welches fast gleichseitig ist. Den Grenzfall eines Dreiecks mit Fläche 0 erhält man mit $x = 1$. Für $x > 1$ gibt es aber stets ein Dreieck mit kontinuierlich wachsender Fläche. Interessant sind auch numerische Rundungen, z.B. bei $c = 0.00001$, Resultat: false!

Aufgabe 5

$\text{solve}(\text{heron}(3,x,2x)=10,x)$, Resultat: false
 Für 1, 3, 0 erhält man 1.108 und 2.962, $\sqrt{5}$, 1 und 3 (nur positive Werte)
 Definitionsbereich [1;3], Wertebereich [0;3].
 Die Ecken der möglichen Dreiecke mit $A = (0; 0)$ und $B=(3; 0)$ liegen auf dem Apolloniuskreis über \overline{AB} zum Verhältnis 1 : 2. Dies ist der Thaleskreis über der Strecke mit den Endpunkten (2; 0) und (6; 0).

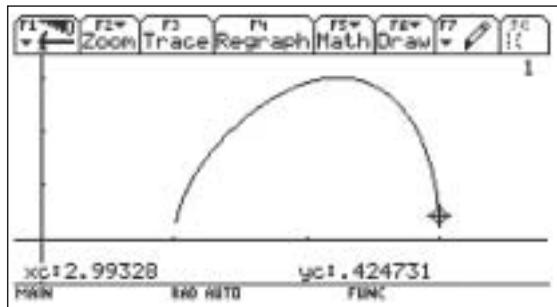


Abb. 7

Aufgabe 6

Heron von Alexandria, griechischer Gelehrter. Die Historiker sind sich nicht einig über die Lebenszeit von Heron. Sie liegt aber in der alexandrinischen Zeit zwischen 150 v. Chr. bis 250 n. Chr. Wichtigste Werke: Mechanika, Pneumatika. Alexandria liegt an der Nilmündung in Ägypten und gilt als das bedeutendste wissenschaftliche Zentrum im Hellenistischen Zeitalter. Berühmt war die große Bibliothek mit fast 1 Million Buchrollen.

Bemerkung: Diese Unterrichtseinheit kann sehr früh eingesetzt werden. Ich verwendete sie nach der Einführung des Apolloniuskreises (als Anwendung der Strahlensätze). Aufgabe 5

kann auch als entdeckender Einstieg zum Thema Apolloniuskreis benutzt werden.

Prüfungsaufgaben

1. Berechne die Fläche des Dreiecks mit Ecken $A = (-13; 2)$, $B = (5; 17)$ und $C = (22; -4)$ (Heronsche Formel).
2. Berechne c und die Fläche A eines Dreiecks aus $a = 7$, $b = 5$, $h_c = 3$!
3. Bei einer Güterzusammenlegung kann ein Bauer sein Grundstück (gemäß untenstehender Figur, Maße in km) gegen ein quadratisches Grundstück von gleicher Fläche umtauschen. Benutze Funktionsmodule!

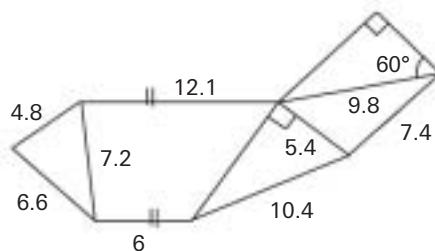


Abb. 8

4. Gibt es ein Dreieck mit den Seiten 1, 2 und x , welches Fläche 10 hat?
 Zeichne $y1(x) = \text{heron}(1,2,x)$! Gib den Definitionsbereich dieser Funktion grob an ($x > 0$)!
 Begründe exakt, warum x in diesem Bereich liegen muss (geometrische Überlegung)!
 Wie groß kann die Fläche maximal sein?
 Exakte Begründung!
5. Wir betrachten die Dreiecke mit den Seiten 4, x , und $k \cdot x$ ($k \geq 1$).
 Bestimme den g.O. aller Eckpunkte dieses Dreiecks und die größtmögliche Dreiecksfläche für $k = 3$! (Tipp: Betrachte zuerst die Dreiecke mit Fläche 0).
 Wo liegen die Eckpunkte des Dreiecks für ein beliebiges k ?
 Welches ist der g.O. für $k = 1$?

Lösungen

1. Speichere zuerst die Eckpunkte $[-13,2] \rightarrow a$, $[5,17] \rightarrow b$, $[22,-4] \rightarrow c$.
 $A = \text{heron}(\text{norm}(b-a), \text{norm}(c-b), \text{norm}(c-a))$. Resultat: 316.5
2. $\text{zeros}(\text{heron}(7,5,c)-3*c/2,c)$, Resultat (numerisch) $\{2.325, 10.325\}$
 $A=3*c/2 \mid c=\{2.325, 10.325\}$, Resultat $\{3.487, 15.487\}$
(zuerst gibt das Resultat als Liste, was die gleichzeitige Weiterverarbeitung von mehreren Werten erlaubt)
3. Es wird angenommen, dass die Funktionsmodule $\text{heron}(a,b,c)$ und $\text{trapez}(a,b,c,d)$ noch gespeichert sind, andernfalls müssen sie zuerst neu definiert werden.
 Zunächst berechnen wir die fehlende Seite des Trapezes:
 $\sqrt{(10.4^2-5.4^2)} \rightarrow s$.
 $\sqrt{(\text{heron}(4.8,7.2,6.6)+\text{trapez}(12.1,7.2,6,s)+5.4*s/2+\text{heron}(5.4,7.4,9.8)+4.9^2*\sqrt{3})/2}$. Resultat: 12.028 km
4. $\text{solve}(\text{heron}(1,2,x)=10,x)$, Resultat false.
 Definitionsbereich = [1,3] (aus Graph von $\text{heron}(1,2,x)$ abgelesen)

Wähle \overline{AB} als Dreiecksseite mit Länge 1 und \overline{AC} mit Länge 2. Dann liegen die Punkte C auf einem Kreis mit Radius 2 um A. Zeichnet man einen Kreis mit Radius x um B, so wird in den Berührungspunkten die Fläche 0. Dies ist für den kleinstmöglichen Wert $x = 1$ und den größtmöglichen Wert $x = 3$ der Fall.

Das Dreieck hat die größte Höhe und damit die größte Fläche, wenn die Seite \overline{AC} senkrecht auf \overline{AB} steht. d. h. $A = 1$. Zur Veranschaulichung kann die Konstruktion mit Cabri gezeigt werden.

5. Der g.O. ist der Apolloniuskreis über der Seite 4 zum Verhältnis 1:k. Den Durchmesser des Kreises erhält man bei Fläche 0.

$\text{solve}(\text{heron}(4,x,k*x)=0,x)$ liefert das Resultat

$x = \pm \frac{4}{k+1}$ und $x = \pm \frac{4}{k-1}$, dabei entspricht $\frac{4}{k+1}$ dem inneren Teilpunkt X und $-\frac{4}{k-1}$ dem äußeren Teilpunkt Y

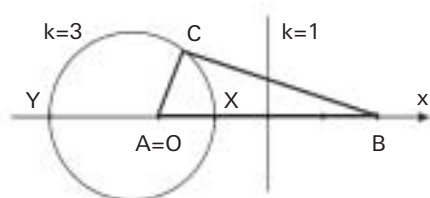


Abb. 9

(zur Diskussion legt man am besten eine Zahlengerade durch A und B mit $A=0$).

Für $k=3$ sind die x-Werte 1 und -2, d.h. der Apolloniuskreis hat Radius 1.5 und die maximale Fläche ist deshalb 3.

Für ein beliebiges k ist der Radius die Hälfte der Differenz der

obigen Werte: $\frac{4 \cdot k}{(k-1) \cdot (k+1)}$.

Für $k = 0$ schrumpft der Apolloniuskreis auf den Punkt A. Für $k = 1$ erhält man ein gleichschenkliges Dreieck mit den Seiten 4, x, x. D.h. in diesem Fall ist die Mittelsenkrechte der Strecke \overline{AB} der gesuchte g.O. Schüler empfinden es als „unendliche Horizonterweiterung“, wenn dieser Fall als Grenzwert $k \rightarrow 1$ des Apolloniuskreises mit „unendlich“ großem Radius und Mittelpunkt „unendlich“ weit entfernt, betrachtet wird. Diskutiert man auch den Fall $0 \leq k \leq 1$ so muss beim Durchschreiten des Unendlichen auch das Schülervorstellungsvermögen Grenzen überwinden.

Autor:

Dr. René Hugelshofer
Kantonsschule Heerbrugg
CH-9435 Heerbrugg
rene.hugelshofer@ksh.edu

Online-Fortbildungen für Lehrkräfte bei T³

Karl-Heinz Keunecke

T³ ist sicherlich den meisten Leserinnen und Lesern der TI-Nachrichten als eine Organisation bekannt, die seit einigen Jahren Tagungen, Workshops und SchiLF zum Thema neue Medien im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht veranstaltet. Mit zunehmender Verbreitung des Internets, gewinnen in der Schule auch internetbasiertes Lernen und internetbasierte Fortbildungen an Bedeutung. Deshalb hat T³-Deutschland eine Arbeitsgruppe E-Learning gegründet. Ziel ist nicht, bisherige Veranstaltungen zu ersetzen, sondern sie zu ergänzen und weiterzuführen.

Damit die Arbeit der Gruppe am Bedarf in der Lehrerschaft orientiert werden kann, wurde versucht deren Bedürfnisse mit einer Online-Umfrage festzustellen. Danach besteht ein fast gleich großer Wunsch nach Fortbildungen zu den Themen

- CAS-Software,
- Dynamischer Geometrie Software,
- Taschencomputer mit CAS,
- Grafische Taschenrechner,
- Tabellenkalkulation auf PCs und Handheld-Geräten.

Die meisten Lehrkräfte sind bereit, an Online-Fortbildungen außerhalb der regulären Schulzeit teilzunehmen und auch für die Kosten des Internetzuganges selbst aufzukommen. Die zeitliche Belastung durch die zusätzliche Online-Fortbildungen ist für sie offensichtlich kritischer. Eine wöchentliche Teilnahme glauben nur 16% sich leisten zu können, während 55% eine 14tägige oder monatliche Frequenz wünschen. 19% stimmen einer Blockbildung zu.

Es stellte sich heraus, dass die meisten Lehrkräfte ein möglichst vielseitiges Angebot an Unterrichtsmaterialien und Fortbildungen wünschen, aus dem sie dann für ihren aktuellen Unterricht Anregungen, Beispiele und auch technische Hinweise wählen. (Sollten Leserinnen oder Leser evtl. andere Vorstellungen haben oder auch diese Meinungen unterstützen wollen, so sind sie aufgerufen, selbst bei

<http://zkl.uni-muenster.de/t3/Umfrage/umfrag1.htm> unsere Fragen zu beantworten.)

Erfreulicherweise haben sich auch 19 Kolleginnen und Kollegen bereit erklärt, ihre bisherige Unterrichtserfahrung mit neuen Medien online an andere weiter zu geben. Deshalb bietet T³ im Herbst eine Präsenzveranstaltung zur Ausbildung von Mathematiklehrkräften als Teletutoren an.

Danach kann man dann bei dem Internet Kolleg **Fortbildung Online** (<http://www.lernnetz-sh.de/l3n/bildung1.html>) ein wesentlich umfangreicheres Angebot zu „Mathematik mit neuen Medien“ vorfinden als bisher.

Informationen zu T³ Österreich und Schweiz erhalten Sie unter: <http://www.acdca.ac.at/t3/index.htm> und <http://www.educanet.ch/home/t3Schweiz/>

Autor:

Dr. Karl-Heinz Keunecke
Gorch-Fock-Str. 2
D-24159 Kiel
kh.keunecke@t-online.de

Rule of 72 – Näherungsformel für die Verdoppelungszeit

Markus Paul, BHAK Schwaz

GTB Wie lang ist der Bremsweg bei einer Geschwindigkeit von 70 km/h? Jeder Fahrschüler muss diese Frage bei der Fahrprüfung beantworten können. Da aber die physikalische Formel für den Alltagsgebrauch zu kompliziert ist, bedient man sich in der Fahrschule einer Näherungsformel.

Wie lange dauert es, bis sich ein Kapital bei einer Verzinsung von 8 % verdoppelt hat? Wie lange dauert es bis sich die Bevölkerung der USA mit einer jährlichen Zuwachsrate von 1,02 % verdoppelt hat? Exponentielle Wachstumsprozesse lassen sich durch die Verdoppelungszeit beeindruckend charakterisieren. Die Verdoppelungszeit ist jene Zeiteinheit für den der Wachstumsprozess mit der Basis 2 erfolgt, gleich wie die Vermehrung der Weizenkörner auf dem Schachbrett.

Auch die Formel für die Verdoppelungszeit ist so kompliziert, dass sie im Alltag für Nicht-Mathematiker kaum praktikabel ist. Zum Glück gibt es aber auch hier eine äußerst einfache Näherungsformel, die in Amerika weit verbreitet, bei uns aber noch wenig bekannt ist. Sie heißt „Rule of 72“ und im Namen steckt schon fast die ganze Formel drin.

1. Kapitalwachstum

Ist K_0 das Anfangskapital und p der Prozentfuß, so erhält man die Verdoppelungszeit T durch Lösen folgender Exponentialgleichung:

$$2 \cdot K_0 = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^T$$

Wir erhalten die Lösung $T = \frac{\ln 2}{\ln \left(1 + \frac{p}{100}\right)}$

Verzinst sich ein Kapital mit $p = 8$ Prozent, erhält man die Verdoppelungszeit $T = 9,00647$ Jahre.

Näherungsweise kann die Verdoppelungszeit durch

$$T \approx \frac{72}{p}$$

berechnet werden, die in Amerika unter dem Namen „Rule of 72“ bekannt ist. Für $p = 8$ ergibt das angenähert die Verdoppelungszeit $T = 9$. Der absolute Fehler beträgt lediglich 0,00647, der relative Fehler beträgt $0,00647/9,00647 = 0,07\%$

Wie gut ist nun diese Näherungsformel? Für welche Wachstumsraten liefert sie brauchbare Ergebnisse, für welche nicht?

Dazu erstellen wir mit dem TI-83 eine Tabelle für beide Formeln und lassen den relativen Fehler berechnen:

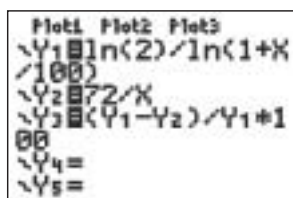


Abb. 1

Wir lassen die Wertetabelle bei $p = 2$ beginnen mit Schrittweite 2.

X	Y1	Y2	Y3
2	35,003	36	-2,849
4	17,572	18	-1,85
6	11,898	12	-3,771
8	9,0065	9	-0,7182
10	7,2725	7,2	0,9746
12	6,1163	6	1,9008
14	5,2901	5,1429	2,7826

X=2

Abb. 2

Die Abhängigkeit des relativen Fehlers vom Prozentfuß p kann auch als Grafik dargestellt werden. Mit **[CALC] > 2:zero** kann jene Wachstumsrate berechnet werden, bei der die Näherungsformel mit der Verdoppelungszeit übereinstimmt, es ist $p = 7,847$.

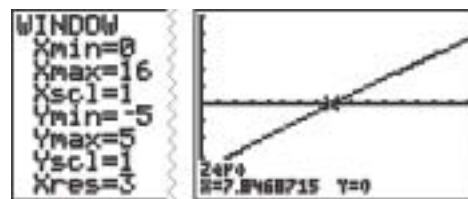


Abb. 3

Toleriert man einen relativen Fehler von $\pm 2\%$, so kann die Näherungsformel für $4 \leq p \leq 12$ verwendet werden, das ist gerade jener Bereich, in dem viele Zinssätze liegen oder besser gesagt: bis vor wenigen Jahren lagen.

Gibt man als weitere Funktionen $Y4 = -2$ und $Y5 = 2$ ein, können mit **[CALC] > 5:intersect** die Wachstumsraten berechnet werden, für die der relative Fehler gerade 2% beträgt, es sind dies $p = 3,697$ und $p = 12,223$.

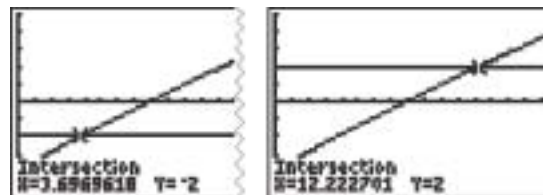


Abb. 4

2. Bevölkerungswachstum

Die Wachstumsraten für die Bevölkerung liegen aber unter 4 %!

Hier einige Beispiele:

Land	Bevölkerung (1995)	Wachstum (% 1995)	Verdoppelungszeit
Ägypten	62.359.623	1,95%	35,89
Bangladesch	128.094.948	2,32%	30,23
Brasilien	160.737.489	1,22%	57,16
China	1.203.097.268	1,04%	66,99
Deutschland	81.337.541	0,26%	267,01
Elfenbeinküste	14.791.257	3,38%	20,85
Japan	125.506.492	0,32%	216,96
USA	263.814.032	1,02%	68,30

Quelle: CIA World Fact Book, 1995
(<http://www.uni-flensburg.de/geo/wisogeo/bev2.htm>)

Donella und Dennis Meadows verwenden in ihrem Buch „Die neuen Grenzen des Wachstums“ (1992) als Näherungsformel

$$T \approx \frac{70}{p}$$

Mit dieser Formel erhalten wir folgende Ergebnisse wobei Gleichung 2 in Abb. 1 durch $Y_2=70/X$ ersetzt wird):

X	Y1	Y2	Y3
1	69.661	70	-4.4871
2	34.830	35	-2.2435
3	23.220	23.333	-1.4889
4	17.415	17.5	-1.1172
5	13.932	14	-0.8744
6	11.610	11.667	-0.7137
7	10.243	10	-0.6092

Abb. 5

Diesmal stimmt die Näherungsformel für $p = 1,98$ mit der Verdoppelungszeit überein.

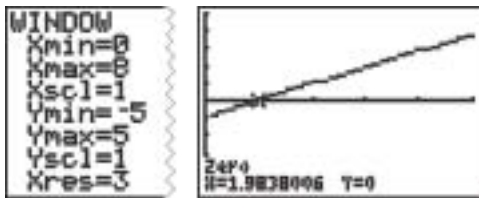


Abb. 6

Toleriert man einen relativen Fehler von $\pm 2\%$, so kann die Näherungsformel für $0 \leq p \leq 6$ verwendet werden (bei $p = 6,16$ ist der relative Fehler 2%), das ist gerade jener Bereich, in dem die Wachstumsraten für die Bevölkerung liegen.

3. Konstruktion der Näherungsformel

Wie kann man diese Näherungsformeln plausibel machen? Wir müssen nur die Logarithmenwerte berechnen, dann liegt die Näherungsformel auf der Hand. Wir nehmen $p = 2$:

$$T = \frac{\ln 2}{\ln 1,02} = \frac{0,6931...}{0,0198} = \frac{69,31}{1,98}$$

Die stetige Zuwachsrate 1,98 % liegt nur wenig unter der jährlichen Zuwachsrate 2 %. Dieser Fehler kann ausgeglichen werden, indem der Nenner ein wenig erhöht wird, etwa auf 70. Je größer die Zuwachsrate ist, desto größer wird die Differenz zwischen jährlicher und stetiger Zuwachsrate. Bei der „Rule of

70“ wird der Fehler im Nenner durch den Wert 70 im Zähler korrigiert.

Mathematisch formuliert: Der Kehrwert der Logarithmusfunktion lässt sich erstaunlich gut durch eine Hyperbel annähern.

Nun kann man sogar ein kleines Spiel daraus machen: Wer findet die beste Näherungsformel für die Verdoppelungszeit von der

Form $T = \frac{Z}{p}$ für Zuwachsraten um 20 %? Welche Zahl Z müssen

wir für den Zähler wählen?

Wir können natürlich so lange herumprobieren, bis der Wert im Zähler ein befriedigendes Ergebnis liefert. Aber elegant kann man dieses Problem mit dem **SOLVER** (Menü **[MATH] > 0:Solver**) lösen:

Wir geben als Gleichung $0=Y_1-C/X$ im SOLVER ein und lassen für $X = 20$ den TI-83 die Sucharbeit für den Zähler Z erledigen, indem wir als Startwert für Z etwa 75 eingeben und mit **[ALPHA] SOLVE** den Solver starten:

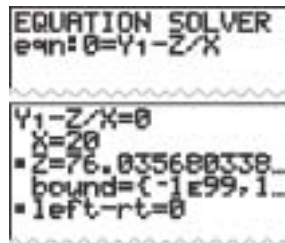


Abb. 7

Nun haben wir eine neue Näherungsformel für die Verdoppelungszeit gefunden, ich nenne sie „Rule of 76“:

$$T = \frac{Z}{p}$$

Sie liefert hervorragende Näherungswerte der Verdoppelungszeit für Zuwachsraten in der Nähe von 20%.

Autor:

Dr. Markus Paul
 Peter-Mayr-Straße 19
 A-6020 Innsbruck
 mailto:markus.paul@utanet.at

Autoren willkommen! Kritik erwünscht!

Ihr Beitrag zu den TI-Nachrichten ist herzlich willkommen, besonders natürlich Beispiele aus dem Unterricht. Ihre Kritik hilft uns, Ihren Wünschen besser gerecht zu werden. Ihr Lob spornt uns an.

Senden Sie Ihre Beiträge an unsere Länderredaktion:

D: W. Pröpper: w.proepper@wpro.franken.de · A: G. Kniendl: g-kniendl@ti.com · CH: U. Oswald: osurs@bluewin.ch

oder an

Texas Instruments, E&PS, TI-Nachrichten, Haggertystraße 1, D-85356 Freising, E-Mail: ti-nachrichten@ti.com



„Wie verändert sich die Mondscheindauer im Laufe der Zeit?“ Diese Frage stellt sich ganz natürlich, wenn Schülerinnen und Schüler den Auftrag erfüllen, Daten für Mondaufgang und Monduntergang aus der Tageszeitung zu sammeln. Ausgehend von realem Datenmaterial wird eine Aufgabensequenz entwickelt, die schrittweise zu einer angemessenen mathematischen Beschreibung hinleitet. Dabei geht es sowohl um die Aufbereitung der vorliegenden Daten als auch um die mathematische Auseinandersetzung mit der funktionalen Beziehung „Tag -> Mondscheindauer“. Die grafische Veranschaulichung führt zur Idee der Sinuskurven-Anpassung, diese Idee wird Schritt für Schritt durchdacht und realisiert.

Der Mond ist aufgegangen ... [1]

Aus der Tageszeitung kann man die Daten für den Mondaufgang (MA) und den Monduntergang (MU) entnehmen. Ein Schüler sammelte diese Daten vom 1. Juli bis zum 28. August. Die folgende Tabelle zeigt die ersten und die letzten 10 Tage dieser Periode. Sonntags erscheint die Zeitung nicht, und manchmal vergaß der Schüler auch, sich die Zeiten zu notieren. So kam es zu Lücken in der Tabelle.

Nr.	Datum	MA	MU
1	01.07.	13:02	00:52
2	02.07.	14:06	01:14
3	03.07.	15:09	01:35
4	04.07.	16:13	01:59
5	05.07.		
6	06.07.	17:45	02:24
7	07.07.	19:19	03:29
8	08.07.	20:16	04:12
9	09.07.	21:07	05:03
10	10.07.	21:52	06:02
....
50	19.08.	03:07	18:57
51	20.08.	04:09	19:36
52	21.08.	05:15	20:08
53	22.08.	06:22	20:35
54	23.08.		
55	24.08.	07:38	21:08
56	25.08.	08:34	21:22
57	26.08.	09:38	21:44
58	27.08.	10:42	22:08
59	28.08.	11:45	22:29

(Die vollständige Tabelle, sowie auch der ungekürzte Beitrag steht auf der TI-Materialseite in der Rubrik Voyage 200/Abhandlungen zur Verfügung bzw. ist auf der Visit-me-CD [2] zu finden.)

Kann man aus diesen Daten etwas Interessantes ablesen? Versuchen wir es!

Bei der Realisierung können verschiedene Werkzeuge sinnvoll eingesetzt werden. Die Kleinrechner (TI 83+, TI-92+ oder Voyage 200) erweisen sich als angemessene und leistungsfähige Werkzeuge, mit denen die Bewältigung der Aufgabe, die weit über die rein händischen Möglichkeiten der Bearbeitung hinausgeht, zu einem interessanten, vielgestaltigen Auftrag wird. Das gilt insbesondere, da die Rechner nun mit einer speziellen Applikation zur Datenverarbeitung – dem Programm CellSheet – ausgestattet sind.

Gesucht ist eine Darstellung der Mondscheindauer im Koordinatensystem in Abhängigkeit von der Tagesnummer.

- Wie lässt sich die Mondscheindauer aus den Daten berechnen und veranschaulichen?
- Wie könnte man die in der Ausgangstabelle fehlenden Daten für die Mondscheindauer sinnvoll ergänzen?
- Welche Mondscheindauer kann man für den 30. September vorhersagen?

Die nachfolgenden Abbildungen zeigen die ersten Einträge der Daten in eine CellSheet-Tabelle des Voyage 200.

Die Spalte A enthält die Tagesnummer. Die Eingabe einer Uhrzeit führt zu einer Fehlermeldung. Als numerische Werte sind nur ganze Zahlen und Zahlen mit Dezimalpunkt zulässig. Deswegen wird die Zeit für MA und für MU in jeweils zwei Spalten eingetragen (Spalten B bis E).

non	A	B	C	D	E	F
1	Nr.	MA-h	MA-min	MU-h	MU-min	Diff
2	1	13	2	0	52	-12
3	2	14	6	1	14	-12
4	3	15	9	1	35	-13
5	4	16	13	1	59	-14
6	6	17	45	2	24	-15
7	7	19	19	3	29	-15

Abb. 1

Ziel ist, die Mondscheindauer in Dezimalschreibweise zu erhalten. Zwischen MA und MU kann ein Tageswechsel liegen oder auch nicht. Befindet sich zwischen MA und MU ein Tageswechsel, so liefert die Formel in Spalte F eine negative Zahl.

non	C	D	E	F	G	H
1	MA-min	MU-h	MU-min	Diff	Dauer	
2	2	0	52	-12,17	11,833	
3	6	1	14	-12,87	11,133	
4	9	1	35	-13,57	10,433	
5	13	1	59	-14,23	9,7667	
6	45	2	24	-15,35	8,65	
7	19	3	29	-15,83	8,1667	

Abb. 2

Die Mondscheindauer ergibt sich in diesen Fällen durch Addition von 24 („Mitternacht“), was in Spalte G geschieht.

non	C	D	E	F	G	H
1	MA-min	MU-h	MU-min	Diff	Dauer	
2	2	0	52	-12,17	11,833	
3	6	1	14	-12,87	11,133	
4	9	1	35	-13,57	10,433	
5	13	1	59	-14,23	9,7667	
6	45	2	24	-15,35	8,65	
7	19	3	29	-15,83	8,1667	

Abb. 3

Grafische Darstellung der Daten

Da wir eine grafische Veranschaulichung anstreben, verzichten wir auf die Eingabe unvollständig vorliegender Datensätze (s. Abb. 1, Sp. A). Für die grafische Darstellung können beliebige Bereiche der eingegebenen Daten für den x- bzw. y-Bereich ausgewählt werden. Hier wurden zunächst alle vorhandenen Datensätze verwendet und ein entsprechender Plot definiert (Abb. 4).

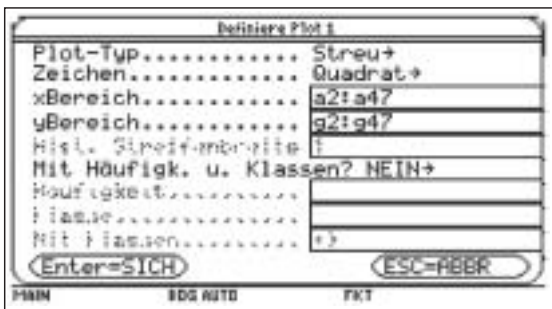


Abb. 4

Damit ergibt sich die nachfolgende Abbildung (unter Umständen erst, wenn im Menü F2 Zoom die Auswahl ZoomDat vorgenommen wurde).

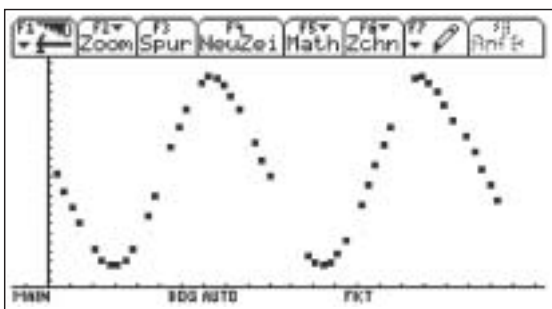


Abb. 5

Mit Hilfe der grafischen Darstellung – die dann überdacht und diskutiert werden sollte – lassen sich Vermutungen über den funktionalen Zusammenhang zwischen Tagesnummer und Mondscheindauer ableiten. Der Vorschlag des Funktionstyps „Sinus“ bildet schließlich den Ausgangspunkt für die Anpassung der Parameter an die gegebenen Daten. Wesentlich für das aktive Verständnis des ermittelten Zusammenhangs „Tagesnummer – Mondscheindauer“ ist es, die an die Messwerte angepasste Funktion für die Schätzung weiterer – d.h. mit ihrer Hilfe interpolierter und extrapolierter – Messwerte zu nutzen.

Durch Variation der Parameter gelingt es schließlich, den folgenden Funktionsvorschlag zu finden:

$$Y_4 = -4 \sin(0.22 x) + 12$$

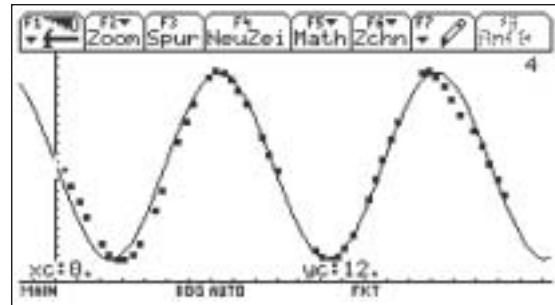


Abb. 6

Augenscheinlich ist eine recht gute Annäherung an die Datenpunkte gelungen.

Als eine Alternative zur Ermittlung des funktionalen Zusammenhangs bietet sich die im Voyage 200 implementierte Automatik zur Berechnung der Sinus-Regression an.

Sie liefert $y = 3.91 \sin(0.225x + 2.92) + 12$.

Ein Unterschied zur Kurve in Abb. 6 ist praktisch nicht wahrnehmbar.

Die andere Möglichkeit ist, die Daten z.B. mit dem CellSheet-Converter nach Excel zu übertragen und dort die Regressionsgleichung mit Hilfe der Steuerelemente-Toolbox zu ermitteln (s. [2]).

Literatur:

- [1] W. Herget, E. Malitte, K. Richter [2002]: Der Mond ist aufgegangen
In: W. Herget, E. Lehmann (Hrsg.): Exponential- und Winkel-funktionen. Neue Materialien für den Mathematikunterricht mit dem TI-83 /-89 /-92 in der Sekundarstufe I. Hannover: Schroedel
- [2] Visit-me 2002, bk-Teachware, ISBN 3901769498

Autorin:

Dr. Elvira Malitte
Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
Fachbereich Mathematik und Informatik
Didaktik der Mathematik
D-06099 Halle (Saale)
malitte@mathematik.uni-halle.de


Kennen Sie den?

Ein Ballonfahrer kommt in eine Nebelwand. Als er nach geraumer Zeit wieder klare Sicht hat, sagt er zu seinem Fahrgast:
„Jetzt habe ich doch total die Orientierung verloren. Ich weiß nicht mehr, wo wir uns befinden.“

Antwortet der Gast: „Kein Problem. Da unten steht ein Mann. Ich frage ihn.“ Sogleich ruft er nach unten: „Hallo, wo sind wir?“

Die Antwort kommt prompt: „Ihr seid im Ballon.“ Darauf der Gast zum Ballonfahrer: „Das muss ein Mathematiker sein.“

Gibt eine vollkommen korrekte Antwort. Bloss ist sie zu nichts nütze.“

 Das Taubenproblem wurde vom amerikanischen Mathematiker H. Robbins (*1915) formuliert:

Einer Jägerin steht nur ein Schuss zur Verfügung. Sie soll aus einer Schar Tauben, deren Anzahl n sie kennt, die aber in zufälliger Reihenfolge an ihr vorbeifliegen, die größte schießen. Mit welcher Strategie sind ihre Chancen maximal, die größte Taube zu treffen?

Dasselbe Problem besteht bei der Anstellung des besten Mitarbeiters bei n Bewerbern, wobei jedem Bewerber sofort zu- oder abgesagt werden muss und man den besten Bewerber anstellen möchte.

Ich skizziere im Folgenden eine Unterrichtsreihe von 6 Schritten, die sich in der 11. Klasse im Stochastikunterricht durchführen lässt. Der Taschenrechner wird zur Entwicklung einer Strategie und zur rechnerischen Bewältigung sowie zur graphischen Darstellung eingesetzt. Die Abfolge ist darauf angelegt, die Schüler zum selbständigen Entdecken und Formulieren von Sachverhalten anzuregen.

Aus diesem Grund wird das Problem zuerst für $n=20$ Tauben untersucht, dann für n allgemein.

1. Eine eigene Strategie entwickeln

Aufgabe: Experimentiere mit dem Programm taube() (s. Anhang) für $n=20$ und entwickle eine eigene Strategie.

Lösung: Die SchülerInnen entwickeln verschiedene Strategien und stellen diese und die erreichten Resultate in der Klasse vor. Einsatz des TR:

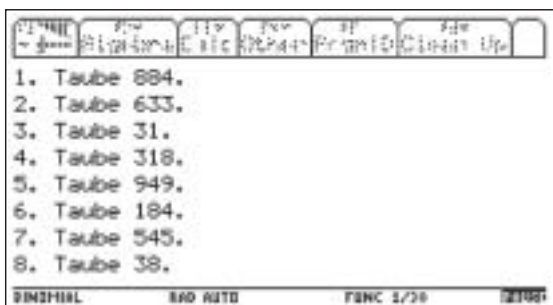


Abb. 1

2. Systematische Untersuchung einer Strategie

Aufgabe: Die Strategie heißt: Die ersten s Tauben vorbeigehen lassen und nachher die erste nehmen, die größer ist als die ersten s , allenfalls die letzte nehmen. Wie groß muss s sein, wenn $n=20$ ist, damit ich so die größte Taube am ehesten erwische? Wie groß ist schätzungsweise die Wahrscheinlichkeit, dass die größte Taube erwischt wird?

Wir füllen die folgende Tabelle aus, indem wir verschiedene s in der Klasse verteilen und wieder mit dem Programm taube() arbeiten.

$n=20 / s=$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Anz. Versuche G															
Anz. Erfolge X															
Rel.Häufigk. X/G															

Lösung: Bei genügend vielen Versuchen und Zusammentragen in der Klasse sieht man, dass um $n=7$ bessere Resultate erreicht werden als bei kleinen und großen s . Die relative Häufigkeit geht in die Richtung der später berechneten Wahrscheinlichkeit.

3. Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten

In der Klasse wird in drei Schritten die Wahrscheinlichkeit berechnet, die größte Taube zu erwischen, wenn die im 2. Schritt formulierte Strategie angewendet wird.

Die größte Taube fliege an k -ter Stelle vorbei. Falls $k \leq s$, wird die Taube unbehellig gelassen. Falls $s < k \leq n$, so wird die Taube genau dann geschossen, wenn die größte unter den $k-1$ Vorgängerinnen sich unter den ersten s Tauben befindet. Somit ergeben sich die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

$$A. P(\text{größte T. wird geschossen, falls an } k\text{-ter Stelle}) = \frac{s}{k-1}$$

$$B. P(\text{größte T. an } k\text{-ter Stelle und wird geschossen}) = \frac{1}{20} \cdot \frac{s}{k-1}$$

$$C. P(\text{größte Taube wird geschossen}) = p(s,20)$$

$$= \sum_{k=s+1}^{20} \frac{1}{20} \cdot \frac{s}{k-1} = \frac{s}{20} \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} + \dots + \frac{1}{19} \right) = \frac{s}{20} \sum_{k=s}^{19} \frac{1}{k}$$

4. Auswertung des Summenterms

Aufgabe: Untersuche, für welches s der Ausdruck $p(s,20)$ maximal wird.

Lösung: Für $s=7$ ergibt sich die größte Wahrscheinlichkeit $p=0.38421$.

Einsatz des TR:

Auswerten des Terms $p(s,20)$ im Home Modus, Abspeichern als Liste L2, Übertragen in den Data/Matrix-Editor, Veranschaulichung im Graph-Modus.

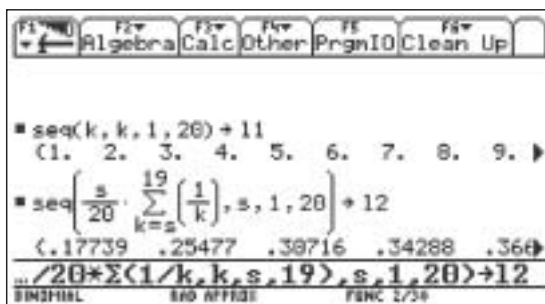


Abb. 2

	c1	c2
1	1.	.17739
2	2.	.25477
3	3.	.30716
4	4.	.34288
5	5.	.3661
6	6.	.37532
7	7.	.38421

c2=12

Abb. 3

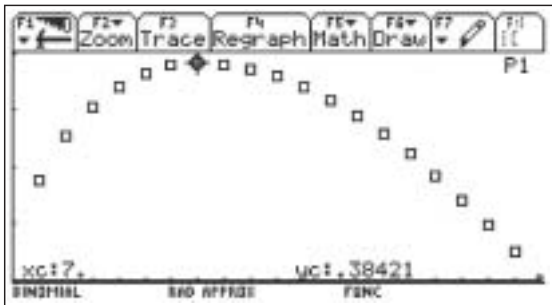


Abb. 4

6. Mathematische Herleitung der optimalen Strategie

Wir untersuchen zunächst den zweiten Faktor von p(s,n), den

$$\text{Ausdruck } \sum_{k=s}^{n-1} \frac{1}{k}$$

Er lässt sich interpretieren als Summe von n-s Rechtecken mit der Breite 1 und der Höhe 1/x unter der Funktion y=1/x. Summanden und Funktion sind in der folgenden Abbildung dargestellt:

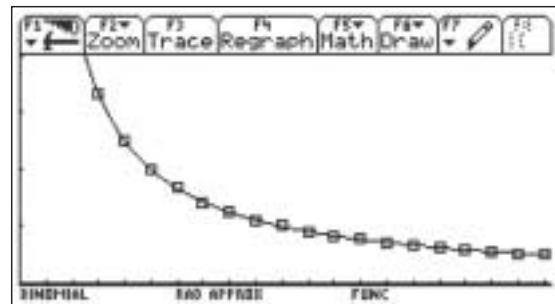


Abb. 6

5. Verallgemeinerung auf beliebiges n

$$p(s,n) = \sum_{k=s+1}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{s}{k-1} = \frac{s}{n} \sum_{k=s}^{n-1} \frac{1}{k}$$

Aufgabe: Wir füllen die folgende Tabelle aus, indem wir verschiedene n in der Klasse verteilen. Was stellst du fest, wenn du die Resultate untersuchst? Gibt es einen Zusammenhang von n und s? Kannst du daraus eine optimale Strategie ableiten?

n =	20	10	30	70	...	500
s optimal =	7					
Zugeh. gr. Wkeit	0.384					

Lösung: Das Verhältnis s/n ist ungefähr 0.37 (umso besser, je größer n). Die zugehörige Wahrscheinlichkeit ist ebenfalls ca. 0.37 (umso besser, je größer n). Die optimale Strategie lautet daher, die ersten 37% der Tauben vorbeigehen zu lassen und dann 37% Chance zu haben, die Grösste zu erwischen. Einsatz des TR:

$\frac{s}{n} \cdot \sum_{k=s}^{n-1} \left(\frac{1}{k}\right) + p(s, n)$		Done		
$\text{seq}(\langle s, p(s, 30) \rangle, s, 1, 30)^T$				
1.	2.	3.	4.	5.
.13206	.19744	.24617	.28378	.31385
$\text{seq}(\langle s, p(s, 30) \rangle, s, 1, 30)^T$				

Abb. 5

Also nähert sich der Wert von $\sum_{k=s}^{n-1} \frac{1}{k}$ für große n dem Ausdruck

$$\int_s^n \frac{1}{x} dx = [\ln(x)]_{x=s}^{x=n} = \ln(n) - \ln(s) = \ln\left(\frac{n}{s}\right)$$

$$p(s,n) \approx \frac{s}{n} \cdot \ln\left(\frac{n}{s}\right)$$

Wann ist p(s,n) maximal?

Mit der Substitution x:=s/n (also s=xn) folgt, immer für große n: P(xn,n) ≈ f(x) := x·ln(1/x). Es ist nur das Verhältnis s:n wesentlich; die absoluten Zahlen spielen keine Rolle.

Aufgabe: Berechne für den Fall großer n den Wert von s/n, für welchen p(s,n) maximal wird, und leite daraus deine optimale Strategie ab. Vergleiche mit den Resultaten aus den vorhergehenden Schritten.

Lösung: Optimale Strategie heißt, 36.79% der Tauben vorbeizulassen, dann ergibt sich die maximale Wahrscheinlichkeit p=0.3679 des Treffens der größten Taube (für große n), konsistent mit den früheren Ergebnissen.

Einsatz des TR:

$x \cdot \ln\left(\frac{1}{x}\right) + f(x)$		Done
$\frac{d}{dx}(f(x)) + f1(x)$		Done
$\text{solve}(f1(x) = 0, x)$		x = .36788
$\text{zeros}(f1(x), x)$		(e ⁻¹)
$f(e^{-1})$		(e ⁻¹)
$f(\text{ans}(1))$		

Abb. 7

Anhang: Programm taube()

```

taube()
Prgm
Local og,n,z
ClrIO
ClrHome
floor(10^(rand(4)+1)*rand())->og
Request "Anzahl Tauben",n
expr(n)->n
For z,1,n
  Disp string(z)&" Taube "&
    string(rand(og))
  Pause
EndFor
EndPrgm

```

Literatur


- [1] Peter Mäder: Mathematik hat Geschichte, p. 96 ff.
 [2] Arthur Engel: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, Band 2, p. 201 ff.

Autor

René Schelldorfer
 Kantonsschule Büelrain Winterthur
 Pädagogische Hochschule Zürich
 Brauerstr. 44, CH-8400 Winterthur, Schweiz
 sf@kbw.ch

Digitale Schaltkreissimulation auf dem Voyage 200

Malte Harder

 Logix, eine Schaltkreissimulation für den TI-92+/TI-89 und den Voyage 200, ist im Rahmen eines von Texas Instruments ausgeschriebenen Wettbewerbs, dem Flash Application Development Contest 2002, (<http://education.ti.com/us/student/winstuff/appcontest2002winners.html>) entstanden. Es beinhaltet alle Funktionen, um einfache digitale Schaltungen zu bauen und zu simulieren. Dabei stehen die grundlegenden logischen Gatter wie „UND“, „ODER“, „NICHT“, ... und auch einige fertige Flip/Flop-Module zur Verfügung. Die Gatter können auf einem Schaltplan platziert und miteinander verbunden werden. Um eine Schaltung testen zu können, gibt es Ein- und Ausgänge, die mit den Gattern verbunden werden können. Im Simulationsmodus können die Eingänge dynamisch ein- und ausgeschaltet werden. Die Schaltung reagiert sofort auf die Änderungen.

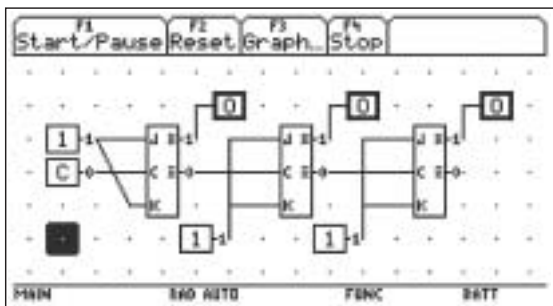


Abb. 1

Logix kann dazu benutzt werden, kleine Schaltungen zu testen, bevor man ein großes Simulationsstudio startet, aber auch um die Grundlagen der digitalen Schaltungen zu vermitteln und

damit zu experimentieren. Das Programm ist ein Flash Programm und kann daher, wie andere Flash-Applikationen, über das [\[APPS\]](#) Menü gestartet werden.

Nach dem Start erscheint ein Punktraster auf dem Bildschirm, in dem die Gatter platziert werden können. Mit Hilfe der Cursortasten kann man den Cursor auf dem Punktraster bewegen. Da der verfügbare Platz auf dem Schaltplan recht groß ist und der Bildschirm relativ klein, kann man durch drücken von [\[2nd\]](#) und einer Cursortaste ganze Bildschirme weiterspringen.

Im Entwurfsmodus (s. Abb. 2) gibt es fünf Menüs. Das erste enthält Menüpunkte zum Sichern und Öffnen von Schaltungen. In den nächsten drei Menüs befinden sich die Werkzeuge zum Aufbau der logischen Gatter, Taktgeber, Ein- und Ausgänge sowie Flip-Flops. Das letzte Menü startet den Simulationsmodus.

Im Entwurfsmodus lassen sich sehr schnell kleine Schaltungen aufbauen. Um zum Beispiel die Funktionsweise einer vereinfachten Flip-Flop Schaltung zu demonstrieren, wählt man den Menüpunkt des NOR Werkzeuges (Nicht-Oder) im Menü [\[F2\]](#) „Gates“. Wenn das Werkzeug ausgewählt ist, reicht es, den Cursor zu platzieren und [\[ENTER\]](#) zu drücken, um das Gatter zu erstellen. Gefällt einem die Position nicht, kann man es mit der Backspacetaste [\[←\]](#) wieder löschen. Für die Flip-Flop Schaltung werden zwei „NOR“ Gatter wie in Abbildung 2 benötigt. Die Gatter haben die Standard Symbole für digitale Bauteile. Anschlüsse für Verbindungen werden als kleine Pins dargestellt.

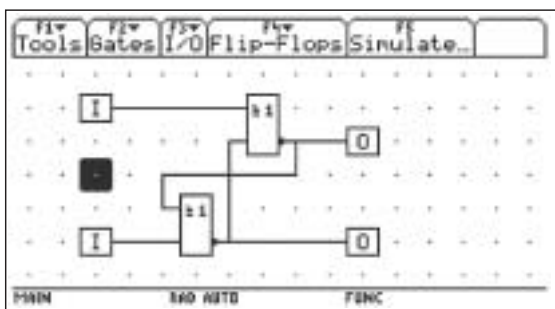


Abb. 2

Nachdem die beiden „NOR“ Gatter gesetzt sind, werden noch zwei Eingänge (F3 „I/O“ -> 1 „Input“) und zwei Ausgänge benötigt (F3 „I/O“ -> 3 „Output“). Diese können genau wie die Gatter auf dem Schaltplan platziert werden.

Nachdem alle Bausteine gesetzt sind, muss die Schaltung verkabelt werden. Dazu geht man mit dem Cursor auf einen der Ausgangs-Pins (auf der rechten Seite) und drückt die [ENTER]-Taste. Der Cursor verwandelt sich nun in eine Linie, die mit den Cursorstasten zu einem beliebigen Punkt bewegt werden kann. Durch wiederholtes drücken der [ENTER]-Taste auf einem anderen Punkt wird ein Eckpunkt eingefügt. Um eine Verbindung endgültig herzustellen, bewegt man den Cursor auf einen Eingangs-Pin und drückt [ENTER]. Genauso wie man Gatter wieder löscht, können auch Verbindungen wieder gelöscht werden. Der Cursor muss sich dabei über einem Eingangs-Pin eines Gatters befinden.

Um die Funktionsweise der Flip-Flop Schaltung zu demonstrieren, reicht es jedoch nicht aus, nur den Schaltplan zu zeigen. Dazu gibt es in Logix den Simulationsmodus. Er bietet eine interaktive Simulation der erstellten Schaltung und kann über das Menü „Simulation“ gestartet werden. Im Simulationsmodus ist die Schaltung nicht mehr editierbar und hinter jedem Ausgangs-pin steht, welchen Wert er hat (0, 1 oder X, wobei X „unbestimmt“ bedeutet). In Abbildung 3 ist die Simulation der Flip-Flop Schaltung von Abb. 2 gezeigt. Während der Simulation können Eingänge ein- und ausgeschaltet werden, indem man den Cursor auf einen Eingang bewegt und die [ENTER]-Taste drückt. Die Auswirkungen auf die Schaltung lassen sich sofort beobachten.

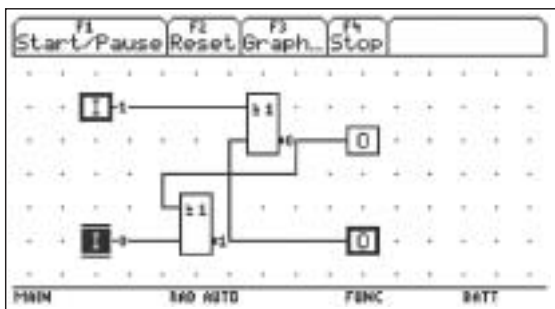


Abb. 3

Eine weitere Möglichkeit, die Funktionsweise von Schaltungen zu beobachten bietet Logix durch den „Graph“-Modus, der aus der Simulationsumgebung aufgerufen werden kann. In diesem Modus werden die Ausgänge in einem Graphen wie in Abbildung 4 dargestellt. Sie zeigt das Diagramm eines Frequenzteilers, dessen Ein- und Ausgänge überwacht werden.

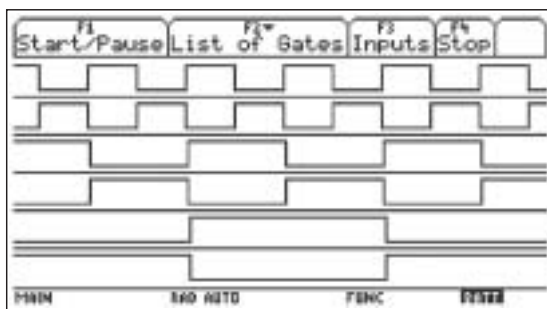


Abb. 4

Logix besitzt noch einige weitere Bausteine, wie Taktgeber und 2-Bit Ein- und Ausgänge zum Erstellen von Schaltungen wie automatischen Zählern oder anderen taktabhängigen Schaltkreisen. Das Programm kann kostenlos von meiner Website (http://www.harderweb.de/harderware/logix/index_de.html) heruntergeladen werden. Dort befinden sich genauere Informationen und einige Beispiele.

Autor:

Malte Harder
 Ansbacher Straße 69a
 D-28215 Bremen
 malte@harderweb.de

Anmerkung der Redaktion:

Der vorliegende Beitrag beschreibt eine Flash-Applikation, die der Autor, als 16-jähriger Schüler, im vergangenen Jahr bei einem weltweiten Wettbewerb von Texas Instruments eingereicht hat. Er hat dabei den 3. Preis gewonnen! Die Redaktion gratuliert dem Gewinner herzlich und freut sich, dass sie ihren Leserinnen und Lesern seine Arbeit vorstellen kann.

Die TI Materialien Seite

Wenn man es weiß, ist es ganz einfach, diese Seite zu finden:

- Zu <http://education.ti.com/deutschland> gehen.
- Zuerst „Lehrerwelt“ auswählen
- und dort „Publikationen“ suchen.
- Ein Klick auf „Unterrichtsmaterialien“ bringt Sie ans Ziel.



Vielen Schülern bereitet die Interpretation eines gegebenen Funktionsgraphen (Unterscheidung von Argument und Funktionswert usw.) große Schwierigkeiten. Damit stellt sich auch die Frage, wie klar die Bedeutung eines Zeit-Weg-Diagramms aus Schülersicht ist und wie weit eine „trockene“ Geradengleichung mit einer gleichförmigen Bewegung in Zusammenhang gebracht werden kann. Ist der TI-83 Plus verfügbar, bietet sich ein sehr anschaulicher Zugang.

Mathematische Vorkenntnisse: Kenntnis des Koordinatensystems

Erstellung eines Zeit-Weg-Diagramms (Statistikplot)

Beispiel: Der Regionalzug R 83 fährt von A-Hausen um 12:32 ab und erreicht das 120 km entfernte D-Burg um 13:52. Dazwischen hält er um 13:00 in B-Stadt (30km) und um 13:45 in C-Berg (115 km).
Erstelle mit dem TI-83 Plus ein Zeit-Weg-Diagramm.

Wählen Sie mit **[STAT], EDIT; 1:Edit...** den Modus zum Editieren der Listen.

Geben Sie in die Liste L₁ die Zeiten und in L₂ die Kilometerzahlen ein. Dabei kann etwa 13.52 als 13 + 52/60 eingegeben werden.

L1	L2	L3	1
12.533	0		
13	30		
13.75	115		
13.87	120		
-----	-----		

L1(4)=13+52/60

Abb. 1

Wählen Sie mit **[WINDOW]** das Menü der Fenstereinstellungen und passen Sie diese an.

```

WINDOW
Xmin=12.5
Xmax=14
Xscl=.5
Ymin=0
Ymax=120
Yscl=50
Xres=1
    
```

Abb. 2

Aktivieren Sie unter **[2nd], STAT PLOT, 1: Plot 1...** die passende Statistik-Plot-Betriebsart.

```

Plot1 Plot2 Plot3
On Off
Type: L: [ ] [ ] [ ]
Xlist:L1
Ylist:L2
Mark: [ ] [ ] [ ]
    
```

Abb. 3

Achten Sie darauf, dass im Funktionseditor (**[Y=]**) nur Plot1 aktiviert ist. Zeichnen Sie das Diagramm mittels Druck auf **[GRAPH]**.

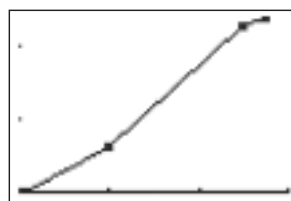


Abb. 4

Untersuchen Sie den Graphen mit der Trace-Funktion (**[TRACE]**) und besprechen Sie die Bedeutung der Koordinaten. Warum sind manche Geradenstücke steiler als andere? Wie ist der Verlauf der Geradenstücke festgelegt? Müssen die Punkte durch Geraden verbunden sein? Welche Information kann den Geradenstücken entnommen werden?

Damit ist es nur ein kurzer Weg zur Erkenntnis, dass sich die Steigung der Geradenstücke als Quotient von Weg- und Zeitdifferenz ergibt, welche aber wiederum die mittlere Geschwindigkeit darstellt.

Man arbeitet also mit einem Modell, das auf der Beziehung $\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ basiert. Mit $s = v \cdot t$ kann daher der zurückgelegte Weg in

Abhängigkeit von Geschwindigkeit und Zeit beschrieben werden. Dies soll im nächsten Schritt geschehen und mit dem Rechner dargestellt werden.

Von der Bewegung zur Geraden... (Parameterplot)

Beispiel: Der EN „C.F. Gauss“ verlässt den Startbahnhof „Am Koordinatenursprung“ um 0:00 und fährt auf der y-Achse 3 Stunden lang mit 60 km/h.

Betrachten wir die y-Achse als Fahrstrecke des Zuges, so gilt für die x-Koordinate $x=0$, und für die y-Koordinate $y=60 \cdot t$. Die Darstellung $[x,y] = [0, 60 t]$ führt unmittelbar zur Parameterdarstellung:

Wählen Sie mit **[MODE]** die Systemeinstellungen, ändern Sie den Plot-Modus auf *Par* (vierte Zeile) und aktivieren Sie das gleichzeitige Zeichnen von Funktionen mit der Wahl von *Simul* (sechste Zeile, alles ohne Abb.).

Geben Sie im Funktionseditor (**[Y=]**) die richtigen Koordinatenfunktionen ein und wählen Sie das Format des Plots laut Abbildung (mit den Pfeiltasten das Symbol ansteuern und mit **[ENTER]** ändern). Deaktivieren Sie sämtliche Statistikplots.

```

Plot1 Plot2 Plot3
0 X1T 00
Y1T 60*T
X2T =
Y2T =
X3T =
Y3T =
X4T =
    
```

Abb. 5

Passen Sie nach einem Druck auf **[WINDOW]** die dortigen Einstellungen an. Der Bereich für T wird von 0 bis 3 (Stunden) gewählt (nicht auf der Abb.)


```
WINDOW
↑Tstep=.1
Xmin=-1
Xmax=3
Xscl=.5
Ymin=0
Ymax=200
Yscl=50
```

Abb. 6

Mittels [GRAPH] kann die (animierte) „Fahrt“ unseres Zuges beobachtet werden.

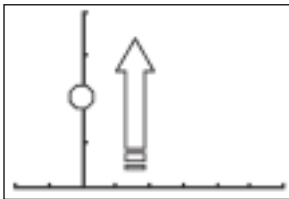


Abb. 7

Diskutieren Sie die rechnerische Verwertbarkeit dieser Darstellung. Lässt sich auch Information (Abfahrtszeit, Geschwindigkeit, Fahrtdauer) gewinnen, wenn die Animation nicht läuft?

Tipp: Ein wirksames Vorgehen zum Wiederholen der Animation ist, den Funktionseditor ([Y=]) zu wählen und eine Koordinatenfunktion mit sich selbst zu überschreiben. Bei der nachfolgenden Betätigung von [GRAPH] wird das Bild erneut animiert.

Ein sinnvolle „Idee“ ist es offensichtlich, auf der x-Achse „viele“ Zeitpunkte einzuzeichnen und in y-Richtung die zu diesen Zeitpunkten zurückgelegten Wegstrecken abzutragen. Für unseren Parameterplot lauten die Koordinatenfunktionen dann $[x,y] = [t, 60t]$. Ändern Sie die Einstellungen im Funktionseditor ([Y=]) und ändern Sie auch das Format des Plots wie in der Abbildung.

```
Plot1 Plot2 Plot3
X1T [T]
Y1T [60*T]
X2T =
Y2T =
X3T =
Y3T =
X4T =
```

Abb. 8

Das Resultat (mittels [GRAPH]) erinnert ganz offensichtlich an das anfängliche Zeit-Weg-Diagramm. Verwenden Sie die Trace-Funktion, um zu zeigen, dass jedem Zeitpunkt eine Wegstrecke zugeordnet ist. Lassen Sie mit verschiedenen Geschwindigkeiten experimentieren.

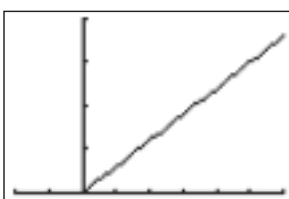


Abb. 9

Hier ist nun deutlich zu erkennen, dass die Gerade nicht die Fahrstrecke des Zuges ist – er fährt ja nach wie vor auf der y-Achse. Um dies zu veranschaulichen könnte man den „Zug“ selbst (Koordinatenfunktionen $[x,y] = [0,60t]$) gleichzeitig mit dem Zeit-Weg-Diagramm animieren.

Eine sinnvolle Erweiterungsmöglichkeit wäre die Parameterdarstellung des Bewegungsvorgangs des ersten Beispiels mithilfe stückweise definierter Funktionen.

Besprechen Sie, wann eine solche Gerade nicht durch den Koordinatenursprung geht und was es bedeutet, wenn sich zwei solche Geraden schneiden.

Beispiel: Der EN „C.F. Gauss“ verlässt den Startbahnhof um 0:00 mit 60 km/h. Der EN „G.W. Leibniz“ fährt um 60 min später mit einer Geschwindigkeit von 120 km/h ab. Wann ist er nur mehr 10 km vom anderen Zug entfernt?

Das bei Bewegungsaufgaben beliebte Einholen ergibt beim Rechnen mit Zügen wenig Sinn, sehr wohl ist aber die Frage nach jenen Abständen berechtigt, die von hintereinander fahrenden Zügen eingehalten werden müssen. Diese Aufgabe kann durch Einführung eines imaginären Hilfszuges gelöst werden, der stets 10 km hinter „C. F. Gauss“ fährt. Hat „G. W. Leibniz“ diesen Hilfszug eingeholt, befindet er sich nämlich genau 10 km hinter „C. F. Gauss“.

Die Herleitung der richtigen Koordinatenfunktionen gibt sicher Anlass zur Diskussion, wobei hier programmgemäß der Zusammenhang zwischen Zeit und Weg im Vordergrund steht. Hier ist es anschaulich, die zwei beteiligten echten Züge zuerst auf der y-Achse fahren zu lassen, indem die y-Koordinatenfunktionen auf null gesetzt werden und die entsprechende Plotoption eingestellt wird (siehe Beispiel 2). Auch hier ist anzumerken, dass der gefragte Zeitpunkt nicht aus der Animation ermittelt werden kann!

```
Plot1 Plot2 Plot3
X1T [T]
Y1T [60*T]
X2T [T]
Y2T [60*T-10]
X3T [T]
Y3T [120*(T-1)]
X4T =
```

Abb. 10

Wird danach das Zeit-Weg-Diagramm gezeichnet, kann mittels Trace-Funktion näherungsweise der Schnittpunkt der beiden (richtigen) Geraden ermittelt werden. Aus der Bedingung $60 * T - 10 = 120 * (T - 1)$ kann der Zeitpunkt auch berechnet werden.

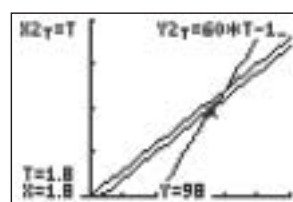


Abb. 11

... und zur Geradengleichung (Funktionsplot, Gleichungssysteme).

Komfortabler kann mit der bekannten Darstellung einer Geraden gerechnet werden, die sich sofort aus den Koordinatenfunktionen bestimmen lässt:

$$G. W. Leibniz: [x,y] = [t, 120(t-1)] \Rightarrow y = 120(x-1) \Rightarrow y = 120x - 120$$

Nach einer Untersuchung der Gleichung (z.B. $x = 0$ setzen) könnten Ergebnisse der bisherigen Tätigkeiten folgendermaßen lauten:

Gleichförmige Bewegungen lassen sich in der Form $y = kx + d$ beschreiben, dabei ist k die Geschwindigkeit, x die Zeit und d der zurückgelegte Weg um 0:00.

Da dies die Darstellung einer Geraden ist, ist ein gleichförmiger Bewegungsvorgang etwa durch zwei Paare der Form (Zeit, Ort) eindeutig festgelegt.

Beispiel: Der ICE „J. Bernoulli“ hat um 13:30 bereits 100 km zurückgelegt, um 14:00 ist er bei 160 km angelangt. Wie lautet die Bewegungsgleichung?

Mit diesen Wertepaaren ist das Ansetzen eines Gleichungssystems in zwei Variablen für k und d möglich, das danach mit dem TI 83 gelöst werden könnte. Dies erscheint mir für das Erlangen eines Verständnisses jedoch nicht sinnvoll. Verständnisorientierter ist die Berechnung von $k = \bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{60}{0,5} = 120$ und der anschließenden Berechnung von $d = -1520$ durch Einsetzen von k und des Wertepaares (13.5, 100) in die allgemeine Geradengleichung $y = kx + d$.

Auch das mit der Parameterdarstellung im Grafikenfenster nur näherungsweise gelöste Beispiel führt auf ein Gleichungssystem mit zwei Variablen. Beim händischen Rechnen führt hier wohl nur das Gleichsetzen der Wege zu einem verständnisorientierten Zugang. Ergänzend können die Funktionen in der expliziten Darstellung gezeichnet und der Schnittpunkt mittels [2nd], **CALC**, **5: intersect** bestimmt werden.

Ändern Sie in den Systemeinstellungen ([MODE]) den Plot-Modus auf Func (vierte Zeile) und geben Sie die Funktionen im Funktionseditor ([Y=]) ein.

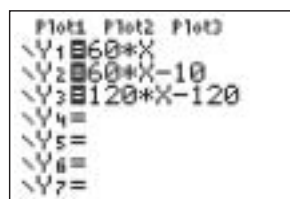


Abb. 12

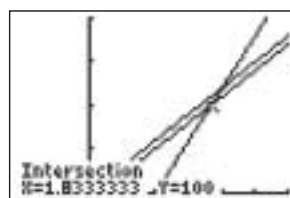



Abb. 13

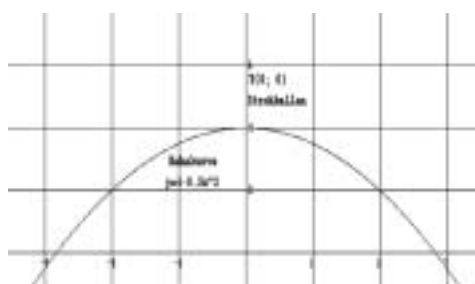
Autor:
Mag. Helmut Springer
helmutspringer@aon.at

Analysis – eine Auseinandersetzung mit alten Problemen und neuen Werkzeugen

Marlies Weber

 Skizziert wird eine Unterrichtseinheit, in der die Schüler in arbeitsteiliger Gruppenarbeit/alternativ: Stationenarbeit [1] anhand von alltagsrelevanten Problemstellungen und unter möglichst optimalem Einsatz des TI-92 (oder eines anderen CAS) den **Ableitungsbegriff** selbständig entdecken.

Gruppenaufgabe 1:
Unfall auf spiegelglatter Rennstrecke



Das Bild zeigt den Ausschnitt einer Rennstrecke, deren Mittellinie im dargestellten Bereich durch die Gleichung $y = 4 - 0.5x^2$ dargestellt werden kann. Bei spiegelglatter Fahrbahn gerät ein Fahrzeug ins Rutschen und landet im Punkt $Y(0;6)$ in den Strohballen.

- An welcher Stelle S hat das Fahrzeug die Bahnkurve verlassen?
- Wie lässt sich die Richtung des Autos zum Zeitpunkt des Kontrollverlusts angeben?

TIPPS: Rennstrecke

- Überlege zunächst, wie sich das Auto bewegt, wenn die Reifen auf der glatten Bahn nicht mehr greifen und die Lenkung versagt.
- Physikalischer Hintergrund?
- Welche Bedeutung hat der Punkt Y in bezug auf den gesuchten Punkt S ?

- Wie lässt sich dieser Zusammenhang in einer Bedingung für den „Rutschkurs“ ausdrücken?
- Experimentiere, um eine Lösung zu finden!

Die Vorarbeit im Unterricht:

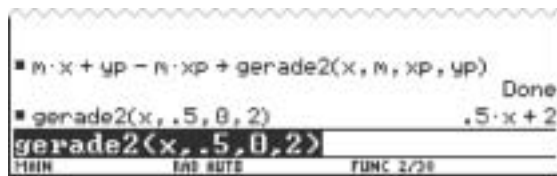
Bausteine und ihre Dokumentation [2]

Die Benutzung von Bausteinen, die mit dem CAS erzeugt wurden und bereitstehen, führt zu neuartigen Strategien beim Lösen von Aufgaben. Als Beispiele sei – neben dem Baustein **Normalform: $mx + b \rightarrow \text{gerade1}(x,m,b)$**

genannt:

Geraden-Baustein: Punkt-Steigungs-Form

$mx + yp - mxp \rightarrow \text{gerade2}(x,m,yp)$



Mit Hilfe dieses Bausteins können Geraden in Abhängigkeit von der Steigung m und den Koordinaten eines Punktes P der Geraden $P(xp; yp)$ definiert, mit ihnen Rechnungen durchgeführt oder auch gezeichnet werden.

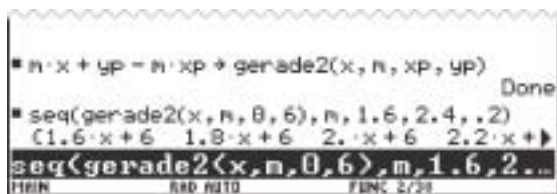
Lösungsansätze der Schülerinnen:

- Erinnerung an Physik: Lenkung versagt \rightarrow Auto fährt genau in die Richtung weiter, die es gerade in diesem Moment inne hat = Momentanrichtung (Trägheitsgesetz)
- Fahrt-Richtung = Richtung der „breitenlosen“ Fahrbahn am jeweiligen Punkt
- „Glatte Fortsetzung“ der Fahrbahn durch eine **Gerade**:

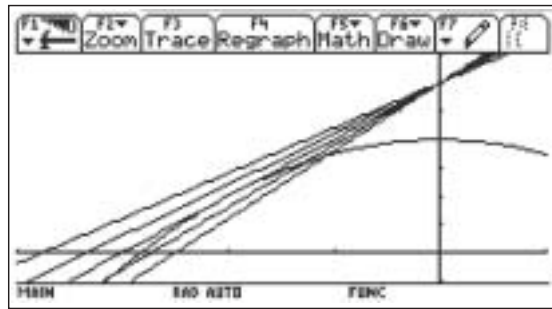
Gegeben: Punkt $Y(0; 6)$
Steigung = Momentanrichtung der Fahrbahn in einem Punkt $S(sx; sy)$

Gesucht: Punkt S oder / und Steigung der Geraden

Graphisch-experimenteller Lösungsansatz mit Hilfe des Bausteins gerade2:



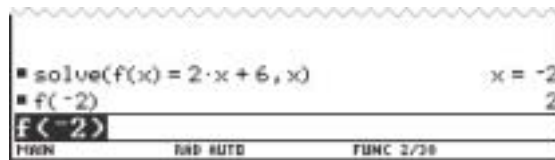
Rein optisch kommen verschiedene Richtungen in Frage, obwohl die Straße natürlich an jedem Punkt nur eine Momentanrichtung haben kann:



Wir suchen jetzt nach einer Methode, die passende Richtung aus dem Bündel zu isolieren.

Forderung: Die gesuchte Gerade dürfte die Kurve (Fahrbahn) im (gesuchten) Punkt S nur berühren: in diesem Fall existiert nur ein eindeutiger Schnittpunkt! Durch Zoomen und Kontrolle mit Hilfe der Trace-Funktion vermutet man dies für $m=2$.

Algebraischer Lösungsansatz:



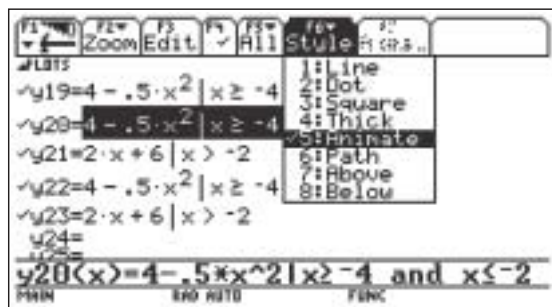
Bestätigung:

Die Gerade $y = 2x + 6$ durch den Punkt Y schneidet die Bahnkurve in genau einem Punkt $S(-2; 2)$. Ihre Steigung $m = 2$ muss also die „momentane Richtung“ des Autos im Moment des Kontrollverlustes sein.

Animation der Fahrt des Autos einschließlich des Rutschvorgangs

Bemerkung: Diese Animation lässt sich erst nach Lösen des Problems erzeugen – oder eventuell zu Beginn durch den Lehrer zur Motivation vorführen.

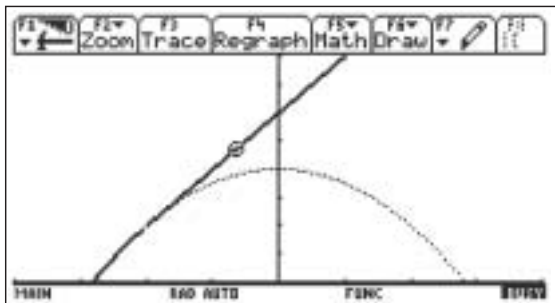
Im Y-Editor:



y_{19} definiert die Bahnkurve im Intervall $[-4; 4]$; Style: Dot [2] (nur als Hintergrund)

y_{20} definiert die Bahnkurve im Intervall $[-4, -2]$; Style: Animate [5]

y21 definiert den tangentialen Rutschkurs im Bereich $x > -2$;
 Style: Animate [5]
 y22 und y23 zeichnen nochmals die gesamte „Fahrt“;
 Style: Thick [4]



Literaturangaben:

[1] Methodische Einweisung in das Arbeiten an Stationen findet man z.B. unter <http://php.learnline.de/angebote/blickpunktmatnat/schulmathematik/skripte/liste.php?be=Stationenlernen>

[2] Eberhard Lehmann, Mathematiklehren mit Computeralgebrasystem-Bausteinen, diVVerlag Franzbecker;

Autorin:

Marlies Weber
 Otto-Schwabe-Str. 9
 D-65239 Hochheim
 Email: marliesweber@web.de

Bewegungs-Simulation von Scheibenwischern

Heinz Pichler

Die Physik der Oberstufe hält vor allem in der Mechanik reizvolle Kapitel bereit, die eine unterstützende Illustration durch einen programmierbaren Graphikrechner vom Schläge des TI-82 oder TI-83/Plus/SE verdienen. Ein solches Thema sind etwa Translation und Rotation und deren Überlagerung am Beispiel von Auto-Scheibenwischern, die im Physikunterricht im Rahmen eines Projekts – auch fächerübergreifend mit Mathematik oder Darstellender Geometrie – behandelt werden können. Wie die Erfahrung zeigt, eignet sich dieses Projekt hervorragend zur Schulung von Beobachtungsvermögen und geometrischer Vorstellungskraft.

Vorkenntnisse: Grundbegriffe der Translation und Rotation

Praktische Arbeit: Die SchülerInnen fertigen auf Grund eigenständiger Beobachtungen in ihrem Umfeld Fotos, Skizzen oder maßstäbliche Zeichnungen von verschiedenen Scheibenwischern samt Gelenkspunkten an.

Sichtung und Sortierung des Materials:

Die SchülerInnen erhalten vom Lehrer (per Kabel) das Programmpaket „WISCHER“, welches alle üblichen Wischertypen simulieren kann.

In Gruppenarbeit vergleichen die Schüler ihre Unterlagen und ordnen sie dem passenden Wischertyp im Rechner zu, indem sie alle Menüpunkte des Programms durchlaufen (siehe Abb.1).

Als Entscheidungskriterien dienen die Anzahl der Gelenke, deren Lage, Anzahl und Stellung der Hebel sowie der vermutete bzw. beobachtete Bewegungsablauf.



Abb. 1a



Abb. 1b



Abb. 1c

Abb.1: Haupt- und Untermenüs des Programms

An diesem Vermuten, Erkunden und Testen sowie der Aufdeckung und Beseitigung von Fehlern in ihren Skizzen beteiligen sich die SchülerInnen gewöhnlich mit großem Spaß und viel Eifer.

Theorie und Praxis an einigen Beispielen:

Bei allen **Kreiswischern** – mit ihrer fixen Achse – sieht man im Rechnerbild unmittelbar, dass achsennahe Punkte kürzere Wege und achsenferne längere Wege zurücklegen (siehe Abb.2). Die Bahngeschwindigkeit hängt also nicht nur von der „Drehzahl“, sondern genauso (proportional) vom Abstand zur Drehachse ab und gehorcht daher der Formel: $v = \omega \cdot r$

Die Winkelung zwischen Wischerblatt und -arm (Kröpfung) ermöglicht es erst, die Drehachse aus der Fensterfläche zu verbannen.

Geometrisch talentierten Schülern stelle ich bei diesem Modell gerne die Zusatzaufgabe, bei vorgegebener, rechteckiger Scheibe und eingezeichneten Endstellungen des Wischerblattes die Position der Wischerachse per Konstruktion zu ermitteln.

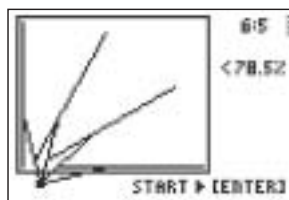


Abb. 2

Gekröpfter Viertelkreis-Wischer

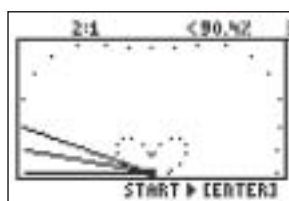


Abb. 3

Radialmodulierter Halbkreis-Wischer

Trickreich wird die obgenannte Rotationsformel von Mercedes bei deren „Wackelwischer“ eingesetzt. In diagonaler Lage des Wischerblattes wird dieses in die Fensterecken hinaus verschoben und damit auch die innere und die äußere Wischkontur um denselben Wert radial versetzt (Abb.3). Da die Blattspitze aber wesentlich größere Wege als die Blattwurzel zurücklegt, ergibt sich ein Gewinn beim überstrichenen Flächenausmaß. Überdies handelt es sich hier bereits um eine höhere Form der Überlagerung von Translation und Rotation. Entsprechend ästhetisch geraten die Bahnkurven.

Einfacher läuft die Bewegung eines Wischers mit *Parallelogrammführung* ab. Unschwer ist zu erkennen, dass die Doppelarme Rotationen um getrennte Achsen und das Wischerblatt eine Translation längs einer Kreisbahn ausführen (Abb.4). Bei diesem Typ sollen die Schüler zudem herausfinden, wohin die Antriebsachsen zu versetzen wären, um (unter gleichzeitiger Verlängerung des Blattes) eine Steigerung des Wischanteils gegen 100% zu erzielen.

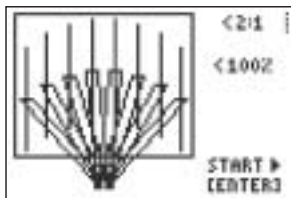


Abb. 4

Parallelogramm-Wischer

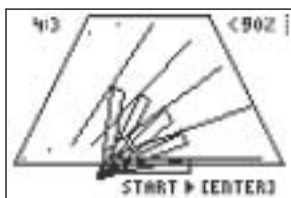


Abb. 5

Trapezoid-Wischer

Wenn die Parallelogrammführung zu einem *Trapezoid* verändert wird, mutiert die Wischergeometrie zu einem Kurbelgetriebe. Die Spitzen des Blattes laufen dann auf sogenannten Koppelkurven. So ist beim Wischertyp der Abb.5 erkennbar, dass die Bewegung als pure Rotation beginnt und gegen Ende hin in eine reine Translation mündet. Der kinematische Ablauf kann als Rotation um die linke Strebenachse gedeutet werden, der eine immer ausgeprägtere Gegenrotation um das Blattgelenk überlagert ist. Der anfangs in der linken Strebenachse weilende Pol wandert also stetig in einen rechts-unten liegenden Fernpunkt ab. In vertiefenden Wahlpflichtgruppen lässt sich an Hand dieses Beispiels das Kapitel wandernder Pole und die Bedeutung von Rast- und Gangpolkurven erörtern. Übrigens sind solche Wischer-Konzeptionen u.a. an den Scheiben von „Audi A2“, „Twingo“ und „Lamborghini“ und eben im Display eines TI-82/83 zu bewundern.

Wahl des Wischertyps:

Aus Sicht des Fahrzeugherstellers liegt wohl allen Konstruktionen das Bemühen zu Grunde, mit dem Wischerblatt einen mög-

lichst hohen Flächenanteil der Scheibe zu überstreichen und dabei keine – aus Fahrersicht – relevanten Blickzonen zu vernachlässigen.

Für die Wahl des Wischertyps spielt das Seitenverhältnis der Scheibe eine entscheidende Rolle, weshalb es im Rechner-Display auch ausgewiesen wird. Wie gut das Wisch-Resultat schließlich ausfällt, lässt sich an der zurückgelassenen Spur des Wischerblattes und aus dem vom Rechner jeweils angeführten, prozentualen Flächenanteil entnehmen.

Programmtechnisches:

Die Programmteile sind so gestaltet, dass sie den Scheibenwischer samt allen Hilfsarmen – gleich einer stroboskopischen Belichtung – in aufeinanderfolgenden Stellungen zeichnen und nach Durchlaufen einer (halben) Periode wieder schrittweise löschen. Die Wischkontur des Blattes bleibt dabei erhalten.

Mit der ENTER-Taste kann der Lauf in jeder Phase angehalten und schließlich wieder fortgesetzt werden.

Für die Trapezoid-Wischer wird der Bewegungsablauf zwecks transparenterer Darstellung der Streben zuerst in Einzelbild und erst ab dem zweiten Durchgang in akkumulierender Graphik dargestellt.

Stellvertretend für das gesamte Programmpaket¹ ist im Anhang das Programmlisting für den Parallelogrammwischer angeführt.

Autor:

Mag. Heinz Pichler
 BG Porcia
 Zernattostrasse 10, A-9800 Spittal/Drau
 email: Pichler_H@lycos.at

Anhang:

```
PROGRAM:PARAB15H
:PlotsOff:FndOff:Degree:Full:GridOff:AxesOff:ClrHome
:31←Xmin:63←Xmax:2←Ymin:68←Ymax:ClrDraw
:Line(31,18,31,18):Line(31,18,31,Ymax)
:Line(31,Ymax,31,18):Line(31,18,31,18)
:Text(8,73,"< 2:1"):Text(15,83,"15"):Text(15,78,"< 100")
:Text(35,78,"[QUIT]"):Text(58,68,"PAUSE *QMS"):Text(57,68,"[ENTER]")
:Circle(2,8,1):Circle(2,8,1)
:48←θ:1←S
:While 1
:48cos(θ)←A:48sin(θ)←B
:Line(2,8,A-2,B,5):Line(2,8,A+2,B,5):Line(A-2,B,A+2,B,5)
:Line(A,8-18,A,18,5)
:Line(-5,1,-1,1):Line(1,1,3,1)
:Pt-On(A,B-18):Pt-On(A,B+18)
:Line(31,18,31,18)
:getKey
:IF Ans=22:Return
:IF Ans=185:Then:Text(35,78,"")
:Text(58,68,"START"):Pause
:Text(35,78,"[QUIT]")
:Text(58,68,"PAUSE"):End
:θ+(25-1)←θ
:IF θ=138 or θ=42:not(5)←S
:θ+(25-1)←θ
:End
```

¹ Das vollständige Programmpaket wird demnächst zum kostenfreien Download von der Texas Instruments Homepage www.texas.at bzw. auf der TI-Materialseite in der Rubrik TI-83/Technik zur Verfügung gestellt. Es liegt eine funktionsgleiche Version für den TI-82 und den TI-83/TI-83Plus/TI-83SE vor.



Ausgangssituation

Eine Masse m wird entlang einer Horizontalebene mit der Kraft F gezogen:

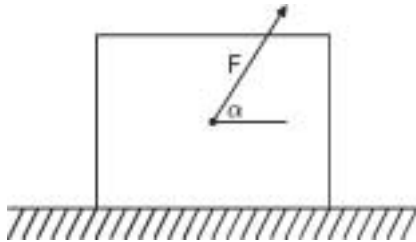


Abb. 1

Die resultierende Kraft ist horizontal, da die Bewegung horizontal verläuft. Die Grundfrage lautet, bei welchem Winkel α diese Kraft am größten wird, wenn die Reibungskraft berücksichtigt wird. Insgesamt ergeben sich folgende Fragestellungen:

- Bei welchem Winkel α wird die resultierende Horizontalkraft am größten?
- Was passiert mit dem Anstellwinkel α , wenn der Gleitreibungskoeffizient μ zunimmt und die resultierende Horizontalkraft maximal bleiben soll?
- Was passiert mit der horizontalen Maximalkraft, wenn der Reibungskoeffizient μ zunimmt?
- Was passiert mit der Bewegung, wenn die Zugkraft F größer als die Gewichtskraft G ist?

Sofern nichts anderes vermerkt wird, verwenden wir in den folgenden Beispiele die Werte $F = 20$ N, $m = 10$ kg und $\mu = 0.1$.

Lösungsidee

Es sei F_H die resultierende Horizontalkraft. Sie setzt sich aus der Horizontalkomponente der Zugkraft F und der Reibungskraft F_R zusammen. Die Kraft F_R ist zur Horizontalkomponente der Kraft F entgegengesetzt gerichtet. Es gilt:

$$(1) F_H = F \cdot \cos(\alpha) - F_R$$

Die Normalkraft F_N des Bodens ist vom Betrag her nicht gleich der Gewichtskraft $G = m \cdot g$, da noch die Vertikalkomponente der Kraft F dazukommt. D.h.:

$$(2) F_N = G - F \cdot \sin(\alpha)$$

Die Reibungskraft F_R ist abhängig von F_N und dem Reibungskoeffizienten μ . Das ergibt:

$$(3) F_R = F_N \cdot \mu$$

Man setzt die Gleichung (2) in Gleichung (3) und schließlich in Gleichung (1) ein. Für F_H ergibt sich folgender Ausdruck:

$$(4) F_H = F \cdot \cos(\alpha) + \sin(\alpha) \cdot F \cdot \mu - m \cdot g \cdot \mu$$

Frage a

Man gibt die Funktionsgleichung in den Editor ein und bestimmt das Maximum graphisch, unter Verwendung der obigen Parameterwerte ($0 \leq x \leq \pi/2$, $0 \leq y \leq 12$).

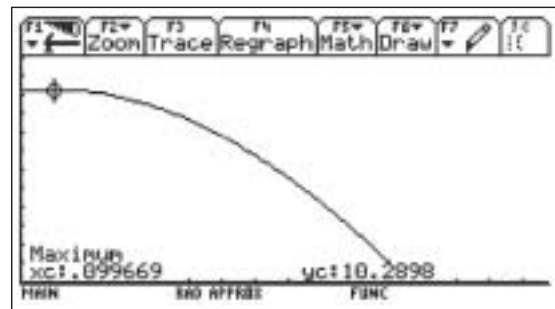


Abb. 2

Das Maximum der Horizontalkomponente wird für $\alpha_{\text{Radiant}} = 0.0997$ erreicht. Der Winkel α in Grad beträgt 5.7° . Das Maximum kann auch bestimmt werden, indem man die erste Ableitung von F_H nach α bildet (Gl. 4). Der Taschenrechner bietet Hilfe mit nSolve:

$$\text{nSolve}(d(20 \cdot \cos(\alpha) + 20 \cdot 0.1 \cdot \sin(\alpha) - 9.81 \cdot 10 \cdot 0.1, \alpha) = 0, \alpha)$$

Frage b

Man variiert den Reibungskoeffizienten μ . Die Vermutung liegt nahe, dass der Winkel α zunimmt, wenn der Reibungskoeffizient μ wächst. Wird der Winkel α größer, so vergrößert sich auch die Vertikalkomponente der Zugkraft F . Dieser Umstand bewirkt eine Verringerung der Normalkraft F_N , weshalb auch die Reibungskraft F_R kleiner wird. Diese Vermutung wird im Folgenden bestätigt. Der Befehl seq leistet uns hier vorzügliche Hilfe:

$$\text{seq}(\text{nSolve}(d(20 \cdot \cos(\alpha) + 20 \cdot \sin(\alpha) \cdot \mu - 9.81 \cdot 10 \cdot \mu, \alpha) = 0, \alpha), \mu, 0.1, 0.5, 0.1)$$

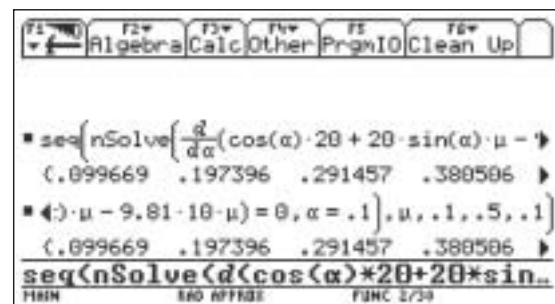


Abb. 3

Um den Winkel, der zur maximalen Horizontalkomponente der resultierenden Kraft führt, direkt zu berechnen, leiten wir F_H gemäss der Funktionsgleichung (4) nach α ab:

$$(5) F'_H(\alpha) = -\sin(\alpha) \cdot F + \cos(\alpha) \cdot F \cdot \mu$$

Setzt man die obige Ableitung gleich 0, so erhält man:

$$(6) \tan(\alpha) = \mu \Leftrightarrow \alpha = \arctan(\mu)$$

Der Anstellwinkel α wird mit Zunahme des Reibungskoeffizienten μ größer. Dieser Zusammenhang ist verständlich, da der Einfluss der Reibung immer markanter wird und durch die Vertikalkomponente der Kraft F verringert wird.

Frage c

Setzt man die Gleichung (6) in Gleichung (4) ein, so erhält man:
 (7) $F_H = F \cdot \cos(\arctan(\mu)) + \sin(\arctan(\mu)) \cdot F \cdot \mu - m \cdot g \cdot \mu$

Dieser Ausdruck lässt sich mit Hilfe der trigonometrischen Beziehungen vereinfachen. Der Taschenrechner verwandelt die rechte Seite direkt in

(8) $F_H = F \cdot (1 + \mu^2)^{0.5} - m \cdot g \cdot \mu$

Die folgende Abbildung stellt die Maximalkraft F_H in Abhängigkeit vom Reibungskoeffizienten μ dar, unter Verwendung der obigen Parameterwerte. Setzen wir die Variable m auf 10 (mit $10 \rightarrow m$) und geben wir $y1(x)$ gemäß (8) im Funktionseditor ein:

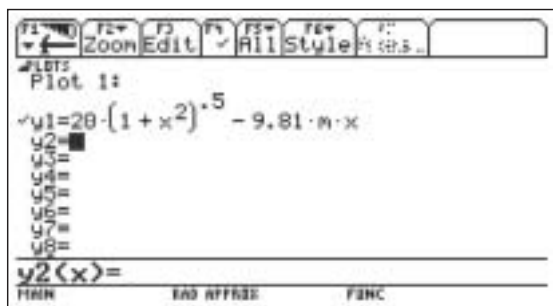


Abb. 4

so resultiert für $0 \leq x \leq 0.5$ und $0 \leq y \leq 20$ die Graphik

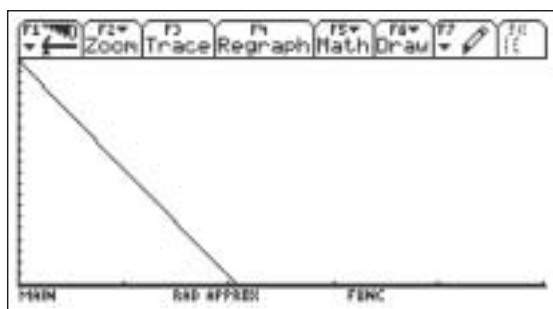


Abb. 5

Man variiert die Masse m und speichert die Massen (10 kg, 5 kg, 1kg, 0.5 kg) in m als eine Liste ab:
 { 10, 5, 1, 0.5 } -> m

Daraus resultieren für $0 \leq x \leq 2$ und $0 \leq y \leq 30$ die Graphen

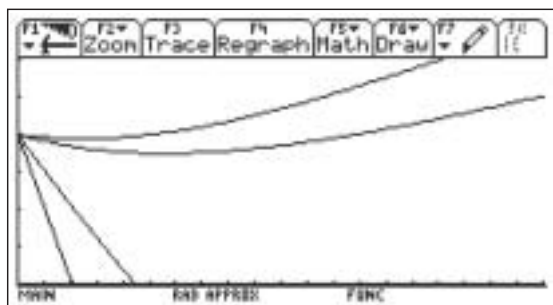


Abb. 6

Man sieht, dass die Kurven für die Massen 10 kg und 5 kg die x -Achse schneiden. Es gibt offensichtlich eine obere Grenze für μ , oberhalb welcher keine Fortbewegung mehr möglich ist.

Betrachtet man die beiden Graphen für die Massen 1 kg und 0.5 kg, so nimmt die maximale Horizontalkraft F mit Zunahme des

Reibungskoeffizienten μ zunächst ab, erreicht ein Minimum und nimmt anschließend wieder zu. Dass die maximale Horizontalkraft bei Zunahme des Reibungskoeffizienten abnimmt, ist verständlich. Verblüffend und zunächst unerklärlich ist hingegen der anschließende Anstieg.

Wir betrachten den Kurvenverlauf für eine Masse von 1 kg und bestimmen deren Minimum. Den Graph erhalten wir, indem wir $1 \rightarrow m$ eingeben.

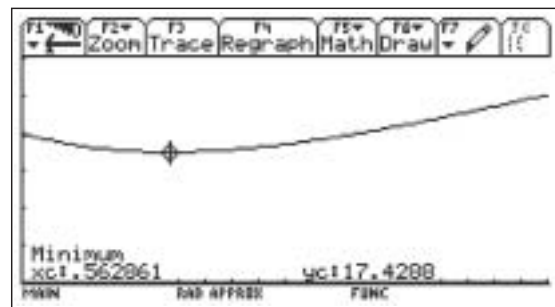


Abb. 7

In Abb. 7 bedeutet immer noch:

x : Reibungskoeffizient

y : Maximum der Horizontalkraft F_H

Die horizontale Maximalkraft hat das Minimum bei einer Reibungszahl μ von 0.56. Dieser Umstand tritt ein bei einem Anstellwinkel α von 0.51 (29.4°).

Es drängen sich folgende Fragen auf :

1. Welche Bedeutung hat das Minimum und wie lässt sich das Minimum physikalisch interpretieren?
2. Gibt es einen formalen Zusammenhang zwischen Minimum und physikalischer Situation?

Frage d

Physikalische Situation

Ist die Vertikalkomponente der Zugkraft F größer als die Gewichtskraft $G = m \cdot g$, so hebt, nach einer anfänglichen Kippbewegung, die Masse m von der Unterlage ab. Die Bedingung lautet:

(9) $G < \sin(\alpha) \cdot F$

Es folgt $\sin(\alpha) = G / F$, somit $\alpha = \arcsin(G / F)$. Ist die Kraft F größer als die Gewichtskraft G , so gibt es einen reellen Winkel α zwischen 0 und $\pi/2$, der diese Bedingung erfüllt. Ist der Anstellwinkel größer als dieser Grenzwinkel, hebt der Körper ab.

Formaler Zusammenhang

Leitet man die Gleichung (8) nach dem Reibungskoeffizienten μ ab, so erhält man:

$F'_H(\mu) = F \cdot \mu / (\mu^2 + 1)^{0.5} - G$

Um das Extremum zu bestimmen, setzt man die erste Ableitung gleich Null und löst nach dem Reibungskoeffizienten μ auf. Es ergibt sich:

$\mu = G / (F^2 - G^2)^{0.5}$

Für μ ergibt sich nur ein reeller Wert, wenn die Zugkraft F größer als die Gewichtskraft G ist. (Die negative Lösung für μ vernachlässigt man, da hier ein negativer Reibungskoeffizient keinen Sinn ergibt.)

Die Gleichung $F'_H(\mu) = 0$ lässt sich auch schreiben als:

$$G = F \cdot \mu / (\mu^2 + 1)^{0.5}$$

Da $\mu = \tan(\alpha)$ nach Gl. (6), folgt

$$G = F \cdot \tan(\alpha) / (1 + \tan^2(\alpha))^{0.5} = F \cdot \sin(\alpha)$$

Dieser Ausdruck ist der gleiche wie bei der Beschreibung der physikalischen Situation. Offensichtlich sind die Werte der Maximalkraft physikalisch richtig bis zum Extremum. Nachher hat man mathematische Werte, die physikalisch keinen Sinn mehr ergeben.

Nullstelle

Wenn das Minimum von $F_H(\mu)$ oberhalb der x-Achse liegt, dann hat $F_H(\mu)$ keine reellen Nullstellen. Diese Tatsache kann man zeigen, indem man die Nullstelle der Funktionsgleichung (8) bestimmt. Löst man die Gleichung

$$F \cdot (1 + \mu^2)^{0.5} - G \cdot \mu = 0$$

nach der Reibungszahl μ auf, so erhält man

$$\mu^2 = F^2 / (G^2 - F^2)$$

Da μ positiv sein muss, gilt

$$\mu = F / (G^2 - F^2)^{0.5}$$

Für μ ergibt sich nur ein reeller Wert, wenn die Gewichtskraft G größer als die Zugkraft F ist. Dieser Zusammenhang ist korrekt und mit der physikalischen Situation verträglich. Ist die Zugkraft F größer als die Gewichtskraft G , so kann man α so wählen, dass die Masse m in eine Kippbewegung gerät und schließlich von der Horizontalebene abhebt.

Autor:

Andreas Möckli
Evangelische Mittelschule Schiers
anmoeckli@bluewin.ch

Literatur und Materialien für den Unterricht mit Graphikrechnern

Die Zahl der Unterrichtsmaterialien für TI-Graphikrechner und Taschencomputer ist schon jetzt beeindruckend und wächst ständig weiter. Überzeugen Sie sich selbst: eine vollständige Übersicht über Literatur und Handreichungen für den Unterricht finden Sie auf unserer Internetseite education.ti.com/deutschland.

Neuerscheinungen

Otto M. Keiser, Algebra mit CAS (Bildung Sauerländer, ISBN 3-0345-0103-X): Einführung in das Arbeiten und Unterrichten mit CAS in Sekundarstufe II, 230 Seiten:

- Der (teilweise) bekannte Stoff wird neu präsentiert und zugleich von CAS begleitet.
- Verständliche und stufengerechte Sprache
- Nur soviel Theorie wie unbedingt nötig
- Exemplarische Erklärungen
- Behutsame Einführung in den Taschencomputer (TC): In jeder Lektion ein neuer Befehl!
- Gegenüberstellung der algebraischen und grafischen Lösungsmethoden
- Hilfestellungen beim sinnvollen Einsatz von CAS
- Repetition und Festigung der Theorie anhand zahlreicher und mehrfach erprobter Übungsaufgaben
- Anwendungsaufgaben zur Mathematik im modernen Alltag



B. Eicke, Mathematikrezepte für den Unterricht mit TI-89 und TI-92 Plus, jetzt als Neuauflage unter Integration des Voyage™ 200 (zu bestellen unter www.pythagoras.ch):



Weber, Zillmer, TCP 2001: Lehrbuch Stochastik für die Gymnasiale Oberstufe (zu bestellen unter www.Paetec.de)



Zubehör zu TI-Rechnern

Abgesehen vom Zubehör, das TI Ihnen bietet um Ihren Rechner so effizient wie möglich einzusetzen, bieten Ihnen viele unserer autorisierten Partner für die Schule eine Anzahl zusätzlicher Accessoires. Einen Überblick über alle Partner und deren Webseiten finden Sie im Händlerverzeichnis in unserer Produktwelt unter education.ti.com/deutschland

Cynox Multilink 16-1 für TI-Rechner

Cynox MultiLink, der Datentransmitter zum Übertragen von Taschenrechnerdaten auf bis zu 16 typgleiche Taschenrechner in einem Übertragungsvorgang.

Mit dieser Neuentwicklung kann ein Lehrer sehr schnell und einfach eine Datei, die sich auf seinem TI Graphikrechner befindet, auf die Geräte seiner Schüler verteilen.



Einfach das Lehrgerät an die Masterbuchse anschließen, die Schülergeräte mit den Slavebuchsen verbinden und die Übertragung mit der mitgelieferten M-Link Software starten.

Das Gerät unterstützt derzeit die TI-Graphikrechner: TI-89, TI-92 plus und Voyage™ 200. Die Funktion für den TI-83 Plus ist in Entwicklung und wird im Herbst 2003 zur Verfügung stehen. Weitere Informationen unter www.cynox.de.

Service auf einen Blick

Innovative Technologie



Dank der Flash-Technologie unserer Graphikrechner TI-83 Plus, TI-83 Plus *Silver Edition*, TI-89 und Voyage™200 können Sie die bestehenden Fähigkeiten der Rechner durch Herunterladen zusätzlicher Applikationen erweitern und Ihren persönlichen Wünschen anpassen. Damit halten Sie sich alle Optionen für die Zukunft offen.

Kostenlose Ausleihe

Sie möchten einen TI-Taschencomputer einschließlich Zubehör testen?

– Kein Problem! Wir leihen Ihnen Einzel-exemplare oder Klassensätze bis zu vier Wochen – kostenlos und unverbindlich!



Unterrichtsmaterialien

Zum Einsatz unserer Graphikrechner haben wir Unterrichtsmaterialien entwickelt, die Sie bei der Vermittlung der Lehrinhalte unterstützen. Über 70 Titel erhältlich!



Lehrerfortbildungen

Graphikrechner und Taschencomputer sind für viele Kollegen neu und unbekannt. Wir helfen Ihnen mit Fortbildungen an Ihrer Schule oder auch online!

Anruf genügt! Tel: +49 (0) 251-5 1038-0;

E-Mail: t3.info@uni-muenster.de

URL: <http://www.t3deutschland.de>

T3Schweiz: <http://www.educanet.ch/home/T3Schweiz/>

T3Österreich: <http://www.acdca.ac.at/t3/index.htm>



CBL 2™/CBR™

Portables, universell einsetzbares Messwert-erfassungssystem für den naturwissen-schaftlichen Unterricht. Über 40 zusätzli-che Sensoren erhältlich. Kompatibel zu allen TI-Graphikrechnern.



TI-GRAPH LINK™

Die Verbindung zu Computer, Drucker und Internet. Liegt allen TI-Rechnern und Taschencomputern bei. Der TI-83 Plus ist auf Nachfrage auch ohne TI-GRAPH LINK erhältlich.



TI ViewScreen™

Projizieren Sie das Display der Lehrerversion Ihres TI-Graphikrechners mit ViewScreen und Over-headprojektor!



TI-Presenter™

Zur Projektion des Displays der Lehrerversion Ihres TI-Graphikrechners mittels Beamer oder Fernseher.



TI-Connect™

Die Verbindungssoftware der nächsten Generation. Leistungsfähig und einfach. Verbindet TI-83, TI-83 Plus, TI-83 Plus Silver Edition, TI-89, Voyage™200 und CBL 2™ mit Computer und Internet. Kostenloser Download von der Webseite:

epsstore.ti.com



Allgemeine Informationen



Nehmen Sie mit unserem Customer Support Center Kontakt auf, wenn Sie technische Auskünfte benötigen oder Fragen zum Gebrauch unserer Rechner oder bezüglich einer Lehrerfortbildung haben. Auch zum Ausleihen der Rechner ist das CSC die erste Adresse:

Wir sind für Sie da: Mo – Fr, 9.00 – 17.00 Uhr

TI-CSC c/o SITEL
Woluwelaan 158
B-1831 Diegem

Tel D: +49 (0) 6196-975015 Fax D: +49 (0) 6196-975044
Tel AT: +43 (1) 502910007 Fax AT: +43 (1) 502910034
Tel CH: +41 (1) 2730688 Fax CH: +41 (22) 7100036

Allgemeine Informationen:

ti-cares@ti.com

Kostenlose Ausleihe von Graphikrechnern und Taschencomputern:
ti-loan@ti.com

Kostenloses Abonnement der TI-Nachrichten:
ti-nachrichten@ti.com

Garantie

Auf alle Schulrechner bietet Texas Instruments 2 Jahre Austauschgarantie. Sollte doch einmal etwas defekt sein, rufen Sie bitte zunächst unser Customer Support Center an. Meist kann das Problem bereits am Telefon behoben werden. Defekte Rechner bitte dem Händler Ihrer Wahl übergeben.

education.ti.com/deutschland · education.ti.com/oesterreich · education.ti.com/schweiz
ti-cares@ti.com