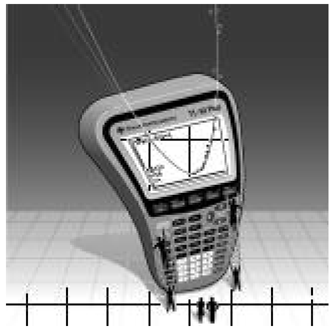


Uma Introdução Prática ao Estudo das Funções

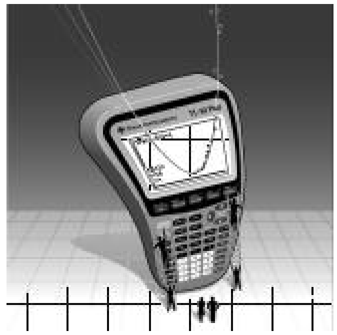
Allan Bellman
James Hubert Blake High School
Silver Spring, MD

Aviso importante com relação aos materiais didáticos

Texas Instruments Incorporated
7800 Banner Drive, M/S 3918
Dallas, TX 75251

Attention: Manager, Business Services

ISBN: 1-886309-33-7
XFORM/ESB/1L4/A



Indice

Prefácio

As calculadoras gráficas deram aos alunos dos nossos dias o poder de olhar para a Matemática de uma maneira que era impensável há algumas gerações atrás. O *Transformation Graphing* é uma das muitas aplicações que estão disponíveis para as várias calculadoras que têm a tecnologia FLASH, a qual permite o uso deste tipo de aplicações. A capacidade de facilmente interagir com o gráfico, que esta aplicação permite, vai levar para um nível superior a interactividade e as capacidades de visualização das calculadoras gráficas. Os alunos irão beneficiar, e muito, deste tipo de aplicações num futuro próximo.

Esta aplicação, o *Transformation Graphing*, faz com que os alunos se sintam confortáveis mal começam a sua utilização. Vai também fazer com que alguns professores recordem os programas de computador interactivos que usaram, no passado, nas suas aulas de Cálculo.

As seis actividades deste livro fornecem um olhar interactivo para as três funções mais usualmente estudadas: linear, quadrática, e exponencial. Nestas actividades, os alunos irão primeiro fazer um estudo por observação das funções e dos efeitos dos parâmetros de cada uma delas, depois usarão o *Transformation Graphing* como uma ferramenta de modelação. Embora este livro tenha sido escrito para o estudo das referidas funções, as técnicas que introduz podem ser usadas para qualquer função.

Espero que estas actividades consigam ilustrar as várias maneiras de usar o *Transformation Graphing*, e estarei à disposição para tentar resolver qualquer dificuldade que surja nas vossas aulas. Qualquer função pode ser estudada por este método. Só desejo conseguir despertar o vosso interesse. Com os meus alunos, descobri que gostaram muito de usar esta visão das funções e de usar esta aplicação para melhorar os seus modelos, mesmo naqueles casos em que tinham iniciado a modelação por outros métodos.

As explorações estão organizadas em três conjuntos de duas actividades: Actividades 1 e 2 para função linear, Actividades 3 e 4 para a função quadrática, e as Actividades 5 e 6 para a função exponencial. A primeira actividade, de cada conjunto de actividades, habilita o aluno a explorar os efeitos de cada um dos parâmetros das funções. Por exemplo: Qual será o efeito no gráfico da recta Y=AX+B se se alterar o valor de A ou de B. Cada uma das seis actividades tem um problema de modelação ou outros problemas incluídos.

Cada actividade começa por apresentar um exemplo que leva os alunos a conhecerem as instruções necessárias ao uso do *Transformation Graphing*. No seguimento deste procedimento para adquirir destreza manual são dados problemas e trabalhos para casa sem qualquer tipo de instruções. Por isso, penso que pode ser dada aos alunos uma actividade de exploração que eles podem fazer sozinhos, ou essas explorações poderão ser usadas como trabalho de grupo ou como actividades para a sala de aula.

As instruções necessárias para se poderem usar dados reais com a TI-83 Plus aparecem quer no decorrer das actividades quer no Apêndice. Talvez fosse útil copiar as instruções das páginas do Apêndice e dá-las aos seus alunos para que as possam usar sempre que trabalharem com a TI-83 Plus, e não somente quando usam o *Transformation Graphing*.

Parte das activities 2, 4, e 6 envolvem trabalho com dados que podem ser recolhidos com o CBL ou o CBR. Dados para estas actividades podem ser encontrados no site **education.ti.com**, se optar por não recolher os seus próprios dados. Se optar por usar os dados deste site, vá até à pagina dedicada a este livro neste site para obter o link para a amostra de dados. Se optar por fazer a recolha de dados, aconselho-o a que os seus alunos guardem os dados como um programa ou como um grupo de listas na opção **group** de modo a que possam utilizá-los mais tarde. As instruções para cada um destes métodos podem ser encontradas no Apêndice.

Aviso: Quando se usa o *Transformation Graphing*, só o gráfico de uma função pode ser traçado de cada vez. Assegure-se também, de que desactiva a aplicação sempre que deixar de a usar. A aplicação chama à desactivação, desinstalação, mas não se preocupe — isto não vai remover a aplicação da sua calculadora.

Gostaria de agradecer a todos aqueles que ajudaram na produção deste livro e da aplicação, em especial à equipa da Texas Instruments, à Pam Harris e à Judy Wheeler, que me deram bons conselhos aquando do início do desenvolvimento destas actividades.

Espero que os seus alunos considerem estas actividades bem como o uso do *Transformation Graphing*, tão recompensadores e divertidos como os meus alunos acharam.

— *Allan Bellman*

Acerca do Autor

Allan Bellman ensinou durante trinta e um anos, em Montgomery County, Maryland, como professor de Matemática e Ciências Computacionais. Presentemente, dá aulas na James Hubert Blake High School, onde os seus mais recentes interesses no ensino se centraram na Estatística e na Álgebra. Durante toda a sua carreira, teve sempre um interesse especial pelo uso de todo o tipo de tecnologias.

É co-autor de variadíssimos manuais escolares de Matemática para o Ensino Secundário, publicados pela Prentice Hall e pela South-Western Educational Publishing e é frequentemente conferencista em encontros regionais e nacionais da NCTM e do T^3 (Teachers Teaching with Technology).

Ele é um formador em Modelação Matemática para a Woodrow Wilson National Fellowship Foundation desde 1988 e é formador do programa T^3 desde 1996.

Fazendo o Download e instalando o Transformation Graphing

Fazendo o Download da aplicação

1. Conecte-se à loja virtual da TI em **http://epsstore.ti.com**
2. Compre o software para a TI-83 Plus, seguindo o link **For Purchase** software.
3. Procure o **Transformation Graphing**. Clique no butão de download.
4. Siga as instruções que vão aparecendo no écran e escolha o sistema operativo do seu computador (Windows ou Macintosh).
5. Grave o ficheiro no seu disco de modo a poder usá-lo no futuro.

Insatalando a aplicação no Windows®

1. Conecte o cabo do TI-GRAPH LINK™ entre o seu computador a e a sua TI-83 Plus, e certifique-se de que a TI-83 Plus está no écran principal.
2. Abra a aplicação TI-GRAPH LINK para a TI-83 Plus.

   Nota: Se não tem o software do TI-GRAPH LINK para a TI-83 Plus, pode fazer download da loja virtual da TI.
3. Clique em **Link**, **Send Flash Software**, **Applications and Certificates**.
4. Navegue no seu computador até ao sitio onde colocou a aplicação.
5. Seleccione a aplicação, clique em **Add**, e de seguida em **OK**. O seu computador mandará a aplicação para a TI-83 Plus. Poderá ver a barra de progresso enquanto a aplicação é carregada.

Insatalando a aplicação no Macintosh®

1. Conecte o cabo do TI-GRAPH LINK™ entre o seu computador a e a sua TI-83 Plus, e certifique-se de que a TI-83 Plus está no écran principal.
2. Abra a aplicação TI-GRAPH LINK para a TI-83 Plus.

   Nota: Se não tem o software do TI-GRAPH LINK para a TI-83 Plus, pode fazer download da loja virtual da TI.
3. Navegue no seu computador até ao sitio onde colocou a aplicação.
4. Arraste a aplicação até a janela da calculadora no TI-GRAPH LINK. Siga as instruções que forem aparecendo no sucessivos écrans.

EXPLORATIONS

Actividade 1

Quantos condutores? Investigando a equação reduzida da recta

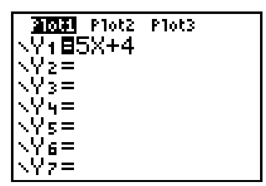
Qualquer recta pode ser expressa na forma $y = mx + b$. Esta forma é chamada a *equação reduzida da recta*.

Nesta actividade, vamos estudar a equação reduzida da recta. Quando acabar, compreenderá o efeito de *m* e de *b* no gráfico da recta. Também será capaz de ajustar uma recta a um conjunto de dados, seleccionando valores para esses dois parâmetros, usando o método de tentativa e erro.

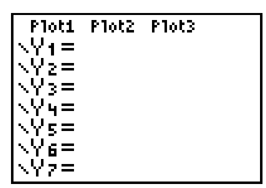
Investigando o efeito de m e de b no gráfico de uma recta

1. Comece esta investigação examinando a recta $y = mx + b$, quando, por exemplo, $m = 3$ e $b = 5$. Na sua TI-83 Plus, escreva a equação **Y1 = 3X + 5**.

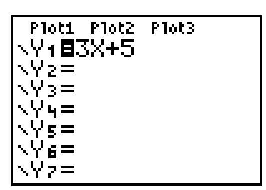
   a. Comece no modo função (**Func**) e desactive quaisquer gráficos ou equações que já lá tenha. (Este écran mostra quer uma equação não desejada, quer um gráfico não desejado.)



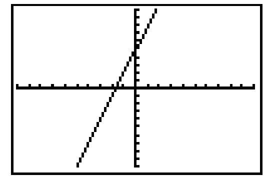
   Para desactivar um gráfico estatístico, carregue em [Y=] e use as teclas de controle do cursor ([▲] and [▼]) para se mover para o plot que está activado (a escuro) e carregue em [ENTER]. Para apagar uma equação, carregue em [▲] ou em [▼] para se deslocar para a primeira parte da equação e carregue em [CLEAR].



   b. Mova o cursor para **Y1=** e carregue em **3** [X,T,Θ,n] [+] **5**.



2. Visualise o gráfico carregando em [ZOOM] **6:ZStandard**. Quer o eixo dos x quer o eixo dos y aparecerão com um domínio de -10 a 10.



3. Escreva as equações e faça os respectivos gráficos de mais dois exemplos de $y = mx + b$.

   a. Y2 = 3X + 2

   b. Y3 = 5X + 2

Pode já dizer qual o efeito de *m* ou de *b* no gráfico da recta? Pode adivinhar porque é que chamam a esta equação a equação reduzida da recta?

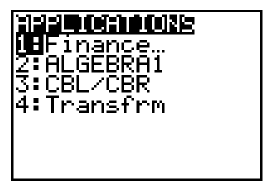
Provavelmente ainda não consegue responder a estas questões, pois tal é difícil com apenas três exemplos. Estará pronto para responder após uma pequena investigação. Numa folha de papel, escreva qual acha que poderá ser o efeito de *m* e de *b* no gráfico da recta. Voltará a esta folha de papel mais tarde para verificar se a sua primeira hipótese estava ou não correcta.

Usando o Transformation Graphing para investigar m e b

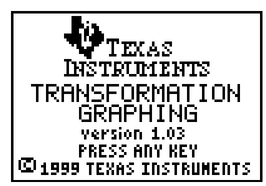
Para investigar quais os efeitos de *m* e de *b* vai usar a TI-83 Plus com a aplicação *Transformation Graphing* para fazer vários gráficos. Tem de ter o *Transformation Graphing* instalado e a corer na sua calculadora para poder completar esta actividade.

Para iniciar o *Transformation Graphing*:

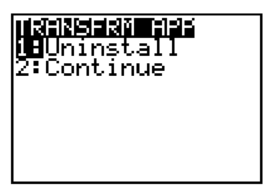
1. Carregue [APPS]. Carregue no número que está atrás de **Transfrm**. (Este número pode variar consoante as aplicações que tiver na sua calculadora.)



2. Carregue em qualquer tecla (excepto [2nd] ou [ALPHA]) para instalar a aplicação.

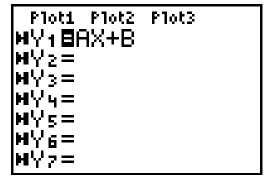


   Se a aplicação ainda estiver a correr, carregue em **2:Continue**.



Para desenhar o gráfico do exemplo:

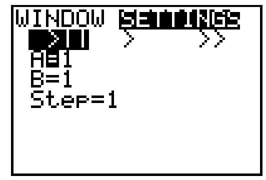
1. Carregue em [Y=], limpe o editor de **Y=**, e desactive todos os gráficos.



2. Para **Y1**, escreva **AX** + **B**. Carregue em [ALPHA] **A** [X,T,Θ,*n*] [+] [ALPHA] **B**.

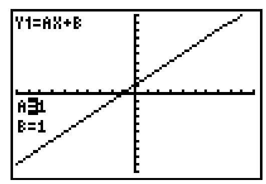
   Nota: Escreveu Y=AX + B em vez de Y=MX + B, que é a forma mais comum em livros de texto, pois o Transformation Graphing só usa os coeficientes A, B, C, e D.

3. Ponha o *Transformation Graphing* no modo Play-Pause. Carregue em [WINDOW] [▲] para visualisar o écran de **SETTINGS**. Se necessário, mova o cursor até activar >|| e carregue em [ENTER].



   Como ponto de partida, ponha os outros **SETTINGS** como mostra a figura ao lado. Para fazer estas selecções, carregue em [▼] **1** [▼] **1** [▼] **1**. Isto definirá os valores iniciais para os coeficientes e o incremento com que deseja observar as alterações dos coeficientes.

4. Carregue em [ZOOM] **6:ZStandard** para visualizar o gráfico. Se **A**= não está activado, carregue em [▼] até **A**= ficar activado.



5. Carregue em [▶] para aumentar o valor de **A**, ou em [◀] para diminuir o valor de **A**. Para cada novo valor de **A**, observe as mudanças no gráfico.

6. Escolha outros valores para **A** e observe o efeito que cada um tem no gráfico. Faça com que **A** assuma quer valores positivos quer negativos entre -10 e 10, incluindo valores decimais. Para dar valores, carregue na tecla do valor que deseja e depois carregue em [ENTER].

Questões para discussão

1. Quais os efeitos que **A** teve no gráfico?

   a. Quando o valor aumenta, o que acontece com o gráfico?

   b. Quando o valor diminui, qual é o efeito que isso tem no gráfico?

   c. Se o valor passa a negativo, qual é o resultado no gráfico?

2. Use o mesmo método para investigar qual o efeito de **B** no gráfico. Faça **A** = **1**. Para alterar **B**, carregue em [▼] e depois em [▶] para aumentar o valor de **B**, ou em [◀] para diminuir o valor de **B**. Também pode escolher outros valores para **B**, tal como fez para **A**.

   Quais os efeitos que **B** tem no gráfico? Quando o valor aumenta, o que acontece? E quando diminui? Negativo?

3. Volte a pegar na folha de papel em que escreveu as suas hipóteses acerca dos efeitos de M e B. Esteve muito próximo dos efeitos que actualmente conhece?

   Porque é que acha que chamam a esta equação a equação reduzida da recta?

Problemas

Nos problemas seguintes, use algumas hipóteses para tentar adivinhar as respostas correctas e depois use a calculadora para confirmar as suas respostas.

1. Faça corresponder cada gráfico da segunda coluna com a respectiva equação da primeira coluna. Note que o domínio da janela quer para X quer para Y vai de -4 a 4 com uma escala de 1.

   a. $y = 4x + 3$

   b. $y = 4x + 1$

   c. $y = 1x + 4$

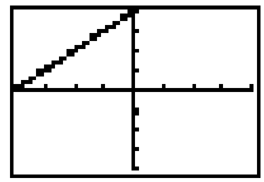
   d. $y = 1x + 1$

   e. $y = 1x - 4$

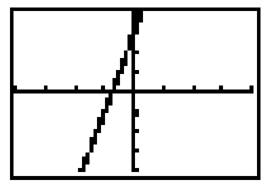
   f. $y = - 1x + 4$

   g. $y = -4x + 4$

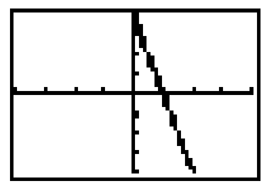
1



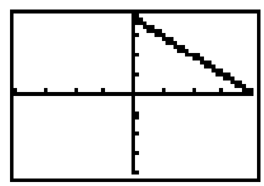
2



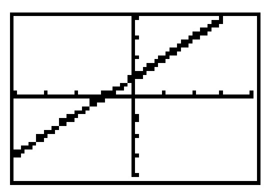
3



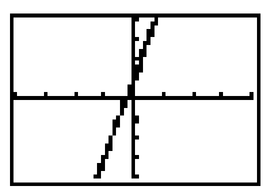
4



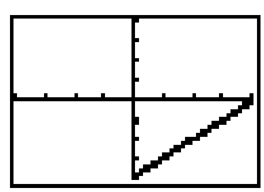
5



6



7



2. Aonde é que y = 4x - 1 intercepta o eixo dos y ?

3. Aonde é que y = -3x + 2 intercepta o eixo dos y ?

4. Qual das rectas é a mais inclinada, y = 3x - 1 ou y = x +5?

5. Indica duas rectas que estejam inclinadas para o mesmo lado?
   y = 2x + 5 y = 5x - 1 y = -x + 3

Teste os seus novos conhecimentos

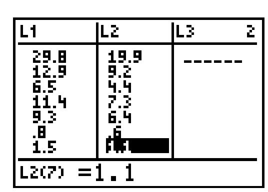
Muitos estudantes americanos, quando fazem 16 anos, começam a pensar em tirar a carta de condução. A tabela mostra a população do census de 1990 e o número de condutores com carta em alguns estados dos E.U.A..

Estado	População (em milhões)	Condutores Emcartados (em milhões)
California	29.8	19.9
Florida	12.9	9.2
Georgia	6.5	4.4
Illinois	11.4	7.3
Michigan	9.3	6.4
Montana	0.8	0.6
New Mexico	1.5	1.1
New York	18.0	10.3
Pennsylvania	11.9	7.8
Texas	17.0	11.1

Fonte: Usado com a permissão do *World Almanac and Book of Facts, 1992.*
© 1992, 2001 World Almanac Education Group, Inc.

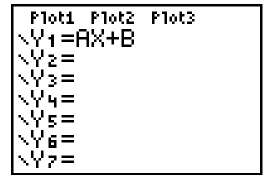
Crie uma nuvem de pontos para estes dados e verifica se existe algum tipo de regularidade. Qual das variáveis é que acha que é a variável independente?

1. Ponha os dados em duas listas estatistícas da sua TI-83 Plus. Carregue em [STAT]. Seleccione **1:Edit**. Coloque os valores da tabela numa lista vazia do editor de listas. Limpe duas listas se nenhuma estiver vazia. Para limpar uma lista, carregue em [▲] para activar o nome da lista, carregue em [CLEAR], e depois em [ENTER].

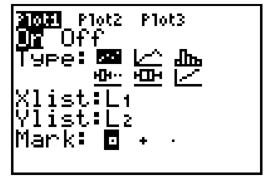


2. Carregue em [MODE] e verifique se está no modo função. (**Func** fica activado se estiver escuro.)

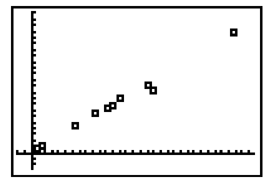
3. Carregue em [Y=] e desactive qualquer função que esteja activada. Verifique que todos os gráficos estão desactivados.



4. Para visualizar o gráfico, carregue em [2nd] [STAT PLOT]. Seleccione **1:Plot1** e carregue em [ENTER]. Active o gráfico e ponha o setup menu, como se mostra na figura ao lado.



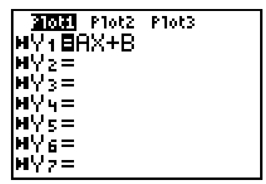
5. Carregue em [ZOOM] **9:ZoomStat** para visualizar o gráfico. Será que existe alguma relação entre a população de cada estado e o respectivo número de condutores encartados?



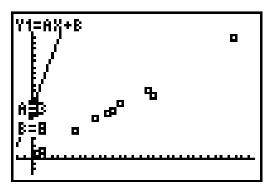
6. Parece existir uma relação linear entre as duas variáveis. Estime valores para o declive e a intersecção com o eixo dos y, dum modelo linear que seja representativo dos dados.

7. Carregue em [Y=] para visualizar o editor **Y=**. Escreva **Y1** = **AX** + **B** para equação. (Carregue em [ALPHA] **A** [X,T,Θ,*n*] [+] [ALPHA] **B**.) Deixe o Plot1 activado.

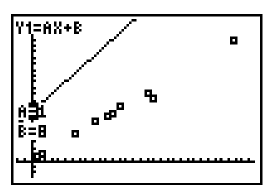
   Carregue em [◄] para se mover para a esquerda de **Y1**= e continue a carregar em [ENTER] enquanto o *Transformation Graphing* estiver no mode Play-Pause (>| |).



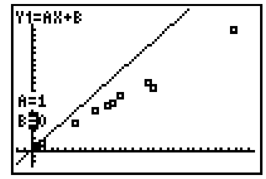
8. Como a janela já estava ajustada para a visualização do gráfico, não precisa de alterar qualquer um dos ajustes do WINDOW. Visualize o gráfico com o *Transformation Graphing* desactivado, carregando em [GRAPH]. A recta **Y** = **AX** + **B** aparecerá com os valores mais recentes de A e de B. Esta recta não tem qualquer relação com o seu gráfico.



9. No passo 6, estimou valores para o declive e a intersecção com o eixo dos y. Introduza esses valores para A e B. Para atingir os objectivos desta experiência, assuma que as suas estimativas são A=1 e B=0. Para introduzir estes valores, use as teclas de controle para cima e para baixo do cursor ([▲] and [▼]) para se mover e activar **A**=. Quando **A**= estiver activado, carregue em **1** [ENTER].



10. Carregue em ▼ para activar **B** e carregue em **0** ENTER. Este é o seu ponto de partida para chegar a um modelo razoável.



11. Continue a escolher e introduzir novos valores para **A** e para **B** até achar que alcançou um modelo razoável com valores para **A** e **B** estimados para a enésima posição.

Trabalho para casa

Nome ____________________________

Data ____________________________

Quantos condutores?

Muitos estudantes americanos, quando fazem 16 anos, começam a pensar em tirar a carta de condução. A tabela mostra a população do census de 1990 e o número de condutores com carta em alguns estados dos E.U.A..

Estado	População (em milhões)	Condutores Encartados (em milhões)
California	29.8	19.9
Florida	12.9	9.2
Georgia	6.5	4.4
Illinois	11.4	7.3
Michigan	9.3	6.4
Montana	0.8	0.6
New Mexico	1.5	1.1
New York	18.0	10.3
Pennsylvania	11.9	7.8
Texas	17.0	11.1

Fonte: Usado com a permissão do *World Almanac and Book of Facts, 1992*.
© 1992, 2001 World Almanac Education Group, Inc.

1. Quantos condutores encartados é que o seu modelo prevê que o estado de Maryland, com uma população de 4.9 milhões, deve ter?

2. Vá à Internet e descubra a população de um estado que não faça parte da listagem. Use o seu modelo para prever o número de condutores encartados nesse estado.

3. A população está em constante mudança. Pensa que o declive da recta que usou no seu modelo se alterará muito, caso use novos dados, tais como os do census 2000? Justifique a sua resposta.

4. Qual pensa que será o significado do declive do seu modelo? Que mais poderá o declive representar?

5. Qual é a unidade de medida do declive neste exemplo?

Notas para professores

Esta actividade é uma introdução à equação reduzida da recta. O seu objectivo é o de tornar o aluno capaz de reconhecer os efeitos que as mudanças de declive e/ou da intersecção com o eixo dos y, têm no gráfico da recta. No final o aluno usará o *Transformation Graphing* para, intuitivamente, encontrar o melhor modelo que se adapta a um conjunto de dados

Neste momento, nenhuma tentativa é feita para que os alunos desenhem o gráfico de uma recta à mão, apenas têm de reconhecer os efeitos dos parâmetros e começar a modelar.

Esta actividade ajudará a desenvolver o que torna um modelo razoável. Deverá despender de algum tempo falando de diferentes modelos que são conhecidos e do que faz com que uns sejam melhores que outros — mas, cuidado, não procure o melhor modelo, o modelo ideal. Como parte da actividade, vários modelos devem ser introduzidos na memória da calculadora, com o *Transformation Graphing* desactivado, para discutir a aceitabilidade de cada modelo.

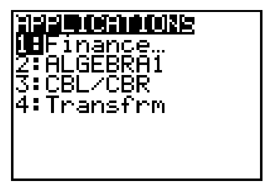
A actividade demorará cerca de 50 minutos.

Existe um exercício de modelação no fim desta actividade. Só um é dado, porque a próxima actividade parte deste ponto e continua com mais exercícios práticos. Se pretender que os seus alunos tenham mais prática, qualquer conjunto de dados linear do seu manual poderá facilmente ser usado.

Tem de se assegurar que os alunos compreendam que só uma equação, de cada vez, pode ser desenhada enquanto o *Transformation Graphing* estiver instalado e activado.

Para desactivar o *Transformation Graphing*:

1. Carregue em [APPS] e seleccione o número que precede **Transfrm**.



2. Seleccione **1:Uninstall**.

Respostas

Questões para discussão

1. **A** afecta o declive (inclinação) da recta. Quanto maior é **A**, mais inclinada é a recta. Quando **A** é negativo, a recta inclina-se para baixo da esquerda para a direita. Quer **A**, quer **-A** têm o mesmo grau de inclinação; mas uma vem de cima da esquerda para a direita, e a outra vem de baixo.

2. **B** afecta a intersecção da recta com o eixo dos y. Quanto maior for o valor de **B**, mais alta aparece a recta no gráfico.

3. **B** dá a intersecção com o eixo dos y e **A** o declive.

Problemas

1. a. 2
   b. 6
   c. 1
   d. 5
   e. 7
   f. 4
   g. 3
2. -1
3. 2
4. y = 3x - 1
5. y = 2x + 5 and y = 5x - 1

Teste os seus novos conhecimentos

11. Valores aceitáveis para A e B seriam, aproximadamente **A** = 0.65 e **B** = 0.10.

Trabalho para casa

1. Aproximadamente 3.3 milhões.
2. As respostas podem variar.
3. Não, o declive da recta relaciona-se provavelmente com a percentagem de pessoas no estado com mais de 16 anos, e esta percentagem provavelmente não varia para pequenos espaços de tempo.
4. A mudança, em milhões, no número de condutores por cada 1 milhão varia com a população. Esta é a percentagem de condutores encartados no total da população. Ver a resposta à Questão 3.
5. A unidade de medida do declive deverá ser condutores/população.

EXPLORATIONS

Actividade 2

Rectas, Modelos, CBR — Vamos Juntá-los!

Nesta actividade, ir-se-á practicar a procura de modelos usando o método intuitivo, “a olho,” em dados recolhidos. As actividades vão permitir a aplicação do que aprendeu acerca da equação reduzida da recta.

Um, de muitos, métodos que pode ser usado para encontrar um modelo matemático é o método intuitivo.

Este método é muito simples de aplicar à mão desde que só se esteja à procura da recta e não da sua equação. Quando se trabalha com dados lineares, pode-se usar Mikado para ajudar a, intuitivamente, melhor ajustar uma recta. Para isso, move-se um pau de Mikado por cima dos dados até se achar que se tem um modelo aceitável.

Nesta actividade, usará a sua TI-83 Plus com o *Transformation Graphing* para intuitivamente ajustar o modelo linear. Este método também lhe dará uma equação do seu modelo.

Primeiro precisa de alguns dados para começar. Use o CBR para recolher os dados de um movimento uniforme.

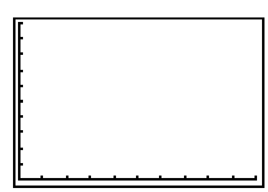
Recolhendo dados com o CBR

O CBR registará a distância do CBR a um caminhante que se afaste deste (ou se aproxime). Nesta actividade o caminhante deve tentar caminhar de um modo constante.

O CBR/TI-83 Plus exibiram o gráfico do tempo, variável independente e a distância do caminhante ao CBR será a variável dependente.

Questões para discussão

1. Como deverá aparecer o gráfico se o caminhante conseguir andar a uma velocidade relativamente constante do CBR? Esboce o seu gráfico no sistema de eixos ao lado.

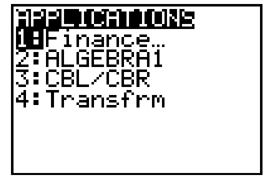


2. Porque pensa que apenas se visualiza o primeiro quadrante?

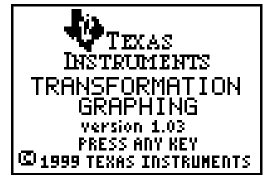
Procedimento

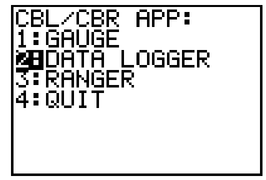
1. Use o cabo de ligação unidade a unidade para ligar o CBR à TI-83 Plus.

2. Carregue em [APPS] e depois escolha **CBL/CBR**.

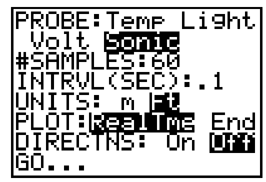


3. Carregue em qualquer tecla para passar ao écran seguinte e seleccione **2:DATA LOGGER**.

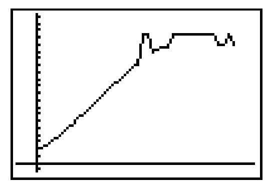




4. Faça as selecções no menu **setup** como se ilustra ao lado. Estas escolhas permitirão ao CBR recolher e guardar uma leitura em cada 0.1 segundos durante 6.0 segundos.

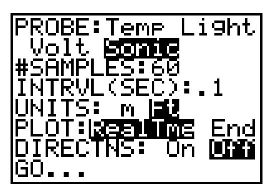


5. Coloque o CBR em cima de uma mesa de modo a apontar para uma área aberta da sala. Um aluno (o caminhante) deverá permanecer a cerca de 1.5 pés do CBR, mas de costas voltadas para o CBR. Recorde ao caminhante de que deve tentar andar devagar, com uma passada constante, ao afastar-se do CBR. Avise-o de que quando disser "vai," eles devem começar a andar.
   Use o cursor de controle ([▼]) para se deslocar para **GO**. Carregue em [ENTER] e diga ao caminhante para começar.

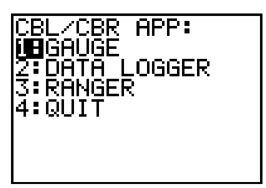


6. O CBR começará a registar a distância ao caminhante. Uma vez decorridos os 6 segundos, o gráfico reajustará automaticamente a janela, usando o **ZoomStat**.

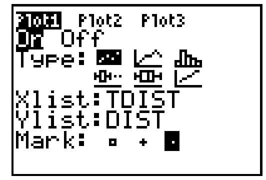
7. A aplicação CBL/CBR ainda está a correr. Deverá sair desta aplicação.



   Carregue em [ON] [2nd] [QUIT] **4:QUIT**.



8. A aplicação CBL/CBR liga os pontos do gráfico. Para procurar intuitivamente o modelo é preferível que os pontos não estejam ligados. Carregue em [2nd] [STAT PLOT] **1:Plot1** e seleccione a opção nuvem de pontos para que os pontos não sejam ligados.



   Repita todos os passos anteriores até obter uma nuvem de pontos aceitável.

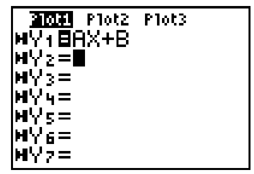
9. Quando já tiver dados aceitáveis, passe-os para as calculadoras dos alunos, para que todos na sala tenham os mesmos dados.

Procurando o modelo

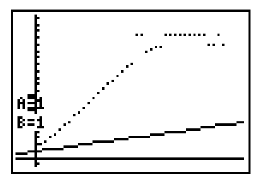
Use os dados que acabou de recolher para encontrar o seu modelo.

1. Active a aplicação *Transformation Graphing*.

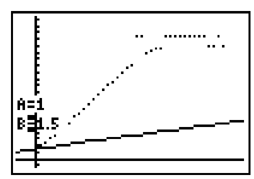
2. Escreva a equação reduzida da recta em **Y1**. Carregue em [Y=]. Apague todas as equações do editor **Y=**. Carregue em [▲] para se mover para **Y1** e escreva **Y1** = [ALPHA] **A** [X,T,Θ,n] [+] [ALPHA] **B**. Carregue em [◄] para se mover para a esquerda de **Y1** e continue a carregar em [ENTER] até ter seleccionado o modo Play-Pause (>| |).



3. Visualize o gráfico carregando em [ZOOM] **9:ZoomStat**. Aparecerá o gráfico e uma recta será desenhada. A recta terá os valores de **A** e **B** que actualmente estão na calculadora. Esses valores nada têm a ver com a actividade, logo o gráfico terá pouca relação com os pontos.



   Qual é o significado físico da intersecção com o eixo dos y (**B**) neste problema? Qual teria sido um bom valor inicial para este coeficiente?



   A intersecção com o eixo dos y dá-nos a distância a que o caminhante estava do CBR quando começou a andar, *se o* CBR e o *caminhante começaram ao mesmo tempo*. Ao caminhante foi pedido para estar a 1.5 pés do CBR, portanto 1.5 será um bom valor inicial para **B**.

4. Use as teclas do cursor para cima/para baixo ([▲] [▼]) para se mover para **B**= e escreva 1.5. Ajuste este valor de modo a que intersecção com o eixo dos y seja mais precisa.

   Nota: Numa outra secção desta actividade é mostrado um exemplo de quando caminhante e o CBR não começam ao mesmo tempo.

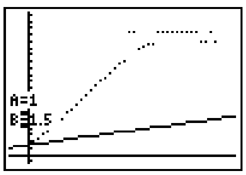
   a. Qual é o significado físico do declive (**A**) da recta deste exemplo? Consegue fazer uma boa estimativa para esse valor?

b. Se o CBR está a medir em pés e a fazer leituras em segundos, qual é a unidade de medida para **A**? É extremamente importante que as medições tenhan uma unidade de medida.

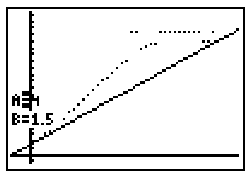
   O declive mostra a velocidade do caminhante. Com o *Transformation Graphing*, pode facilmente fazer diferentes estimativas para o declive.

c. A recta do exemplo não parece ser suficientemente inclinada quando se faz **A=1**. O que é que isso lhe diz do seu modelo? No seu modelo, o caminhante anda muito depressa ou muito devagar?

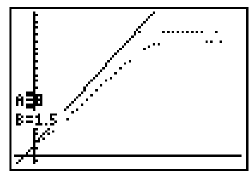
5. A nuvem de pontos do exemplo necessita de um modelo com um declive mais acentuado, o que significa que o caminhante tinha uma velocidade superior a 1 pés/seg. Para melhorar o modelo, carregue em ▲ para ir para **A=** e escreva diferentes valores para **A** até lhe agradar o ajuste. Lembre-se de que para entrar com novos valores, escreve um número e carrega em ENTER. O gráfico alterar-se-á de acordo com cada novo valor.



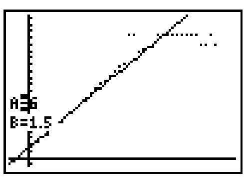
A = 2



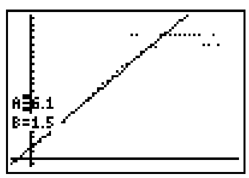
A = 4



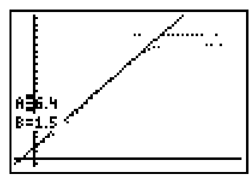
A = 8



A = 6



A = 6.1



A = 6.4

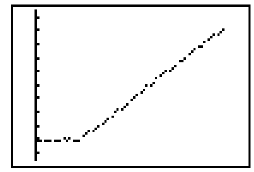
6. Uma vez encontrado um valor razoável para **A,** talvez tenha de rever o valor de **B**. Carregue em ▼ para ir para **B** e reajuste o seu valor.

Trabalho para casa

Nome ____________________________

Data ____________________________

Caminhante 2



Usando o mesmo setup do CBR, escolha um segundo caminhante para tentar duplicar (imitar) o exemplo da figura da direita. Quando já tiver dados aceitáveis, passe-os para o resto da turma e use o *Transformation Graphing* para ajudar a encontrar um modelo para esta “caminhada.”

1. O que é que o caminhante deverá fazer para imitar esta figura?

2. Por observação consegue dizer qual dos dois caminhantes foi o mais rápido? Se foi perceptível, qual dos dois andou mais depressa?

3. A que velocidade caminhou cada um?

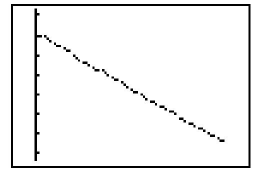
4. Será que a intersecção com o eixo dos y do seu modelo linear tem algum significado neste exemplo? Justifique a sua resposta.

5. O professor de matemática afirmou que este modelo deve ser estudado usando uma função definida por ramos. O que é que ele quer dizer? Em termos físicos porque é que faz sentido ser usada uma função definida por ramos?

6. Usou o declive do seu modelo como sendo a velocidade dos caminhantes. Existirá outra forma de saber a velocidade de um caminhante?

Caminhante 3

Usando o mesmo setup do CBR, outro caminhante deverá tentar imitar o exemplo da figura ao lado.



1. O que é que eles têm de fazer?

Quando já tiver dados aceitáveis, passe-os para o resto da turma e use o *Transformation Graphing* para ajudar a encontrar um modelo.

2. Qual o significado de um declive negativo?

3. Qual dos três caminhantes andou mais depressa? Devagar? Teve em atenção o sinal do declive para esta questão? Porquê ou porque não?

4. Como pode dizer que o caminhante andou a uma velocidade constante?

5. Esboce um gráfico que represente um caminhante andando a uma velocidade relativamente não constante.

Notas para Professores

> *Nota: Pode usar quer o CBL quer o CBR para recolher os dados. As instruções foram dadas assumindo que está a trabalhar com uma TI-83 Plus e APPS denominada CBL/CBR. Existem muitos outros programas disponíveis que podem ser usados, incluindo o programa e actividade HIKER, disponível para download no site da Texas Instruments :* ***education.ti.com****. Existem outros livros de actividades da série Exploration que têm material que poderá ser útil á realização desta actividade.*

Esta actividade deverá ser vista como um seguimento da Actividade1. Tem como objectivo dar ao aluno a capacidade de fazer modelação pelo método intuitivo. Este método é uma grande ajuda no desenvolvimento da compreensão dos efeitos dos parâmetros de uma função e continuar-se-á nesse sentido em todo este livro. Mais tarde, na sua investigação, poderá querer comparar os modelos intuitivos dos alunos com aqueles encontrados pelo método da regressão linear.

Após cada "caminhada," os dados deverão ser passados para todas as calculadoras da turma, de modo a que todos possam trabalhar com os mesmos dados.

Se existirem CBL/CBR suficientes, esta actividade deverá continuar como actividade de grupo.

Esta é a segunda actividade com a equação reduzida da recta. Nela, o uso das "caminhadas" dos alunos para a obtenção de dados, permite que os alunos compreendam a relação entre uma acção física, o declive e a intersecção com o eixo dos y da equação usada como modelo. Os alunos poderão (e quererão) fazer variações das suas caminhadas.

Poderá querer que os caminhantes andem ao longo de uma linha numerada no chão. Deste modo, pode medir aonde é que eles começaram e até onde foram, sendo esta uma maneira de relacionar a equação com o "mundo real."

Não se esqueça de realçar a importância das unidades de medida e das unidades do sistema de eixos. Nenhum tipo de unidade é dada à partida para esta actividade. Pode colocar o *Data Logger* a recolher dados quer em metros quer em pés.

No Caminhante 2 tem-se a oportunidade de discutir a questão do domínio e limites do modelo. Apesar de a equação que é exibida, para corresponder à parte da caminhada no gráfico, ter como domínio todos os números reais, só tem significado directo para valores enquanto o caminhante se move.

Existem duas partes distintas no gráfico do caminhante 2: o caminhante parado, e depois movendo-se. Deverão existir duas partes distintas para o modelo no intervalo $0 < x < 6$ se tentar modelar todo o gráfico completo. O que pode ser usado para introduzir as funções por ramos, *se tal for apropriado para os seus alunos.*

Respostas

Recolha de dados com o CBR: Questões para discussão

1. Dados lineares.
2. O CBR não consegue registar distâncias atrás dele; logo não existem valores negativos para y. O CBR não anda para trás no tempo; logo não existem valores negativos para x.

Encontrando o modelo

3. A intersecção com o eixo dos y mostra a que distância do CBR o aluno iniciou a sua caminhada.
4. a. O declive é uma estimativa da velocidade do caminhante.

   b. **A** está em pés/seg. É uma unidade de velocidade.

   c. O **A** tem de ser maior. Os dados do exemplo mostram um caminhante que anda mais depressa do que o que consta do modelo.

Trabalho para casa

Caminhante 2

1. O caminhante tem de começar por estar completamente parado e depois andar a uma velocidade constante afastando-se do detector de movimento.
2. As respostas podem variar.
3. As respostas podem variar.
4. Neste problema a intersecção com o eixo dos y não tem qualquer significado. O caminhante não começou a andar antes de t=0. O modelo só tem significado enquanto o caminhante se move, e como t=0 não é aqui que o modelo tem significado, a intersecção com o eixo dos y não tem qualquer significado.
5. Uma função deve ser usada para modelar o espaço de tempo que o aluno esteve parado e uma outra para modelar o espaço de tempo em que o aluno se moveu. Portanto, deve ser considerado um gráfico em duas partes.
6. $$\text{velocidade} = \frac{\text{distância percorida}}{\text{tempo gasto}}$$

   Pode usar o **TRACE** para encontrar o ponto em que o caminhante se começou a mover e o último ponto que foi registado. Introduza esses valores na fórmula que se segue:

   $$\text{velocidade} = \frac{\text{posição final - posição inicial}}{\text{tempo final - tempo inicial}}$$

   Isto só será exacto se o movimento do caminhante for constante

Caminhante 3

1. Move-se em direcção ao CBR com um andamento constante.
2. O caminhante movia-se em direcção ao CBR.
3. As respostas podem variar. Não deve ter em consideração o sinal do declive. O sinal do declive dá a direcção, a grandeza dá a velocidade ou velocidade relativa.
4. Quanto mais constante for a velocidade, mais lineares serão os dados.
5. As respostas podem variar. Qualquer gráfico não linear.

EXPLORATIONS

Actividade 3

Explorando a função quadrática a partir da expressão $y = a(x-h)^2 + k$

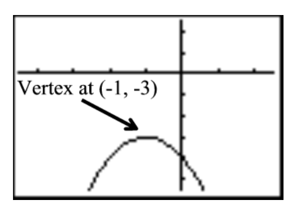
Qualquer função quadrática (parábola) pode ser definida por uma expressão da forma $y = a(x - h)^2 + k$. Esta é a expressão da função quadrática que torna evidentes as coordenadas do vértice. Com esta actividade, vai descobrir que esta forma nos indica tanto as coordenadas do vértice como a abertura e o sentido da concavidade da parabola. Registe as suas descobertas à medida que as for fazendo, para poder utilizá-las mais tarde.

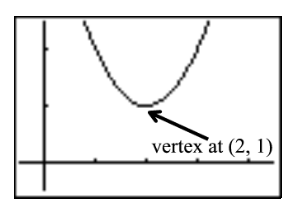
Quando completar esta actividade, deverá ser capaz de localizar o vértice de qualquer parábola cuja expressão esteja escrita na forma $y = a(x - h)^2 + k$, assim como de determinar o sentido da sua concavidade.

Conhecendo estas características de uma qualquer parábola, poderá determinar o máximo ou mínimo de funções quadráticas definidas por uma expressão analítica sob a forma $y = a(x - h)^2 + k$.

Terá adquirido igualmente alguns conhecimentos básicos sobre o conceito geral de translação, que poderá aplicar em situações novas.

O Gráfico de uma Função Quadrática na Forma do Vértice





Os gráficos das funções quadráticas têm a forma de parábolas que ou têm concavidade voltada para cima, ou voltada para baixo.
Um dos pontos notáveis no gráfico destas funções é o seu vértice. Se o gráfico da função tiver concavidade voltada para cima, então o vértice é o ponto com ordenada mais baixa, correspondendo ao mínimo da função. Se a concavidade do gráfico for voltada para baixo, o vértice será o ponto do gráfico com ordenada mais alta, correspondendo assim ao máximo da função.

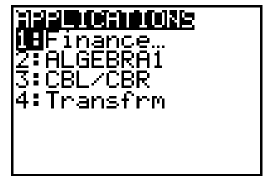
Recorrendo à sua TI-83 Plus, obtenha o gráfico de $y = (x - 2)^2 + 1$.

Questões para Discussão

1. Quais são as coordenadas do vértice? Qual é o sentido da concavidade do gráfico?

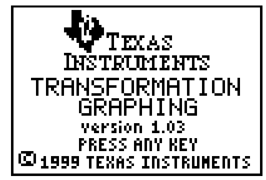
Estudando o Efeito de A, B e C

1. Carregue em [APPS] e seleccione o Transformation Graphing carregando no número à esquerda de **Transfrm**.

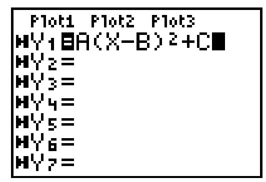


   Pressione qualquer tecla (excepto [2nd] or [ALPHA]) para começar *Transformation Graphing*.

   *Nota: Se não aparecer o ecrã ilustrado na figura à direita, seleccione **2:Continue**.*



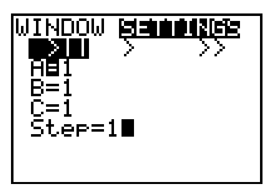
2. Certifique-se que o modo Func está accionado e pressione [Y=] para iniciar o editor Y=. Apague quaisquer funções que estejam activas e desactive todos os gráficos estatísticos. Escreva a forma geral do vértice da função quadrática, $Y = A(X - B)^2 + C$. Pressione [ALPHA] **A** [(] [X,T,Θ,n] [−] [ALPHA] **B** [)] [x^2] [+] [ALPHA] **C**.



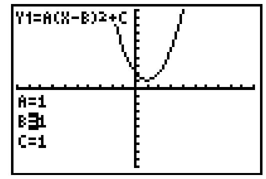
   Se o modo Play-Pause não estiver activado à esquerda de **Y1** (>| |), pressione [◄] até que o cursor esteja sobre o símbolo e depois pressione [ENTER] até que símbolo correcto esteja seleccionado.

   Nota: Escreveu a expressão $Y = A(X - B)^2 + C$ no lugar de $Y = A(X - H)^2 + K$, que é forma geralmente usada em livros de texto, pois a aplicação Transformation Graphing recorre apenas aos coeficientes A, B, C, e D.

3. Pressione as teclas [WINDOW] [▲] para mostrar o écran de definições de *Transformation Graphing*.
   Para começar, defina as condições iniciais, em **SETTINGS**, como está ilustrado na figura. Para fazer estas configurações, pressione [▼] **1** [▼] **1** [▼] **1** [▼] **1**. Este procedimento define os valores iniciais dos parâmetros e o incremento que lhe permitirá observar o efeito provocado pela sua variação.



Estudando o efeito de B



4. Pressione [ZOOM] **6:ZStandard** para traçar o gráfico. Este mostrará os valores pré-definidos de **A**, **B**, e **C**. Nesta janela, os valores de x e de y variam entre -10 e 10.

   Pressione [▼] para mover o cursor e seleccionar **B**=. Começará então por estudar o efeito da variação de **B**.

5. Pressione [▶] para incrementar o valor de **B** de acordo com o valor pré-definido para o incremento (1 neste exemplo). O gráfico é automaticamente actualizado mostrando o efeito da mudança em **B**. Continue a pressionar [▶] até que tenha uma ideia de como as mudanças no parâmetro **B** afectam o gráfico.

6. Pressione [◀] para diminuir o valor de **B** segundo o incremento pré-definido. O gráfico moveu-se na direcção esperada?

Questões para Discussão

1. A variação do valor de B faz com que a curva se desloque em que direcção? Este deslocamento da curva é chamado de translação na direcção do eixo Ox ou translação horizontal.

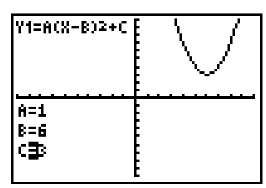
2. Use as teclas de deslocamento do cursor ([◀] [▶]) para variar o valor de B novamente. À medida que o valor de B vai variando, repare no valor da abcissa do vértice.

   Se **B=3**, qual é a abcissa do vértice? E se **B=5**? E quando **B=-2**?

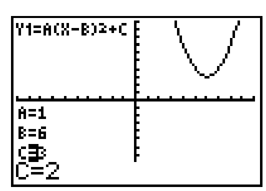
Conjecture sobre a relação entre **B** e o vértice da parábola. Teste a sua conjectura experimentando para **B=1**, **B=3**, **B=5**, **B=-1**, e **B=-2**. A sua conjectura estava correcta?

Se uma função quadrática está escrita na forma $Y = A(X - B)^2 + C$, **B** é a abcissa do vértice. Portanto, se uma função quadrática for definida pela equação $Y = (X - 3)^2$ então **B=3** e a abcissa do vértice será **3**. Mas se a equação fosse $Y = (X + 1)^2$ então **B** seria **-1** e o vértice teria abcissa **-1**.

Estudando o Efeito de C



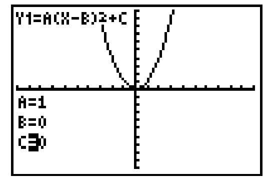
1. Pressione [▼] para seleccionar **C**=. Pressione agora [▶] algumas vezes e observe o efeito da variação de C no gráfico. Pressione agora [◀] e registe as mudanças.



2. Quais serão as coordenadas do vértice da função se **C=2**? Atribua a **C** o valor **2**. A sua previsão estava correcta?

3. Obtenha algumas conclusões sobre o efeito das mudanças no valor de **C** nas coordenadas do vértice. Teste as suas conclusões atribuindo alguns valores a **C**. Variações no valor de **C** provocam translações verticais na curva. Quando **C** aumenta, a curva desloca-se para cima. Quando **C** diminui, a curva desloca-se para baixo. O valor de **C** é a ordenada do vértice.

Teste o que aprendeu até aqui



A figura da direita ilustra o gráfico de $y = x^2$. As equações seguintes representam translações horizontais e verticais do gráfico de $y = x^2$. Recorra às propriedades que descobriu sobre translações do vértice de uma função quadrática para localizar o vértice do gráfico de cada uma das equações. Controle as suas respostas usando *Transformation Graphing*.

$y = (x - 2)^2$

$y = (x - 2)^2 + 3$

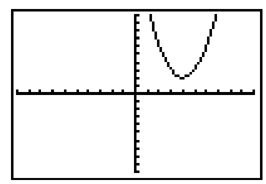
$y = (x + 1)^2 +3$

$y = (x + 1)^2 -2$

$y = (x + 5)^2$

$y = x^2 - 2$

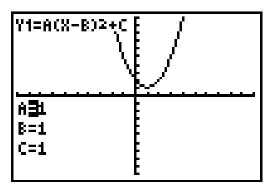
Qual é a equação da parábola (função quadrática) representada á direita?



Nota: A escala é 1.

Estudando o Efeito de A

1. Volte ao écran de *Transformation Graphing* e pressione ▲ até que **A**= esteja seleccionado.



2. Usando o mesmo método investigativo que usou para **B** and **C**, investigue o efeito de **A** no gráfico da função. Atribua a **A** valores positivos e negativos. Quando tiver elaborado uma conjectura quanto ao efeito de **A** e a tiver testado, passe à questão seguinte.

Questões para Discussão

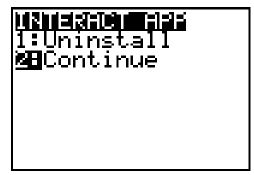
1. Que efeito têm as variações de **A** no gráfico? Discuta tanto as variações do sinal como a abertura do gráfico.

O valor de **A** determina o sentido da concavidade e a abertura da parábola. Quanto maior for o valor absoluto de **A**, mais estreita será a curva. Por seu lado, quanto menor for o valor absoluto de **A**, mais larga é a curva. Se **A** é positivo, então a concavidade da parábola é voltada para cima. Quando **A** é negativo, a parábola tem concavidade voltada para baixo.

Desactive *Transformation Graphing* antes de continuar.

1. Pressione [APPS] e seleccione o número que precede **Transfrm**.

2. Seleccione **1:Uninstall**.



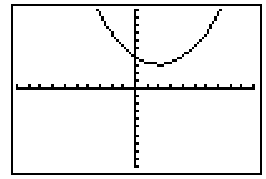
Verifique os seus conhecimentos

Faça corresponder a equação na coluna 1 com o seu gráfico na coluna 2. Estude todas as equações e compare-as antes de responder a quaisquer questões. Responda-as primeiro sem recorrer à calculadora, e depois verifique as suas respostas usando a calculadora.

Nota: Estes exemplos apenas envolvem o parâmetro A.

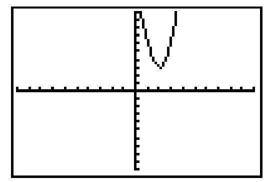
1. $Y = 3(X - 2)^2 + 3$

a.



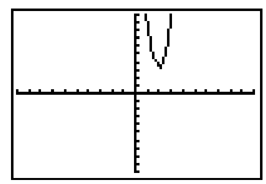
2. $Y = -(X - 2)^2 + 3$

b.



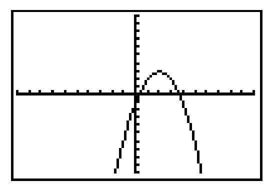
3. $Y = .25(X - 2)^2 + 3$

c.



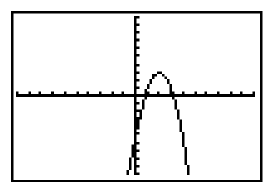
4. $Y = -2(X - 2)^2 + 3$

d.



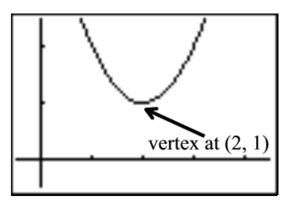
5. $Y = 6(X - 2)^2 + 3$

e.



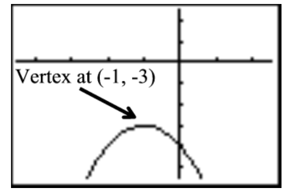
Máximos e Mínimos da Função Quadrática

Quando uma parábola tem concavidade voltada para cima, o vértice será o ponto da curva com ordenada mais baixa. No gráfico da direita, a ordenada do vértice é 1. Este é o valor mais baixo que *y* pode tomar, pelo que é chamado *mínimo* da função.



O gráfico representa uma função quadrática com um valor mínimo de 1 quando **x=2**.

Da mesma forma, quando uma parábola tem concavidade voltada para baixo, existe um valor máximo de *y*. Este gráfico representa uma função com um máximo de -3 quando **x= -1**.



Para ver melhor

Complete a tabela para cada função quadrática.

Equação	Sentido da Concavidade	Função tem um máximo/mínimo	Valor máximo/mínimo
$Y = 2(x - 3)^2 + 2$	Voltada para cima	mínimo	2
$Y = -3(x + 1)^2 + 10$			
$Y = 10(x + 4)^2 - 36$			
$Y = -16(x - 2)^2 - 100$			

Uma aplicação rápida

A equação $y = -16(x - 4)^2 + 259$ modela o voo de um modelo de foguete onde *y* é a altura do foguete e *x* é o tempo decorrido desde o lançamento. Represente graficamente a função com um domínio verosímil. Qual é a altura máxima do foguete? Em quanto tempo atingiu a altura máxima? Em que é que este problema se relaciona com esta actividade?

Trabalho para casa

Nome ______________________

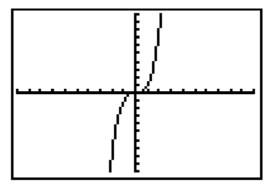
Data ______________________

Observe algumas equações de funções lineares e veja que tipo de translações podem ocorrer.

1. Use a sua calculadora gráfica para representar **Y1 = X** e **Y2 = X + 3** no mesmo referencial. Diga, de duas maneiras diferentes, como obter o gráfico da segunda função a partir do da primeira.

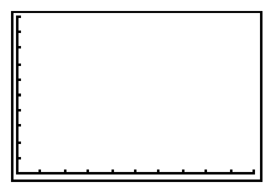
Em seguida veremos algumas funções que talvez ainda não tenha estudado. É altura de aplicar os conhecimentos que adquiriu a situações novas.

2. O gráfico da função $\mathbf{y = x^3}$ contém a origem (0, 0). Observe o gráfico de $\mathbf{y = x^3}$ representado à direita e, usando o ponto na origem como o ponto que se desloca (como fez com o vértice) obtenha um esboço do gráfico de $\mathbf{y = x^3 + 2}$. Verifique a sua resposta representando graficamente $\mathbf{y = x^3 + 2}$ na sua TI-83 Plus.

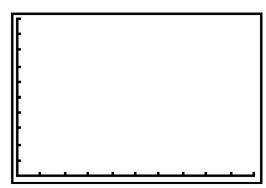
   

   Nota: Tanto pode usar $\boxed{\wedge}$ **3** *como* $\boxed{\text{MATH}}$ ***3:***^{3} *para a potência de 3.*

3. Esboce o gráfico de $\mathbf{y = (x - 2)^3}$ e verifique a sua resposta usando a TI-83 Plus.

4. Esboce o gráfico de $\mathbf{y = (x + 1)^3 - 5}$ e verifique a sua resposta.

Notas para Professores

O objectivo desta actividade é permitir que os alunos "brinquem" com a equação da função quadrática que evidencia as coordenadas do vértice e descobrir como o vértice, sentido da concavidade e abertura podem ser determinados recorrendo aos parâmetros.

Uma vez terminada esta actividade, os alunos deveriam ser capazes de fazer previsões sobre a localização do vértice de uma parábola dada por uma equação da forma $y = a(x - h)^2 + k$. No entanto, precisarão de muito mais trabalho para compreender o efeito de **A**. Depois desta actividade, serão capazes de comparar dois gráficos; mas não serão capazes de representar graficamente uma parábola à mão – será ainda preciso ensinar-lhes a representar a verdadeira abertura do gráfico.

O conceito de translação é fundamental para o estudo de funções em geral, e a actividade termina com um olhar rápido para o conceito geral de translação. Estas questões finais não são realmente necessárias para o estudo em causa, pelo que poderão facilmente ser omitidas. Para aqueles que usam translação como parte do seu estudo de funções, elas servem para sondar rapidamente o conceito.

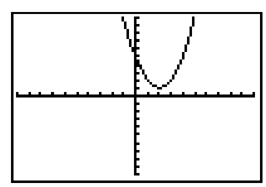
Este trabalho final com translações encoraja os alunos a conjecturar e a usar a calculadora para testar as suas conjecturas.

As aptidões e conhecimentos desenvolvidos nesta actividade serão úteis durante a realização da próxima actividade.

Respostas

O Gráfico de uma Função Quadrática na Forma $y = a(x - h)^2 + k$: Questões para Discussão

1. O vértice tem coordenadas (2, 1). O gráfico tem concavidade voltada para cima.



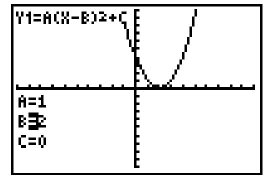
Estudando o efeito de B: Questões para Discussão

1. A curva desloca-se na direcção do eixo *Ox*.
2. Quando **B=3**, o vértice tem abcissa -3. Se **B=5** a abcissa é -5. Se **B=-1** então a abcissa é 1. A abcissa do vértice será 1 se **B=-1**.

Teste o que aprendeu até aqui

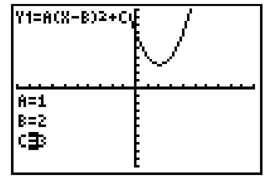
$y = (x - 2)^2$

O vértice tem coordenadas (2, 0)



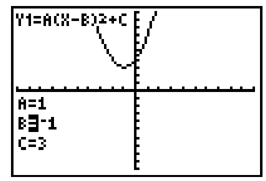
$y = (x - 2)^2 + 3$

As coordenadas do vértice são (2, 3)



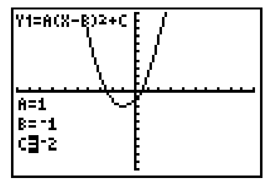
$y = (x + 1)^2 +3$

O vértice é o ponto (-1, 3)



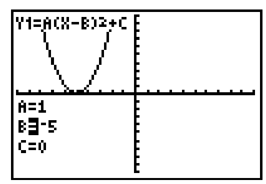
$y = (x + 1)^2 -2$

As coordenadas do vértice são (-1, -2)



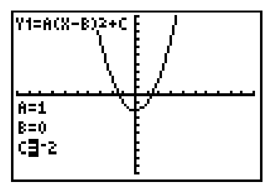
$y = (x + 5)^2$

O vértice tem coordenadas (-5, 0)



$y = x^2 - 2$

O vértice é o ponto de coordenadas (0, -2)



Qual é a equação da parábola (função quadrática)?

$Y = (x - 4)^2 + 2$

Estudando o Efeito de A: Questões para Discussão

1. O valor de **A** determina o sentido da concavidade da parábola e a sua abertura. A curva estreita à medida que o valor absoluto de **A** cresce e alarga à medida que o valor absoluto de **A** diminui. Se **A** for positivo, então a parábola tem concavidade voltada para cima. Se **A** for negativo, a concavidade será voltada para baixo.

Verifique os seus conhecimentos

1. b
2. d
3. a
4. e
5. c

Para ver melhor

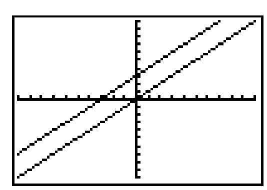
Equação	Sentido da Concavidade	Função tem um máximo/mínimo	Valor máximo/mínimo
$Y = 2(x - 3)^2 + 2$	Voltada para cima	Mínimo	2
$Y = -3(x + 1)^2 + 10$	Voltada para baixo	Máximo	10
$Y = 10(x + 4)^2 - 36$	Voltada para cima	Mínimo	-36
$Y = -16(x - 2)^2 - 100$	Voltada para baixo	Máximo	-100

Uma aplicação rápida

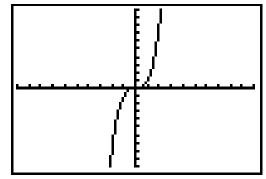
A altura máxima é de 259 pés, que é atingida em 4 segundos. A ordenada do vértice é o máximo ou o mínimo da função. Uma vez que **A** é negativo, a parábola tem concavidade voltada para baixo e a função tem um máximo.

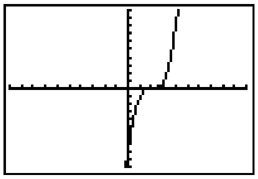
Trabalho para casa

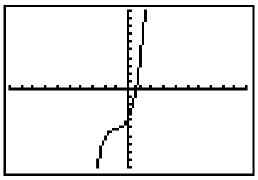
1. O gráfico da segunda função *($y = x + 3$)* pode ser obtido a partir do gráfico de $y = x$ quer através de uma translação de três unidades para cima, quer através de uma translação de 3 unidades para a esquerda. Usando uma translação de 3 unidades para cima, veríamos a equação como $y = x + 3$. Recorrendo à translação de 3 unidades para a esquerda, veríamos a equação como $y = (x + 3)$.



2. O gráfico de $y = x^3 + 2$ é uma translação vertical do gráfico de $y = x^3$ de 2 unidades para cima. O ponto na origem do referencial deve deslocar-se para (0, 2).



3. 

4. 

EXPLORATIONS

Activiade 4

Explorando dados "Quadráticos" com o Transformation Graphing

Na Actividade 3, explorou os efeitos dos parâmetros A, B, e C no gráfico duma função quadrática genérica escrita na forma que evidencia as coordenadas do seu vértice, $y = a(x - b)^2 + c$. Nesta actividade, através da translação e dilação de uma parábola genérica vai tentar ajustar, intuitivamente, dados que possam ser modelados por uma função quadrática.

Esta actividade servirá para se habituar ao uso da função quadrática quer escrita na forma que evidencia as coordenadas do seu vértice, quer por modelação intuitiva. O seu objectivo é o de continuar o estudo da função quadrática (parábola) e das suas propriedades, desenvolvendo modelos quadráticos.

É também uma boa oportunidade de pensar no que faz com que um modelo seja o ideal ou apenas razoável.

Quando se move sobre os dados do Modelo 2, pense no domínio da função e na janela de visualização de modo a constatar a sua importância no processo de modelação.

Se não completou a actividade 3, deve faze-lo antes de começar esta actividade.

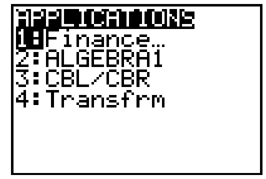
Recolha de Dados 1 - Bola Saltitante

Equipamento Necessário

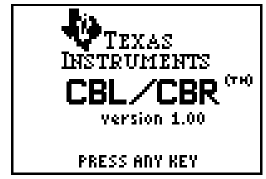
- TI-83 Plus com CBL/CBR e as aplicações *Transformation Graphing* instaladas
- CBR
- Bola de basket

Instruções

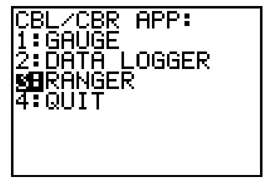
1. Ligar o CBR à TI-83 Plus com o cabo de ligação unidade a unidade.



2. Carregue em [APPS] e escolha **CBL/CBR**.
3. Carregue em qualquer tecla para sair do écran de introdução.



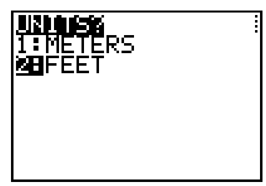
4. Seleccione **3:Ranger**.



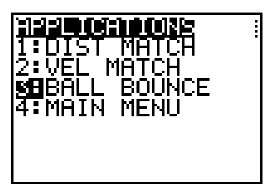
5. Carregue em [ENTER] para avançar para o écran seguinte.

6. Seleccione **3:APPLICATIONS**.

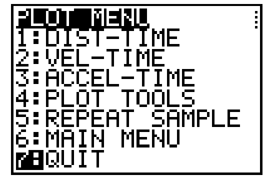
7. Seleccione **1:METERS** ou **2:FEET**.

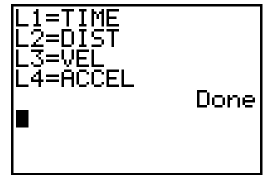


8. Seleccione **3:BALL BOUNCE**. Siga as instruções do Programa **BALL BOUNCE**.



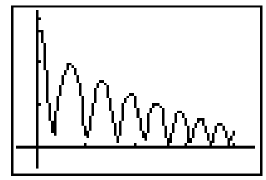
9. Quando o écran da calculadora já lhe mostrar um bom conjunto de dados, saia do programa carregando em [ENTER] **7:QUIT**. Os dados com que irá trabalhar estão guardados em **L1** e em **L2.**

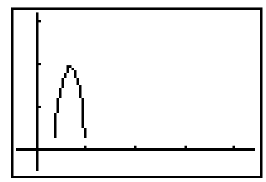




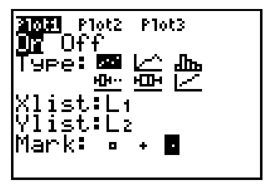
10. Use a instrução **Select()** da TI-83 para seleccionar o primeiro “bom” salto.

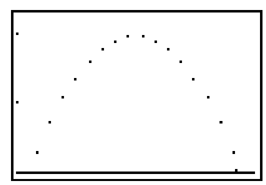
    Nota: Sugestões para o seu uso são dadas abaixo e na próxima página.





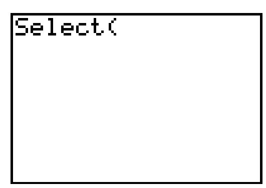
11. O programa **CBL/CBR** une os dados recolhidos, carregue em [2nd] [STAT PLOT] **1:Plot1** e seleccione a opção nuvem de pontos.

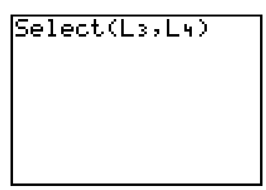




Sugestões para o uso da Instrução Select()

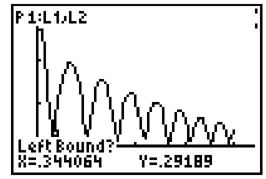
1. Com o gráfico visível, carregue em [2nd] [LIST] [▸] **8:Select(** e escreva os nomes das listas aonde quer guardar os dados. Para usar **L3** e **L4**, carregue em [2nd] [L3] [,] [2nd] [L4] [)] [ENTER].

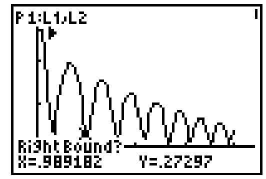


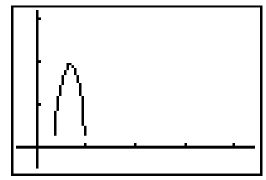


2. Para agora seleccionar a parte do gráfico que irá usar, carregue em ▶ para se situar no início do salto que pretende estudar. Carregue em ENTER. Isto fixa o extremo esquerdo do salto pretendido. Carregue em ▶ para se situar no fim do salto que pretende estudar. Carregue em ENTER. Os dados recolhidos ficarão colocados em **L3** e **L4**, e depois ficarão visíveis.

   *Nota: Poderá também encontrar as instruções para o uso de **Select()** e activação dos Gráficos Estatísticos no Guia do Utilizador da TI-83 Plus.*







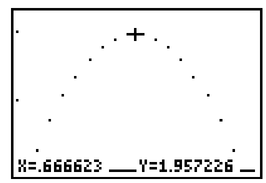
Desenvolvimento do Primeiro Modelo

1. Usando o cursor livre, tente posicionar o cursor + numa localização aproximada do vértice. Registe estas coordenadas.

   Para usar o cursor livre, carregue nas teclas do cursor (◀ ▲ ▶ ▼) para se mover por todo o écran.

   a. Acha que o vértice será sempre um dos pontos registados pelo CBR? Porquê ou porque não?

   b. Como é que o facto de a parábola ter um eixo de simetria o ajuda a fazer uma estimativa da localização do vértice?

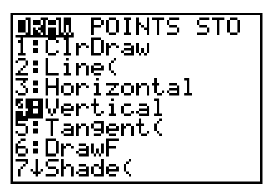


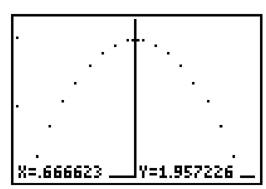
2. Usando as características do **DRAW**, esboce o eixo de simetria que passa pelo ponto que seleccionou como sendo o vértice. Carregue em 2nd [DRAW] **4:Vertical**. A recta será desenhada pela TI-83 Plus no local em que estiver o cursor. Essa recta aparenta ser o eixo de simetria? Se não, mova a recta para a direita e para a esquerda com as teclas de controle do cursor, até lhe parecer que o eixo de simetria está onde o visionou.

   Se necessitar de mover o seu eixo de simetria, assegure-se de que actualiza a localização inicial do vértice correctamente.

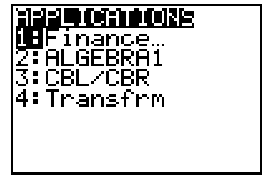
   Registe as coordenadas aproximadas do vértice.

   X = ___ Y = ___

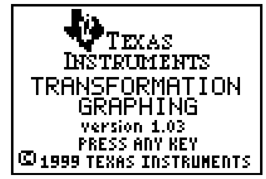




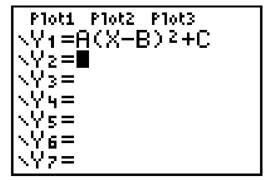
3. Carregue em [APPS] e seleccione o *Transformation Graphing* carregando no número à esquerda de **Transfrm**. Carregue em qualquer tecla (excepto [2nd] ou [ALPHA]) para iniciar o *Transformation Graphing*.



*Nota: Se não vir o écran da figura ao lado, seleccione **2:Continue**.*

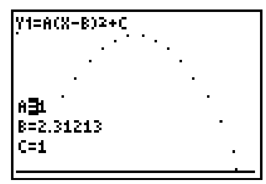


4. No modo **Func**, carregue em [Y=] para visualizar o editor de **Y=**. Apagar qualquer função que esteja na lista. Escreva a equação genérica da função quadrática escrita na forma que evidencia as coordenadas do seu vértice, **Y = A(X - B)^2 + C**. Carregue em [ALPHA] **A** [(] [X,T,Θ,n] [−] [ALPHA] **B** [)] [x^2] [+] [ALPHA] **C**.



   Se o Modo Play-Pause não estiver seleccionado para a esquerda de **Y1** (>| |), carregue em [◄] até o cursor estar em cima do símbolo e então carregue em [ENTER] até o símbolo correcto estar seleccionado.

5. Carregue em [GRAPH] para visualizar a nuvem de pontos e o gráfico. O gráfico começa nos valores mais recentes de **A**, **B**, e **C**. Esses valores poderão não estar relacionados com o problema em que está a trabalhar e, portanto, poderá não aparecer o gráfico no écran.

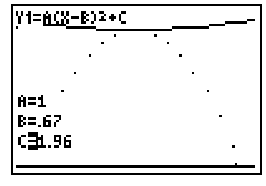


   a. Porque é que acha que registou as coordenadas aproximadas do vértice? Como é que as vai usar nesta actividade?

   b. O método intuitivo para encontrar um modelo para dados quadráticos torna-se mais rápido quando se está a trabalhar com a equação da parábola escrita na forma que evidencia as coordenadas do seu vértice. Já registou um ponto de partida para o vértice e, portanto, tem os valores iniciais para **B** e **C**. Qual dos valores é **B** e qual é **C**? Porquê?

6. Carregue em [▼] para activar **B=.** Escreva a sua estimativa. Neste exemplo, deverá carregar em [.] **6 7** [ENTER].

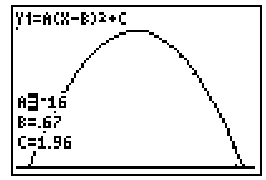
7. Carregue em [▼] para activar **C=**. Escreva a sua estimativa. Para este exemplo, carregue em **1** [.] **9 6** [ENTER].



   a. Agora tem uma parábola com o vértice correspondendo ao vértice dos seus dados (no exemplo 0.67, 1.96). Precisa agora de um valor para **A**. Qual será um bom valor inicial para **A**?

Porque a parábola tem a concavidade voltada para baixo, precisa de um valor negativo. Se teve Física, sabe que o coeficiente do termo ao quadrado para o movimento de queda livre, é metade da aceleração da gravidade. A aceleração da gravidade é aproximadamente 32 ft/seg^2 ou 9.8 m/seg^2. O que vos pode dar uma ideia de um valor inicial para **A**.

8. Carregue em [▲] [▲] para activar **A=**. Escreva a sua estimativa. No exemplo, carregue em [(-)] **1 6** [ENTER]. O seu modelo é suficientemente bom?



   Se o seu modelo não é tão bom quanto o que é apresentado, deve melhorá-lo dando novos valores a **A**, **B**, ou **C**.

Pesquisa na Internet: Uma vez acabada esta actividade, procure *queda livre* ou *lançamento de projécteis* na Internet e discuta como é que esta actividade está relacionada com o que encontrou.

Trabalho para casa

Nome ______________________

Data ______________________

O Preço dos Selos

No início de 1999, os Correios dos E.U.A. aumentaram o preço dos selos de primeira categoria para $0.33 (U.S.D.). Tal como em 1995, quando o preço aumentou para $0.32 (U.S.D.), muitas pessoas protestaram contra o aumento do preço dos selos. A tabela mostra os anos em que o preço dos selos de primeira categoria se alteraram desde 1958. Introduza os dados nas Listas Estatísticas da sua TI-83 Plus, e use o *Transformation Graphing* para encontrar um modelo quadrático que relacione o ano com o preço.

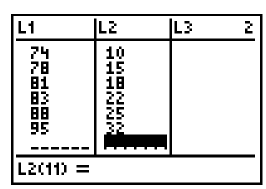
Use o seu modelo para prever o preço dos selos de primeira categoria em 1999, e diga se o aumento efectuado se justifica.

Ano	Preço de um Selo de primeira categoria
1958	$0.04
1963	0.05
1968	0.06
1971	0.08
1974	0.10
1978	0.15
1981	0.18
1983	0.22
1988	0.25
1995	0.32

Fonte: Impresso com a permissão do *World Almanac and Book of Facts, 1998.*
©1998, 2000 World Almanac Education Group, Inc.

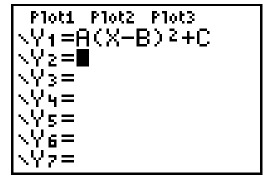
1. Qual das variáveis é a variável independente?

   a. Introduza os dados nas Listas Estatísticas da sua TI-83 Plus. Carregue em $\boxed{\text{STAT}}$ seleccione **1:Edit.** Introduza os valores da tabela numa lista vazia no editor estatístico. Limpe duas listas se nenhuma estiver vazia.

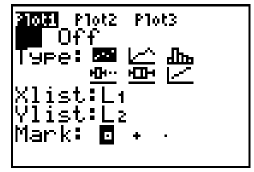


   Nota: o exemplo mostra o ano sem os primeiros dois dígitos (para 1974 aparece 74).

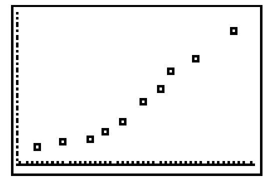
b. Carregue em [Y=] e desactive quaisquer funções que estejam activas.



c. Para visualizar o gráfico, carregue em [2nd] [STAT PLOT]. Select **1:Plot1**. Active o gráfico e faça a selecção no menu de gráficos, como mostra a figura ao lado.



d. Carregue em [ZOOM] **9:ZoomStat** para visualizar o gráfico.



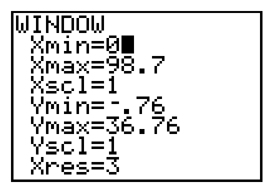
2. Será que existe alguma relação entre o ano e o custo de um selo de primeira categoria? Qual ou quais pontos lhe parecem estar mais “desalinhados?”

3. Acha que um modelo quadrático é razoável? Justifique.

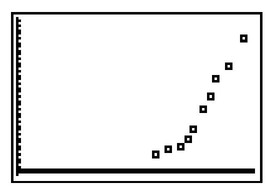
4. Será que o modelo seria diferente se só se tivessem dados até ao ano de 1983?

Use o *Transformation Graphing* e a equação da parábola escrita na forma que evidencia as coordenadas do seu vértice para encontrar um modelo para os dados.

Importante: Antes de começar, Carregue em [WINDOW] e faça **Xmin = 0**. Isto permitirá uma melhor visão dos pontos dos dados e dos coeficientes com o *Transformation Graphing* instalado.



Como ponto de partida, escolha um dos pontos dados, para vértice, e comece a aperfeiçoar o seu modelo.



Quando tiver encontrado o seu modelo, responda às seguintes perguntas.

5. O que é o seu modelo? Porque acha que é razoável?

6. Qual é o preço, que o seu modelo vaticina, para um selo de primeira categoria no ano de 1999? Para que a sua calculadora o ajude a responder a esta questão, mostrando o gráfico do seu modelo, carregue em [TRACE] [▲] **99** [ENTER].

   Nota: o seu ***Xmax*** *tem de ser superior a 99 para este trabalho.*

7. Usando o seu modelo, pensa que o aumento de preço foi razoável? Justifique matematicamente.

8. Algumas pessoas diriam que, teoricamente, um modelo exponencial teria sido melhor. Porque acha que elas reivindicariam esse tipo de modelo?

9. A tabela mostra os anos como sendo 58, 63, … em vez de 1958, 1963, …. Porque é que acha que se fez assim? Que tipo de operação foi feita com os dados?

10. O que escreveria na tabela para os anos 2000 ou 2010?

11. Usaria o seu modelo para vaticinar o custo de um selo de primeira categoria para quando os Correios dos E.U.A. lançaram o seu primeiro selo? Sugestão: O primeiro selo foi lançado antes de 1950. Poderá fazer uma busca na Internet da história dos Correios.

Notas para Professores

Esta actividade é o seguimento perfeito da anterior. Na Actividade 3, o aluno explorou os efeitos dos vários parâmetros no gráfico de uma parábola. Nesta actividade, vão usar o que acabaram de aprender para encontrar um modelo quadrático usando o *Transformation Graphing*.

O principal objectivo desta actividade é o de dar aos alunos a capacidade de observar os parâmetros da equação da parábola escrita na forma que evidencia as coordenadas do seu vértice e os seus efeitos na forma da curva. Os modelos por método intuitivo ajudam a reforçar essas relações e ajudam o aluno a descobrir algumas das propriedades da curva que estão a estudar.

Os métodos usados nesta actividade devem ser usados antes da introdução de qualquer modelo mais formal. O uso da intuição também ajuda ao desenvolvimento das capacidades para reconhecer se um modelo é ou não razoável.

Cuidado para não se estar à procura da resposta “correcta.” Qualquer modelo que seja razoável, terá os seus pontos fortes, e pode ser justificado apesar de ainda não se ter efectuado qualquer formalização.

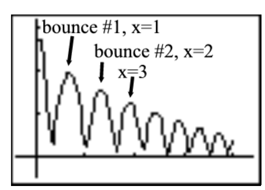
Existem dois conjuntos de dados. O conjunto 1 é a recolha efectuada pelos alunos na sala de aula. As instruções para este conjunto de dados pressupõe o uso do CBR, mas um CBL e um sensor de movimento podem também ser usados. Se estiver a usar o CBL, necessita do programa *ressalto da bola* chamado **BOUNCE**. Este programa pode ser encontrado no site da TI.

Instruções mais detalhadas da experiência do ressalto da bola podem ser encontradas no *Livro de Instruções do CBL™* que acompanha o CBL, ou nos livros *Real-World Math with the CBL™ System* ou *Math and Science in Motion: Activities for Middle School,* disponibilizados pela Texas Instruments. O *Livro de Instruções do CBL™* também pode ser encontrado (Grátis!) na secção Guides do site da Texas Instruments em: **education.ti.com.**

Sugestão: Nas instruções diz-se ao aluno para usar o cursor livre para se aproximar do vértice. Talvez fosse mais fácil ir ao menu **DRAW** e usar a recta vertical para tentar visualizar o eixo de simetria. Tal não foi feito logo no início da actividade, pois a intenção não era a de confrontar os alunos com coisas novas ou menos familiares, mas sim a de que com as operações mais familiares pudessem concentrar-se melhor na equação da parábola escrita na forma que evidencia as coordenadas do seu vértice.

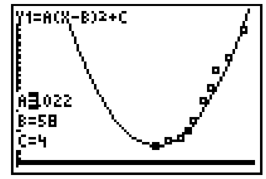
Os modelos para a bola saltitante devem ser todos muito bons e fáceis de encontrar.

Futuramente: Pode querer guardar os dados do ressalto da bola para os ter aquando do estudo da função exponencial. O conjunto de dados formado pelo número de ressaltos e a altura máxima da bola em cada ressalto pode ser modelado por uma função exponencial.

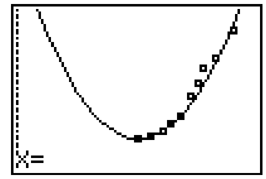


Existem muitos modelos razoáveis. Não espere que todos os seus alunos obtenham o mesmo modelo, ou que os modelos que vaticinam o custo em 1999 sejam muito próximos. Qualquer modelo razoável deve ser aceite.

Usando o primeiro ponto dos dados (58, 4) para vértice, será um método muito popular. Um modelo razoável pode ser encontrado com esta aproximação. Qualquer um dos modelos mostrados aqui, vaticina que o preço de um selo em 1999 será de $.41 (U.S.D.).



Poderá querer mostrar aos seus alunos como usar a opção “value” no menu CALC se achar que eles ainda não sabem como o fazer.

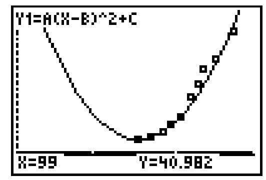


Para usar a opção “value” no menu CALC:

a. Com o gráfico visível, carregue em [2nd] [CALC] **1:value**.

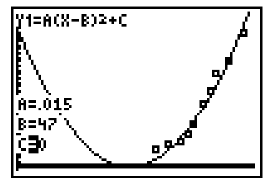
b. Escreva o número que pretende usar na função (neste exemplo, **x = 99**).

c. Carregue em [ENTER].

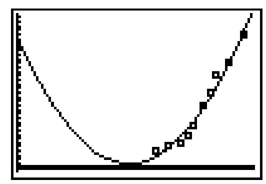


Nesta actividade o mesmo valor é encontrado usando a opção **Trace**.

Lembre-se, de que existem vários modelos igualmente razoáveis. Este modelo, vaticina que o preço em 1999 será de $.41 (U.S.D.).



Usando a regressão quadrática da máquina tem-se um modelo numa forma diferente *(y = ax²+ bx + c)*, o qual não aparenta ser muito melhor que os modelos intuitivos. O custo vaticinado por este modelo é de $0.39 (U.S.D.).



Uma regressão exponencial aos dados dá um modelo que vaticina um custo de $0.50 (U.S.D.) em 1999, enquanto que uma regressão logística vaticina que o preço será de $0.34 (U.S.D.).

Em qualquer dos casos, o aumento de preço não parece estar “desalinhado.”

O modelo quadrático, não importa o que eles tenham, dá a oportunidade perfeita para a discussão dos resultados dos domínios e das janelas. Se nenhuma restrição for imposta ao domínio, qualquer modelo quadrático mostrará que muitos anos antes daqueles que estão na tabela, o preço de um selo era muito maior, e que então o preço teria descido, reportando-nos às décadas de 40 e 50.

Com domínios sem restrições, quer o modelo logístico quer o exponencial, farão mais sentido para anos anteriores aos que constam da tabela.

Duas pesquisas na Internet são sugeridas no decurso da actividade. Como terceira actividade na Internet, pode pedir aos seus alunos que pesquisem o preço dos selos antes de 1958, acrescente esses dados aos gráficos deles, e, estabeleça agora um novo modelo. Se usar esta opção, poderá discutir a possibilidade de manter, actualizar ou rever um modelo.

Respostas

As respostas à maioria das questões depreendem-se no decorrer da actividade. Aquelas que não aparecem a seguir.

Desenvolvimento do Primeiro Modelo

1. a. Não existe qualquer razão para crer que um ponto em particular pode ser recolhido pelo CBR. Provavelmente recolherá um ponto próximo do vértice, o qual poderá ser usado como ponto de partida para o vértice, mas não é o vértice.

   b. Como o vértice está no eixo de simetria, se visualizar o eixo de simetria pode mais facilmente encontrar a coordenada em x do vértice. Normalmente é mais fácil começar a procura de um modelo a partir da visualização do eixo de simetria porque pode usar todos os pontos recolhidos.

5. a. Pode usar este ponto como ponto de partida para **B** e **C**.

   b. **B** é a coordenada em X do vértice e **C** é a coordenada em **Y**.

7. Qualquer valor negativo, pois a parábola está virada para baixo.

Trabalho para casa

1. A data é a independente e o preço é a dependente.
2. Sim, parece haver uma relação: quando X aumenta, Y aumenta proporcionalmente. Observando a globalidade dos dados, o aumento de preço em 1983 parece o mais “desalinhado.”
3. Um modelo quadrático parece ser o razoável, mas terá de ter um domínio com restrições.
4. O ano de 1983 parece o mais desalinhado no conjunto total de dados. Se os dados acabassem em 1983, provavelmente ter-se-ia uma curva mais acentuada no final.
5. As respostas podem variar. Como exemplo $\mathbf{Y} = 0.023(X - 58)^2 + 4$.
6. As respostas podem variar. Para o exemplo, em #5, $0.43 (U.S.D.).
7. As respostas podem variar. Para o exemplo, em #5, muito razoável. Provavelmente para um modelo que possa ter, ele vaticinará um preço superior a $0.33 (U.S.D.).
8. A maioria das pessoas já ouviu dizer que o custo de vida cresce exponencialmente. Portanto, acham que qualquer coisa com preço, também sofre aumentos exponenciais.
9. Faz uma translação horizontal dos dados para manter os números pequenos. A relação quadrática é a mesma antes e depois da translação.
10. O ano de 2000 será 100, e 2010 será 110. Os dados da tabela foram preparados para os últimos 1900 anos.

11. As respostas podem variar, mas o modelo tem um domínio restrito. Muitos alunos usarão o primeiro ponto dos dados (ou perto deste) como vértice, o que significa que qualquer ano antes do vértice terá um preço superior. É seguro partir do pressuposto que o preço de um selo não diminuiu em 1958.

Actividade 5

Explorando a Função Exponencial

Quando o valor de uma variável aumenta ou diminui com uma taxa constante, diz-se que a variável se altera *exponencialmente*. Quando acabar estas actividades, será capaz de identificar o crescimento ou decrescimento exponencial de equações. Nesta actividade, irá aprender a desenvolver modelos intuitivos em situações que envolvem crescimento exponencial.

Se investir dinheiro numa conta bancária para poupança, este terá um rendimento com uma taxa constante. Por exemplo, poderá investir com uma taxa anual de 6%. Se decidiu por esta opção de investimento, todos os anos o banco aconselhará para que mantenha esses 6% que o seu dinheiro lhe rendeu na sua conta, ou seja, para que aumente o capital investido com os juros recebidos. O seu dinheiro terá um *crescimento exponencial*.

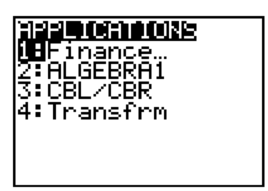
Se deixar cair uma bola e a deixar a saltitar, como fez na Actividade 4, cada ressalto será cada vez menor e a bola começa a parar. No entanto, cada ressalto depende do ressalto anterior numa taxa fixa. Este é um exemplo de *decrescimento exponencial*.

Se uma chávena de chocolate quente for deixada a arrefecer, a temperatura do chocolate ao longo do tempo ilustra um decrescimento exponencial.

Os crescimento e decrescimento exponenciais estão em toda a parte. Nesta actividade, irá explorar funções exponenciais da forma $y = ab^x$. Nesta forma, a constante b é chamada de factor ou taxa de crescimento.

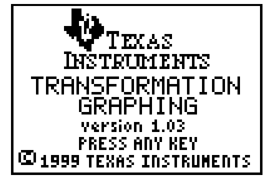
Investigando o Efeito de a e de b no Gráfico de $y = ab^x$

1. Carregue em $\boxed{\text{APPS}}$ e seleccione o *Transformation Graphing* carregando no número à esquerda de **Transfrm**.



2. Carregue em qualquer tecla (excepto [2nd] ou [ALPHA]) para iniciar o *Transformation Graphing*.

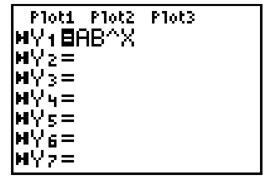
   Nota: Se não vir o écran da figura ao lado, seleccione ***2:Continue****.*



3. No modo **Func**, carregue em [Y=] para visualizar o editor de **Y=**. Apagar qualquer função que esteja na lista e desactivar todos os traçados.

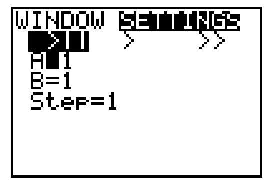
4. Escreva **Y = AB**^{x}. Carregue em [ALPHA] **A** [ALPHA] **B** [^] [X,T,Θ,*n*].

   Se o Modo Play-Pause não estiver seleccionado para a esquerda de **Y1** (>| |), carregue em [◄] até o cursor estar em cima do símbolo e então carregue em [ENTER] até o símbolo correcto estar seleccionado.

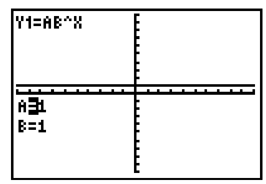


5. Carregue em [WINDOW] [▲] para visualizar o écran de **SETTINGS** do *Transformation Graphing*.

   Ponha os **SETTINGS** como mostra a figura ao lado. Para fazer estas selecções, carregue em [▼] **1** [▼] **1** [▼] **1**. Isto definirá os valores iniciais para os coeficientes e o incremento com que deseja observar as alterações dos coeficientes.



6. Carregue em [ZOOM] **6:ZStandard** para visualizar o gráfico.



Questões para discussão

1. O gráfico aparenta ser uma recta. Porquê? Justifique a sua resposta.

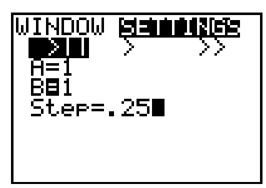
2. Se **B** continuar a ser 1 e **A** variar, o que acontece com o gráfico? Elabore uma conjectura e carregue nas teclas de controle do cursor ([◄] ou [►]) as vezes necessárias para averiguar a sua validade.

3. Será que a variação do coeficiente **A** não afecta a taxa de variação da função exponencial? Então o que é que **A** afecta?

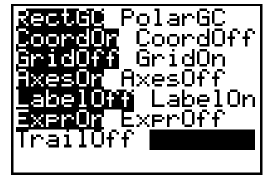
Investigando B > 1

1. Carregue em [WINDOW] para visualizar o écran de **SETTINGS** do *Transformation Graphing*.

   Ponha os **SETTINGS** como mostra a figura ao lado. Para fazer estas selecções, carregue em [▲] [▼] **1** [▼] **1** [▼] **.25**. Isto definirá os valores iniciais para os coeficientes e o incremento com que deseja observar as alterações dos coeficientes.



2. Carregue em [2nd] [FORMAT] ▼ ▼ ▼ ▼ ▼ ▼ ▶ para activar **TrailOn**. Carregue em [ENTER]. Será activada a capacidade do Trail. Com **TrailOn**, como o valor de **B** está modificado e o gráfico redesenhado, uma recta a ponteado ficará no lugar da última curva.

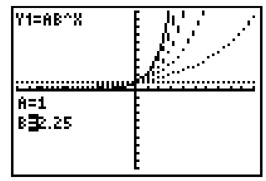


   *Nota: O **TrailOn** só é possível com o Transformation Graphing.*

   Pode usar [2nd] [DRAW] **1:ClrDraw** para apagar os rastos ou repetir os passos acima para activar **TrailsOff**.

3. Carregue em [GRAPH] para voltar ao écran do gráfico.

4. Active **B=**. Carregue em ▶ várias vezes para aumentar o valor de **B**. Pare após cada aumento para poder observar as alterações no gráfico. Só precisará de alterar o valor 5 vezes.



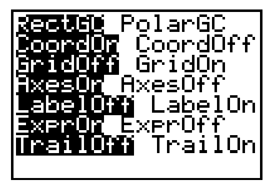
   O que acontece com o gráfico quando **B** aumenta?

O valor de **B** controla a taxa com que a função cresce e é chamado de factor ou taxa de crescimento. Quando **B** aumenta a função fica com uma inclinação ascendente mais acentuada.

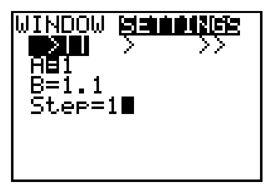
Até agora só investigámos valores para B>1. Vamos deixar o caso de B<1 para mais tarde.

Investigando o efeito de A

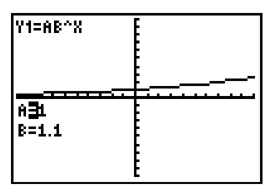
Antes de iniciar esta investigação mude **TrailOn** para **TrailOff**. Carregue em [2nd] [FORMAT] ▼ ▼ ▼ ▼ ▼ ▼ [ENTER].



1. Carregue em [WINDOW] ▲ para visualizar o écran de settings do *Transformation Graphing*. Ponha os **SETTINGS** como mostra a figura ao lado.

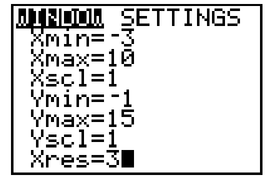


2. Carregue em [GRAPH] para voltar ao écran do gráfico. Active **A=**.



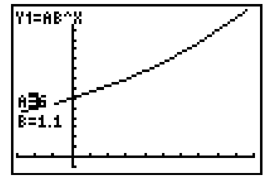
3. Carregue em ▶ várias vezes para ver o efeito do aumento de **A** no gráfico. Pare cada vez que a curva for redesenhada e tome nota da alteração que observou. Preste uma especial atenção ao valor da intersecção com o eixo dos y em cada passo.

4. Carregue em [WINDOW] e altere a janela do gráfico de modo a ficar como a que se representa à direita.



5. Carregue em [GRAPH] para voltar a visualizar o gráfico, mas agora com a nova janela.

6. Escreva valores específicos para **A**, escrevendo o número e carregando em [ENTER]. Preste uma especial atenção ao valor da intersecção com o eixo dos y. Escreva os valores 2, 6, 10.



Como é que **A** afecta o gráfico de $Y = AB^X$?

O valor de **A** é a intersecção da curva com o eixo dos y. A intersecção com o eixo dos y quando $X = 0$, $Y = A*B^0 = A*1 = A$. A intersecção com o eixo dos y de uma função exponencial é frequentemente denominada de valor inicial da variável dependente, a variável que está a crescer exponencialmente.

Como exemplo, se investiu $100 (U.S.D.) num banco, quando o tempo t=0 terá $100 (U.S.D.). Para poder estabelecer um modelo exponencial para o crescimento do seu dinheiro, deve fazer **A=100**, o valor inicial. O valor de **B** irá ser a taxa de juro.

Agora veja-se o arrefecimento como segundo exemplo. Se a temperatura de uma chávena de chocolate quente for de 60º C e se se colocar a chávena no exterior onde a temperatura é de 0º C, o ponto de partida para a nossa equação será tempo = 0, temperatura = 60. Expressando como y= para a calculadora, o valor de A será 150, a temperatura inicial. Neste caso, **B** será afectado pela taxa em que o chocolate está a arrefecer. O chocolate quente estará a perder calor, um exemplo de decrescimento. A próxima actividade vai ser dedicada ao decrescimento.

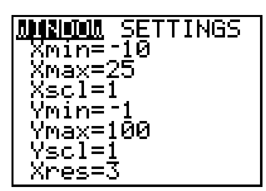
Revisitando B

Considerou o decrescimento exponencial mas não visualizou o seu gráfico. Antes de continuar, pegue num exemplo de decrescimento e veja se consegue esboçar o seu gráfico.

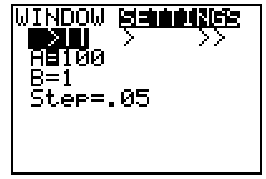
A altura máxima de cada ressalto da bola saltitante ilustra um decrescimento exponencial. Suponha que a bola é largada de uma altura 6 pés e ressalta para metade dessa altura, 3 pés. No próximo salto, volta a acontecer o mesmo, o ressalto volta a atingir metade da altura do anterior, ou seja, 1.5 pés. Este padrão mantém-se até a bola parar de saltar. Desenhe um esboço, mesmo que grosseiro, da altura máxima atingida pela bola em cada ressalto. Faça **Y** ser a altura e **X** o número de ressaltos.

Agora que tem uma ideia de como a curva do decrescimento exponencial deve ser, vamos continuar a investigar.

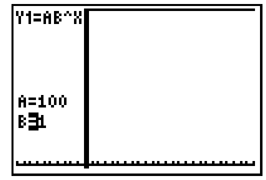
1. Carregue em [WINDOW] e ponha os settings da janela como mostra a figura ao lado.



2. Carregue na tecla “para cima” do cursor (▲) até visualizar o menu de **SETTINGS** para o *Transformation Graphing*. Ponha os settings como mostra a figura ao lado.



3. Carregue em [GRAPH] para voltar à janela do gráfico.
4. Carregue em ▼ até activar **B=**.



5. Carregue em ◄ várias vezes para diminuir o valor de **B**. Observe os valores de **B** entre1 e 0. Pare, cada vez que o gráfico se alterar, e observe o efeito no gráfico. Pode querer desactivar o **TrailOn**. Se assim for, certifique-se de que o desactivou quando acabar esta parte da actividade.

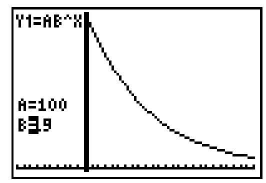
   Quais são os efeitos, no gráfico da função exponencial $Y = AB^x$, provocados pela diminuição do valor de **B**, no intervalo $0 < B < 1$?

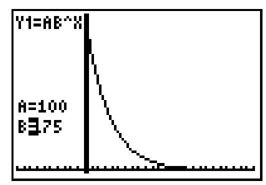
   Para $0 < B < 1$, os valores da função, **Y**, diminuem quando **X** aumenta. Quanto mais próximo de $B = 0$, mais rapidamente o valor de **Y** diminui e portanto mais rápida é a taxa de decrescimento do gráfico.

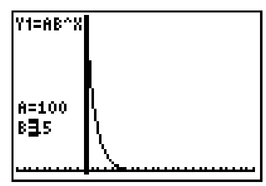
   *Nota: **B** não pode ser negativo. Tome para **B** um valor negativo e investigue os valores da função com uma tabela da sua calculadora.*

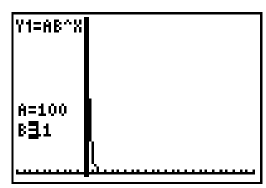
   Supondo $A > 0$ e $0 < B < 1$, poderá Y ser negativo quando $Y = AB^x$? Justifique a sua resposta.

   Como $0 < B < 1$, quanto mais vezes multiplicar **B** por si próprio, mais pequeno se torna o termo, mas nunca será inferior a 0. Como exemplo, suponha $0.9^1, 0.9^2, 0.9^3, \ldots, 0.9^{10}$, quando fizer os cálculos obterá 0.9, 0.81, 0.729, … ,0.349. O valor de cada termo sucessivo é cada vez mais pequeno mas nunca será 0. Logo, enquanto **A** não for negativo, AB^x nunca será negativo, será apenas muito pequeno.







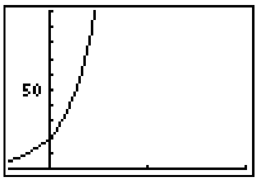


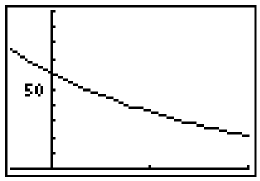
As curvas que se aproximam muito de um valor, mas que nunca o alcançam, dizem-se *assimptóticas.* A equação exponencial $Y = AB^x$ é assimptótica para 0 porque se aproxima de 0 quando **X** aumenta, mas nunca alcança 0.

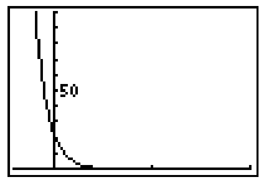
Como estão os seus conhecimentos?

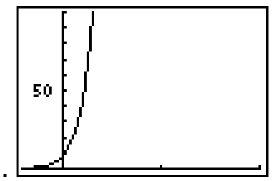
Cada um dos gráficos é um exemplo de uma função exponencial. Diga:

1. Se o gráfico é um exemplo de crescimento ou de decrescimento.
2. O valor de A.
3. B < 1 ou B > 1?

a. 

b. 

c. 

d. 

4. Qual dos gráficos tem o maior valor para **B**, *b* ou *c*? E quanto a *a* ou *d*? Justifique as suas respostas.

Trabalho para casa

Nome ______________________

Data ______________________

A tabela mostra a população mundial, em biliões, desde 1940. Use o *Transformation Graphing* para encontrar um modelo exponencial para estes dados.

Pesquisa na Internet: Procure a população mundial na Internet. Use os dados que encontrou se forem diferentes dos que constam da tabela.

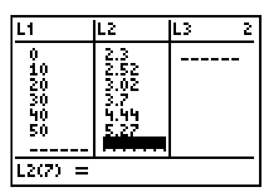
Ano	População (em biliões)
1940	2.30
1950	2.52
1960	3.02
1970	3.70
1980	4.44
1990	5.27

Fonte: *The World at Six Billion*. Population Division, Department of Economics and Social Affairs, United Nations Secretariat. Working Paper ESP/P/W.154, New York, 1999. Reprinted with permission.

Antes de introduzir os dados, pense nos parâmetros da função exponencial $Y = AB^x$. O valor A é considerado o valor inicial da variável dependente. Neste problema, o valor inicial é 2.3 biliões quando o ano é = 1940. Mas, se quiser que o valor inicial da variável independente seja 0, subtraia 1940 a cada ano.

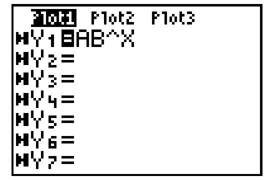
Ano	(x)	População (em biliões) (y)
1940	0	2.30
1950	10	2.52
1960	20	3.02
1970	30	3.70
1980	40	4.44
1990	50	5.27

1. Introduza os dados numa lista estatística da sua TI-83 Plus. Carregue em STAT e seleccione **1:Edit.** Introduza os valores numa lista vazia do editor estatístico. Limpe duas listas se nenhuma estiver vazia.

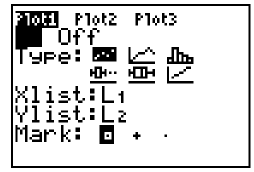


Nota: Para limpar uma lista, mova-se para cima para activar o nome da lista, carregue em CLEAR ENTER.

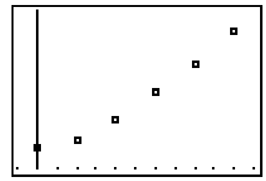
2. Carregue em [Y=] e apague todas as funções. Introduza a forma genérica da função exponencial.



3. Para visualizar o traçado, carregue em [2nd] [STAT PLOT]. Seleccione **1:Plot1**. Active o traçado e escolha no menu como se ilustra na figura ao lado. Carregue em [ZOOM] **9:ZoomStat** para visualizar o traçado.

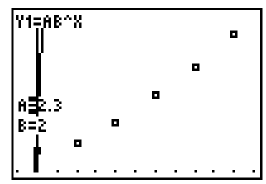


   Parece que um modelo exponencial, será este o apropriado?



4. Certifique-se de que o *Transformation Graphing* está instalado e no modo Play-Pause. Carregue em [GRAPH] para redesenhar o traçado com o gráfico.

5. Seleccione os valores iniciais para **A** e **B**. Como exemplo seja **A** = **2.3** e **B** = **2**. Use as teclas do cursor “para cima”/“para baixo” para em primeiro activar **A**= e escreva **2.3**, depois active **B**= e escreva **2**. Isto já lhe dá um ponto de partida para a sua investigação.



   O valor de **B** deverá ser maior ou menor do que o que aparece no gráfico? Justifique.

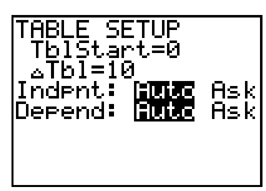
   O gráfico parece estar a crescer muito depressa — está muito “íngreme.” O valor de **B** deve ser inferior a 2.

6. Reajuste os seus valores de **A** e **B** até obter um modelo razoável. Primeiro reajuste **B** e depois **A**. Escreva **B** até às milésimas para obter um bom modelo.

   Por qual das equações é que se decidiu como sendo um bom modelo para os dados?

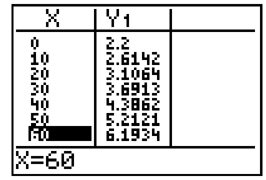
7. Quando tiver um modelo razoável, use a tabela da sua calculadora para estimar o valor da população mundial em 2000. Sugestão: Se o ano de 1940 aparece na sua tabela como 0, 2000 aparecerá como 60.

   Para usar a tabela carregue em [2nd] [TBLSET] e ponha o **TABLE SETUP** como se ilustra ao lado.



Para ler a tabela, carregue em [2nd] [TABLE].

Nota: A sua tabela pode ter valores diferentes, depende do seu modelo.



8. Qual a população mundial que o seu modelo vaticina para o ano de 2010?

9. Qual a população mundial que o seu modelo vaticina para o ano de 1930?

Praticando a Modelação

A população da cidade virtual de “Transform” é mostrada na tabela seguinte.

Ano	População
1970	125,000
1975	201,300
1980	324,000
1985	522,000
1990	841,000
1995	1,354,000

10. Encontre um modelo para a população de “Transform.”

11. Qual será a população em 2000?

12. Qual a taxa de crescimento da população?

    Nota: Comece por representar o ano de 1970 por 0.

Notas para Professores

Esta actividade tem como objectivo o início do estudo da função exponencial. Quando os alunos completarem a actividade devem ser capazes de:

- Reconhecer o crescimento ou decrescimento exponencial de uma função.
- Dizer qual dos coeficientes controla a taxa de crescimento/decrescimento.
- Dizer o efeito provocado pelas alterações no valor de **A**.
- Comparar dois gráficos por observação das suas equações.
- Criar um modelo intuitivo de uma situação que envolva crescimento exponencial.

Não se deve dar grande importância à magnitude de B, apenas que altera a taxa de crescimento de uma função. Não existe qualquer trabalho feito com a actual taxa; não tem significado fazer parte desta actividade.

Método de Apresentação Opcional

As actividades 5 e 6 podem ser divididas em três secções: crescimento, decrescimento, e comportamentos assimptóticos. Se decidir optar por esta divisão em secções, deverá proceder da seguinte forma:

- *Crescimento:* Actividade 5 desde o seu início até à secção *Revisitando B*. O Trabalho para casa da Actividade 5 será o Trabalho para casa desta secção.
- De*crescimento:* Começa onde a nova unidade do Crescimento acaba. Continue pela Actividade 6 até à secção *Modelando a experiência: Retirando os seis .* O Trabalho para casa da página 61 será o Trabalho para casa desta secção.
- Comportamentos Assimptóticos*:* Esta secção começa onde a anterior acabou e vai até ao final da actividade. O Trabalho para casa para esta secção será a Actividade Prática com o CBL da página 63. Esta actividade, *Experiência M5: Arrefecimento do Café,* pode ser encontrada no *Livro de Instruções do CBL*™. Esta actividade pode também ser retirada da Internet fazendo download grátis do site da Texas Instruments em **education.ti.com**. Qualquer experiência de "arrefecimento" pode ser usada para este Trabalho para casa.

Cuidado!!!! Esta actividade menciona o arrefecimento de uma chávena de chocolate mas *não desenvolve* a ideia de assimptotas. Na página 45, a exposição que é relatada é para o caso de o chocolate quente estar a 60º C e arrefecer até 0º C. Deste modo a assimptota é y = 0. Achou-se que a investigação completa do decrescimento, com comportamento assimptótico, seria demasiado para este conjunto de actividades.

A discussão das assimptotas é feita na Actividade 6. Com esta actividade, está a tentar iniciar o estudo da função exponencial e só se pretende que os alunos se apercebam de que existe decrescimento e crescimento, e como se pode dizer qual é qual.

Respostas

Investigando o Efeito de a e de b no Gráfico de $y = ab^x$: Questões para discussão

1. Quando A=B=1, tem-se a equação $y = 1(1)^x$. Não interessa qual o valor que x toma, 1^x será sempre 1. Portanto a equação fica y = 1(1), ou seja, a recta y = 1. Neste caso não existe crescimento ou decrescimento.
2. Como B=1, continua a ter a recta y = A. A forma genérica da equação passa a ser $Y = AB^x = A*1 = A$. **B** é o factor ou taxa de crescimento; desde que mantenha o valor 1, não existe qualquer alteração.
3. **A** é a intersecção com o eixo dos Y.

Investigando B>1

4. À medida que **B** aumenta, a curvatura torna-se mais acentuada, a função cresce com uma taxa maior.

Investigando o efeito de A

6. **A** é a intersecção da curva com o eixo dos y.

Como estão os seus conhecimentos?

1-3 Crescimento, 20, b>1

Decrescimento, 60, b<1

Decrescimento, 20, b<1

Crescimento, 10, b>1

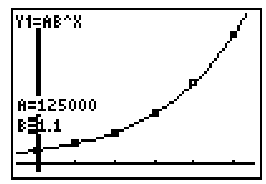
4. O valor de **B** é maior em *b* porque a curva não é tão acentuada, decresce mais devagar. O valor em *d* é maior porque a curva é mais acentuada, cresce mais depressa.

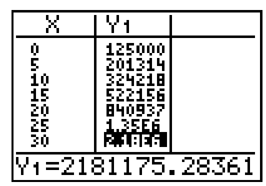
Trabalho para casa

5. O valor de **B** deve ser inferior. O curva está a crescer muito depressa.
6. As respostas podem variar. Y = 2.1(1.019)^{x} pode ser um modelo razoável. Qualquer resposta razoável deve ser aceite. Não existe uma resposta correcta. Respostas com valores na vizinhança de y = 2.2(1.0174)^{x} são excepcionalmente boas. Para o crescimento exponencial, o número de casas decimais é bastante importante.
7. A estimativa da população em 2000 deverá ser na ordem de 6 biliões. Certifique-se de que os alunos dão as respostas em biliões.
8. Aproximadamente 7.4 biliões. Certifique-se de que os alunos dão as respostas em biliões.
9. Aproximadamente 1.85 biliões. Certifique-se de que os alunos dão as respostas em biliões.

Praticando a Modelação

10. Um modelo razoável será y = 125000(1.1)^{x}.
11. A população em 2000 será aproximadamente de 2,181,000.
12. A população está a crescer aproximadamente 10% por ano.





X	Y1
0	125000
5	201314
10	324218
15	522156
20	840937
25	1.35E6
30	[illegible]

Y1=2181175.28361

EXPLORATIONS

Actividade 6

Modelando o Decrescimento Exponencial Olhando para as Assimptotas

Na actividade anterior, começou o estudo da função exponencial, modelando o crescimento exponencial. Nesta actividade, irá modelar o decrescimento exponencial e aprender algo mais acerca das assimptotas.

Deverá já ter feito a Actividade 5 antes de começar esta.

Modelando uma Experiência: Retirando os Seis

Faça a experiência seguinte. Antes de cada lançamento de dados, registe o número de lançamentos que já efectuou e o número de dados que ficaram para voltar a lançar.

Equipamento Necessário

- TI-83 Plus com o *Transformation Graphing* instalado.
- 36 cubos numerados (dados).

Passos da Experiência

1. Conte o número de dados.
2. Pegue nos dados que ficaram e lance-os.
3. Retire todos os que tiverem voltada para cima a face que tem o 6.

Número de lançamentos	Número de dados que ficaram
0	36
1	

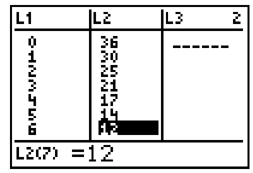
Repita os passos anteriores até já não restarem dados para lançar ou já tenha feito 15 lançamentos, o que ocorrer primeiro.

Resultados Experimentais:

Número de lançamentos	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Número de dados que ficaram	36	30	25	21	17	14	12	11	9	8	6	5	3	3	2	2

Use os dados que recolheu para a sua análise.

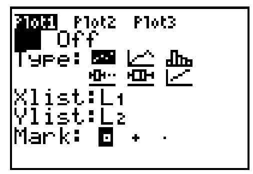
1. Registe os dados numa lista estatística da sua TI-83 Plus. Carregue em [STAT] e seleccione **1:Edit**. Escreva os valores da tabela numa lista vazia do editor estatístico. Limpe duas listas se nenhuma estiver vazia.



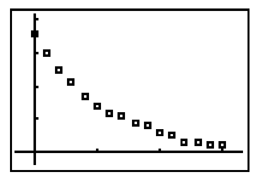
   Nota: Para limpar uma lista, use as teclas do cursor para activar o nome da lista, depois carregue em [CLEAR] [ENTER].

2. Carregue em [Y=] e apague todas as funções.

3. Para visualizar o traçado, carregue em [2nd] [STAT PLOT]. Seleccione **1:Plot1**. Active o traçado e ponha o menu como se ilustra ao lado.



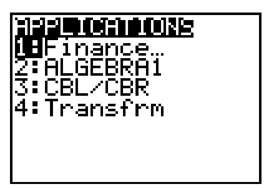
   Carregue em [ZOOM] **9:ZoomStat** para visualizar o traçado.



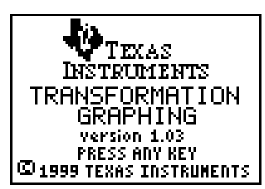
   Observando o traçado, será que um modelo exponencial pode ser razoável? Será que a situação em causa, leva ela própria para um modelo exponencial?

   Sim, deverá estar a deixar de fora cerca de 1/6 dos dados de cada vez que lança, logo parece existir um factor constante de decréscimo. A curva deverá ser pseudo-assimptótica para Y = 0.

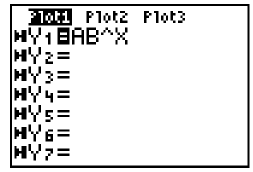
4. Carregue em [APPS] e seleccione o *Transformation Graphing* no número à esquerda de **Transfrm**. Carregue em qualquer tecla (excepto [2nd] ou [ALPHA]) para iniciar o *Transformation Graphing*.



   *Nota: se não vir o écran ilustrado à direita, seleccione **2:Continue**.*



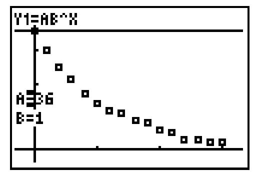
5. No modo **Func**, carregue em [Y=] para visualizar o editor de **Y=**. Escreva a forma genérica da equação da função exponencial, **Y1** = **AB**^{x}. Carregue em [ALPHA] **A** [ALPHA] **B** [^] [X,T,Θ,n].



   Se o modo Play-Pause não estiver seleccionado à esquerda de **Y1** (>| |), carregue em [◄] até o cursor estar em cima do símbolo e depois carregue em [ENTER] até o símbolo correcto ficar seleccionado.

6. Carregue em [GRAPH] para redesenhar o traçado e o gráfico.

7. Escolha um valor apropriado para **A**.

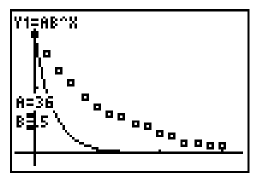


   Se começou com 36 dados, então o ponto (lançamentos = 0, dados restantes = 36) parece ser razoável. O valor de **A** numa função exponencial é o valor da variável dependente, (neste caso o número de dados) quando a variável independente é 0.

   Para começar com A=36, carregue na tecla do cursor “para cima” [▲] até **A**= estar activado. Escreva **3 6** [ENTER].

   Será que a intersecção com o eixo dos y é a apropriada? Se sim, continue. Se não, escreva um novo valor.

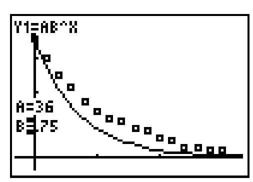
8. Pode fazer uma boa estimativa para **B**, para esta experiência em particular, antes de começar. Comece por supor que não tem qualquer ideia de qual será o valor de **B**. Aqui vai aprender a conjecturar valores para **B** e a introduzi-los no *Transformation Graphing* para confirmação. Quando o modelo já parecer ser razoável, pare de atribuir valores a **B** e confirme a aceitabilidade do valor final.



   Como os dados aparentam ser um exemplo de decrescimento exponencial, **B** tem de estar no intervalo 0 < B < 1. Para começar, seja **B = 0.5**, o valor médio do intervalo.

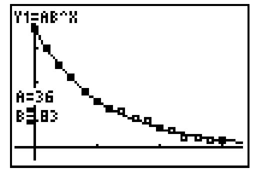
   Carregue em [▼] para activar **B**=. Carregue em [.] **5** [ENTER].

9. Parece-lhe que o seu modelo é razoável? Se sim, corrija **A**. Se não, teste um novo valor para **B**. No exemplo, os dados não parecem decrescer tão depressa quanto o modelo. Por isso, **B** tem de ser superior a 0.5. **B** tem de pertencer ao intervalo 0.5 < B < 1. Como segunda escolha seja **B = 0.75**, o meio do intervalo corrigido.



   Carregue em [.] **7 5** [ENTER]

10. Torne a avaliar o modelo. Se acha que consegue arranjar um modelo melhor, continue até achar que já não consegue melhor. Encontre um valor para **B** com duas casas decimais.



Repetindo, sistematicamente, o método de tentativa e erro, um modelo razoável para os dados experimentais seria $Y = 36(.83)^X$.

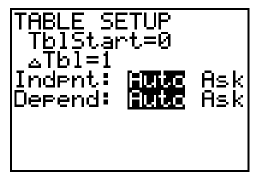
O modelo tem **B=0.83**. Será que este valor faz sentido neste problema? Justifique.

Os dados experimentais nunca alcançaram o zero. Um modelo exponencial nunca alcança 0. Mas, a experiência actual alcança o zero. Como poderemos usar este modelo para estimar quando é que todos os dados já estão retirados, e assim acabar os lançamentos?

Para determinar quando é que já não sobram dados para lançar, determine quando é que **Y< 0.5**. A hipótese é de que enquanto **Y** estiver muito próximo de 1, ficarão sempre dados para voltar a lançar. Quando o seu valor for inferior a 1, vamos supor que não restam dados.

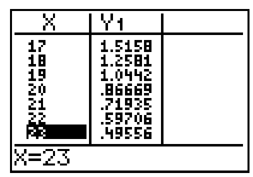
Use a tabela da calculadora para determinar quando é que **Y< 0.5**.

11. Para usar a tabela para determinar quando é que **Y< 0.5**, carregue em [2nd] [TBLSET] para usar o menu do **TABLE SETUP**. Ponha o menu como ilustrado à direita.



12. Carregue em [2nd] [TABLE], de seguida em [▼] para se mover para baixo até que um valor inferior a 0.5 apareça na coluna de **Y1**.

O modelo prevê que sejam necessários 23 lançamentos para retirar todos os dados.



É verdade que um modelo exponencial nunca alcança zero e esta situação fá-lo, mas este modelo é razoável para a situação em causa. Alguns conjuntos de dados dizem-se ser pseudo-assimptóticos para Y = 0. Este é um desses casos.

Nota: A experiência dá um conjunto de dados discretos, mas a função exponencial é um modelo contínuo. Deve ser tido em conta este facto aquando do uso do modelo.

Qual o significado da nota, e, será que o modelo foi devidamente usado?

Modelando a Experiência: Retirando os Seis com "Cubos Especiais" Numerados

Faça a experiência seguinte. Antes de cada lançamento de dados, registe o número de lançamentos que já efectuou e o número de dados que ficaram para voltar a lançar.

Equipamento Necessário

- TI-83 Plus com o *Transformation Graphing* instalado.
- 36 "cubos especiais" numerados fornecidos pelo teu professor.

Passos da Experiência

1. Conte o número de dados.
2. Pegue nos dados que ficaram e lance-os.
3. Retire todos os que tiverem voltada para cima a face que tem o 6.
4. Repita os passos anteriores até já não restarem dados para lançar ou já tenha feito 15 lançamentos, o que ocorrer primeiro.

Número de lançamentos	Número de dados que ficaram
0	36
1	

Resultados Experimentais:

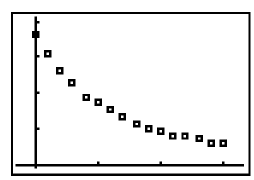
Número de lançamentos	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Número de dados que ficaram	36	31	26	23	19	17	15	13	11	10	9	8	8	7	6	6

Use os dados que recolheu para a sua análise.

Solução

Nota: Instruções que já foram necessárias para a primeira parte desta actividade não serão agora repetidas.

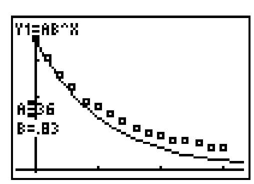
1. Faça a nuvem de pontos correspondente aos dados que obteve.



2. Parece-lhe que uma função exponencial seria um modelo razoável?

   Sim, embora os dados não tenham um comportamento assimptótico para **Y = 0**. Compare este traçado com o traçado dos dados da última actividade. Este conjunto de pontos parece estar mais acima.

3. Active o *Transformation Graphing* e introduza o modelo exponencial genérico, $\mathbf{Y = AB^X}$. Os últimos valores introduzidos para **A** e **B** eram do problema de lançamento de dados anterior. Os dois problemas parecem o mesmo; logo estes valores devem ser razoáveis.



4. O modelo aparenta ser razoável? Nem por isso. Todas as curves de decrescimento exponencial são assimptóticas, mas quer os dados quer o modelo proposto não parecem ter a mesma assimptota. A assimptota dos dados aparenta ser superior à assimptota **Y= 0** dos exemplos anteriores.

   Como os dados tinham todos a face numerada com o 6, a probabilidade parecia estar correcta. O valor **B= 0.83** deverá ser razoável.

   Existem dois métodos possíveis para melhorar o modelo: tentar atribuir valores a **B**, ou tentar diferentes assimptotas a **Y = 0**.

   Observando os exemplos anteriores de decrescimento exponencial, o problema parece ser uma assimptota errada.

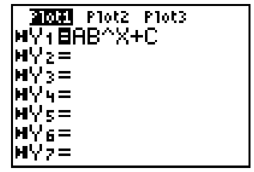
5. A equação de um modelo exponencial com uma assimptota diferente de Y = 0 é $Y = AB^x + C$, onde **C** é o valor da assimptota.

   B mantém-se o factor de crescimento ou de decrescimento.

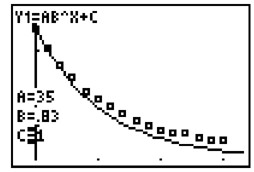
   A é o ponto de partida depois dos ajustamentos para uma assimptota diferente de Y = 0. Mas já não é a intersecção com o eixo dos y. A intersecção com o eixo dos y é agora A + C. Quando X = 0 a equação fica $Y = A + C$, ($B^0 = 1$ para todos os valores de **B**).

   Para este exemplo tem-se $A + C = 36$, já que começámos com 36 dados.

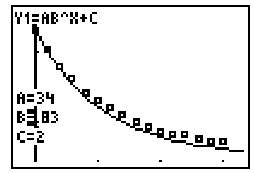
6. Reajuste o seu modelo para $Y = AB^X + C$. Tente combinações de A e de C, com $A + C = 36$.



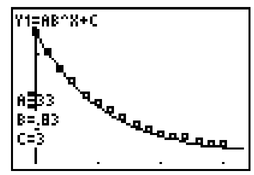
A = 35 C = 1



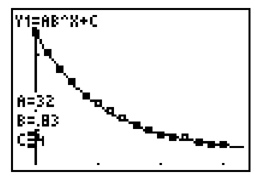
A = 34 C = 2



A = 33 C = 3



A = 32 C = 4



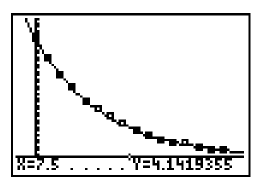
Algum dos reajustes descrevem um modelo razoável? Sim, quando $A = 32$ e $C = 4$.

Neste exemplo, a assimptota será $Y = 4$. O que significa que não importa quantas vezes são lançados os dados, restarão sempre 4.

7. Use a tabela da TI-83 Plus para determinar quando é que o último dado com um 6, é retirado.

Um Método para Visualizar a Assimptota

Com o gráfico e o traçado estatístico visíveis, carregue em [2nd] [DRAW] **3:Horizontal**. Use [▼] para mover a recta horizontal para baixo até lhe parecer que é uma assimptota. Este método dá uma ligeira ideia da localização da assimptota. Poderia ter usado este método para arranjar um valor inicial para **C** quando começou a desenvolver o seu modelo.



Nota: Se existe uma assimptota horizontal isso significa quese conhece o "comportamento no infinito" da função. Com o decaimento exponencial isso observa-se melhor com valores grandes de x.

8. Como explica a existência de uma assimptota diferente de Y = 0?

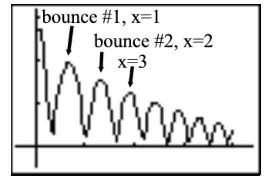
Trabalho para casa

Nome ___________________________

Data ___________________________

Os dados para esta actividade vêm dos dados recolhidos na Actividade 4. Se guardou os dados da bola saltitante da Actividade 4, recarregue-os novamente. Se não os guardou, refaça a recolha de dados da Bola Saltitante.

O conjunto de dados formado pelo número de ressaltos e pela altura máxima atingida pela bola em cada ressalto pode ser modelado por uma função exponencial. Percorra o conjunto de dados e registe o que lhe parece ser o máximo de cada ressalto. Guarde os pontos como (número de ressaltos, altura do ressalto).



1. Quando percorreu os dados, conseguiu encontrar o verdadeiro máximo de cada ressalto?

2. Qual é a assimptota para a experiência da Bola Saltitante?

3. Procure um modelo para este novo conjunto de dados.

Notas para Professores

Os objectivos destas actividades são:

- Reforçar o significado dos parâmetros a e b da equação exponencial genérica, $y = ab^x$.
- Introdução da forma de uma assimptota diferente de Y = 0 para uma função exponencial, $y = ab^x + c$.
- Dar aos alunos a capacidade de usar metodicamente o *Transformation Graphing* como uma ferramenta de modelação.
- Dar aos alunos um exemplo de uma situação em que um modelo contínuo pode ser usado para uma experiência discreta.
- Dar aos alunos uma segunda oportunidade de estudarem as assimptotas, em particular as assimptotas diferentes de Y = 0.

A primeira actividade, é quase inteiramente trabalhada com uma amostra de dados que dá aos alunos a primeira oportunidade de verem como se faz modelação com o *Transformation Graphing*. Os alunos deverão repetir esta experiência, em pequenos grupos, usando os mesmos passos mas com os seus próprios dados. Isto permitirá uma discussão bastante proveitosa, já que cada grupo tem um conjunto de dados diferente.

A primeira parte desta actividade introduz a ideia de dados discretos tratados como variável contínua. Este conceito é muito importante e deve dar-se-lhe o devido ênfase.

A amostra de dados foi cuidadosamente recolhida? Será conveniente o uso de dados equilibrados para a obtenção de um bom conjunto de observações. Pelo que os alunos devem certificar-se de que os dados não estão viciados.

Esta actividade dá ao aluno a capacidade de usar a modelação para tentar compreender determinada situação, e não a de verificar se os dados se ajustam à situação.

Equipamento para a Experiência 2

Os alunos vão precisar de alguns dados que não tenham o número seis inscrito nas faces. O professor deverá decidir quantos dados não terão 6 e quantos desses dados vão ser distribuídos por cada grupo.

- Esse tipo de dados pode ser encontrado em lojas de material didáctico ou em lojas de jogos. Os melhores serão aqueles que têm as faces numeradas de 1 a 5 com um dos números a aparecer duas vezes.
- Uma segunda maneira de obter esses dados, é fazê-los a partir de cubos que podem ser comprados em lojas de materiais para festas ou em lojas de materiais para matemática. Esses cubos são chamados de cubos numerados, e o próprio professor é que inscreve nas faces, os números. Se optar por este método, inscreva os números de 6 a 11 na maioria dos dados, e os números de 7 a 12 só em alguns.

- Uma outra maneira e usando os dados iniciais/normais seria a de colocar pontos coloridos nas faces. Use 6 cores diferentes e diga aos alunos para só retirar o dado quando a face com o ponto azul ficar voltada para cima. Certifique-se de que alguns dados não têm o ponto azul mas que a maioria tem apenas um ponto azul.
- Também pode construir os dados com uma massa de moldar, a qual pode ser adquirida em lojas de material didáctico (em particular, para a primeira infância) ou em lojas/atelier de Artes Decorativas. Aconselha-se uma massa que fique homogénea, que endureça bem, mesmo que tenha de ser cozida em forno caseiro
- Assegure-se de que os seus alunos observam todos os gráficos de decrescimento exponencial de modo a poderem visualizar a diferença entre uma assimptota incorrecta e um valor não apropriado para **b**.

Em ambas as experiências os alunos vão provavelmente parar antes de todos os dados terem sido retirados. Depois de terem previsto quantos lançamentos serão necessários para que todos os dados sejam retirados, faça-os continuar a partir do ponto em que tinham parado o processo. Lembre-se que a segunda experiência não chega a zero. Eles lançam até que, no nosso exemplo, restem quatro dados.

A segunda actividade pode ser feita sem que os alunos saibam as características do conjunto de "dados especiais." Fazer a experiência "às cegas" dá a oportunidade de realmente investigar. Pode dar a grupos diferentes, diferentes misturas do conjunto de "dados especiais." Um grupo pode ter 4 dados sem o seis, enquanto outro grupo só tem 2. Isto vai permitir o aparecimento de diferentes assimptotas diferentes de Y = 0.

Actividade Práctica com o CBL

Uma boa actividade com o CBL que pode ser feita como um seguimento desta Actividade é a que se segue, *experiência M5: Arrefecimento do Café, que* pode ser encontrada no *Livro de Instruções do CBL*™. Esta actividade pode também ser retirada da Internet fazendo download grátis do site da Texas Instruments em **education.ti.com**.

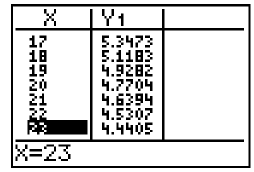
Respostas

Modelando uma Experiência: Retirando os Seis

10. **B** é o factor ou taxa de crescimento ou de decrescimento. B mostra que percentagem dos dados deve restar após cada lançamento. Uma vez que existem 6 faces possíveis e só uma tem o número 6 inscrito, a probabilidade de que um dado não seja retirado é de 5/6. Logo, 5/6 dos dados vão ficar para voltar a lançar após cada lançamento. 5/6 = 0.83, ou seja, 83%, que é a percentagem que deverá ter estimado.

Modelando a Experiência: Retirando os Seis com "Cubos Especiais" Numerados

7. Para esta amostra, cerca do 23º lançamento, será retirado o último dado com um seis.



8. Alguns dos dados não tinham seis. Na amostra, tinham-se 32 dados com 6 e quatro dados sem 6. Portanto, quarto dados nunca serão retirados.

Trabalho para casa

1. Não tem necessariamente o máximo, mas tem um valor próximo do máximo. Não suponha que há alguma propriedade especial para algum ponto recolhido pelo CBR.
2. A assimptota é 0. A bola vai eventualmente parar de saltar. É realmente uma pseudo assimptota.
3. As respostas vão variar dependendo do conjunto de dados que está a ser usado.

EXPLORATIONS

Apêndice

Instruções usualmente utilizadas para ajustar uma curva a um conjunto de dados

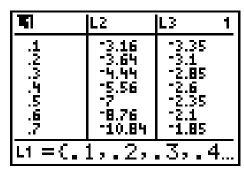
Esta secção é dedicada à familiarização com as instruções básicas necessárias para realizar as actividades propostas neste livro.

Inserindo Dados

Os Dados são inseridos e vistos a partir do editor de listas estatísticas. Para inserir os dados:

1. Carregue em [STAT] **1:Edit**. Este procedimento leva-o até ao editor de listas estatísticas.

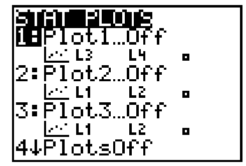
2. Se existirem alguns dados nas listas que pretende usar, tem que primeiro limpar essas listas. Para fazer isto, mova o cursor para cima do nome da lista que pretende limpar, verá que o nome dessa lista ficou realçado a escuro. Carregue em [CLEAR] [ENTER] para apagar o conteúdo da lista. Repita estes passos para todas as listas que pretender limpar.



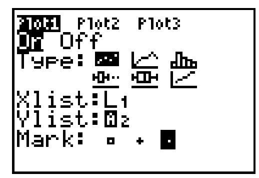
3. Quando tiver as listas limpas, mova o cursor para a lista onde pretende colocar os dados e insira os números um de cada vez. Certifique-se de que carrega em [ENTER] após ter inserido cada número. Quando tiver acabado de colocar os dados numa lista, mova o cursor para a próxima e comece a inserir novamente os dados.

Visualizando uma nuvem de pontos (Scatter-Plot)

Assumimos que já inseriu os dados nas listas.



1. Carregue em [2nd] [STAT PLOT] para visualizar o menu de gráficos estatísticos (**STAT PLOTS**).
2. Desactive todos os gráficos estatísticos que estiverem activados seleccionando **4:PlotsOff** e carregando em [ENTER].
3. Se tiver que desactivar algum gráfico estatístico (**STAT PLOTS**) no passo 2, carregue em [2nd] [STAT PLOT] outra vez.
4. Carregue em **1** para activar o menu do gráfico estatístico 1 (**Plot1**).

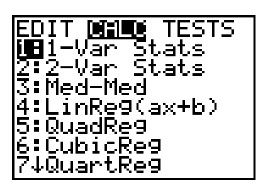


5. Use o cursor para se mover para cima de cada objecto seleccionado. Carregue em [ENTER] para colocar o écran da sua calculadora como o da direita. Quando o cursor estiver sobre **Xlist**, carregue em [2nd] [L1] e depois mova o cursor para a **Ylist** e carregue em [2nd] [L2].
6. Quando o écran da sua calculadora já estiver igual ao da direita, carregue em [ZOOM] **9:ZoomStat** para exibir o gráfico da nuvem de pontos correspondente aos dados que se encontram nas listas 1 e 2.

Ajustando uma Curva a um Conjunto de Dados

Nota: Nas minhas aulas os alunos não estão autorizados a usar as regressões pré-definidas na calculadora, sem antes:

- terem ajustado o mesmo tipo de curva usando outros métodos, e
- terem percebido (ou pelo menos terem discutido) como é que a calculadora faz cada ajustamento.

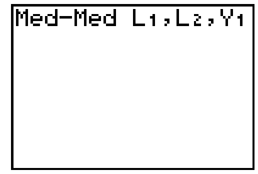


1. Carregue em [STAT] [▸] para aceder ao menu estatístico (**STAT**, **CALC**). Este menu mostra o tipo de curvas que a calculadora usa para ajustar um modelo a um conjunto de dados.
2. Carregue no número correspondente ao tipo de curva que quer ajustar aos dados.

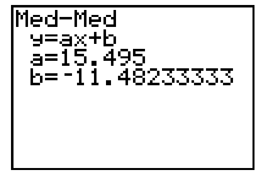
3	Regressão **"Med-Med"**	**9**	Regressão Logarítmica
4	Regressão Linear	**0**	Regressão exponencial
5	Regressão Quadrática	**A**	Regressão Hiperbólica
6	Regressão Cúbica	**B**	Regressão Logística
7	Regressão Quártica	**C**	Regressão Sinusoidal
8	Regressão Linear na forma (a +bx)		

Por exemplo, se quiser ajustar uma regressão "**Med-Med**" a um conjunto de dados deve seleccionar **3:Med-Med**. Esta instrução trá-lo de volta ao écran principal da calculadora mostrando o tipo de regressão seleccionado e o cursor piscando aguardando mais instruções.

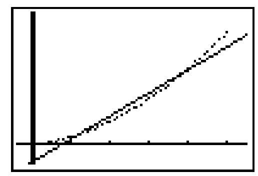
3. Necessita de dizer à calculadora quais as duas listas onde se encontram os dados que deseja ajustar uma equação e onde quer guardar a equação assim obtida. se quiser x = L1, y = L2, e que a equação seja guardada em Y1 necessita de carregar em: [2nd] [L1] [,] [2nd] [L2] [,] [VARS] [▸] **1:Function 1:Y1**.



4. Quando carregar em [ENTER], o écran mostra a equação particular desta família de funções que melhor ajusta este conjunto de dados.

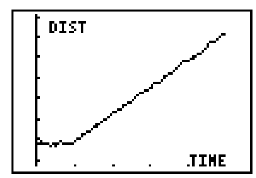


5. Carregue em [ZOOM] **9:ZoomFit** e a nuvem de pontos correspondente a estes dados será mostrada com a curva encontrada sobreposta.



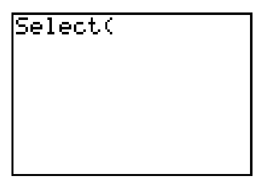
Uso da Instrução Select(na TI-83

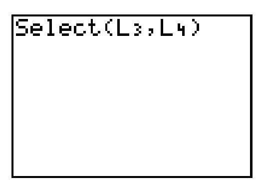
Estes dados representam razoavelmente o que poderia ser a distância de uma pessoa a afastar-se do CBR. Os dados mostram duas partes. A primeira, quando a pessoa ainda não começou a andar. A segunda quando a pessoa realmente começa a caminhar. Vamos supor que só pretende trabalhar com a segunda parte dos dados.



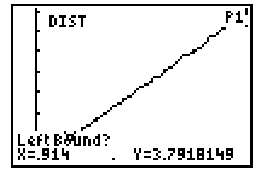
Os dados estão representados em L1, L2. Vamos seleccionar a segunda parte dos dados e colocá-los em L3 e L4.

1. Carregue em [2nd] [LIST] [▸] **8:Select(**. Agora escreva o nome das listas onde pretende colocar os dados seleccionados. Para usar L3, L4, carregue em [2nd] [L3] [,] [2nd] [L4] [)] [ENTER].

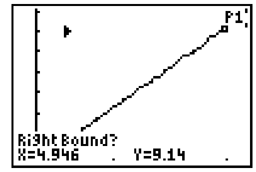


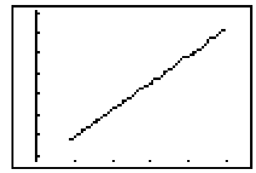


2. Para realmente seleccionar a parte do gráfico que vai usar, carregue em [▶] para se mover para o extremo esquerdo dos dados que pretende e carregue em [ENTER]. Assim fica seleccionado o inicio do trajecto.



   Mova-se para o extremo direito dos dados e carregue em [ENTER]. Isto vai seleccionar os dados que pretende, colocá-los em L3 e L4, e, mostra a nuvem de pontos correspondente a estes dados.

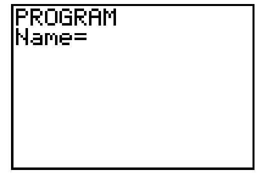




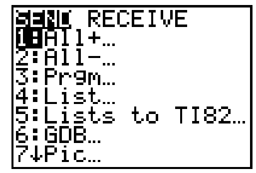
Instruções para Ligar Duas Calculadoras TI-83

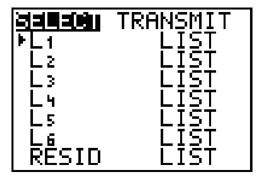
Ligue duas calculadoras pelo cabo calculadora a calculadora. Empurre bem os cabos de modo a que a conexão fique bem feita.

1. Na calculadora que vai receber os dados carregue em: [2nd] [LINK] [▸] para visualizar o menu "receber." Carregue em **1** para seleccionar **1:Receive**. Aparecerá a mensagem **Waiting…**.

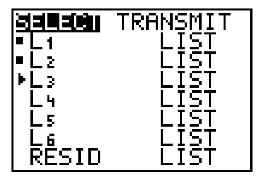


2. Na calculadora que vai enviar carregue em: [2nd] [LINK] para visualizar o menu "enviar." Carregue no número que está antes do tipo de objecto que pretende enviar. Para este exemplo, suponha que pretende enviar **L1** e **L2**. Para o fazer, carregue em **4:List**.

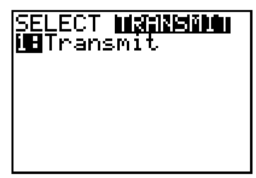




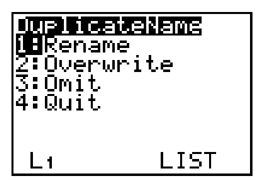
3. Carregue em [▾] para andar para baixo na lista, carregando em [ENTER] quando estiver atrás de cada item que quer enviar. No nosso exemplo, necessita de carregar em [ENTER] atrás de **L1** e de **L2**. Os itens seleccionados aparecem com uma caixa sombreada atrás.



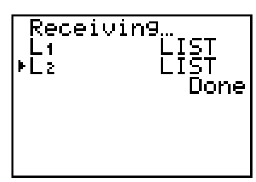
4. Quando tiver seleccionado todos os itens que pretende, carregue em [▸] para mover o cursor para o lado direito do écran onde encontra o menu TRANSMIT. Carregue em [ENTER]. Este procedimento inicia a transmissão.



5. Olhe para o écran da calculadora que está a receber. Se esta já tiver um objecto com o mesmo nome, verá uma mensagem avisando-o que está a tentar duplicar um objecto. Carregue em **2:Overwrite** para substituir o objecto existente pelo novo objecto que está a tentar transmitir. Se quiser ficar com o objecto já existente carregue em **4:Quit**, depois renomeie o objecto já existente e recomece o processo outra vez.



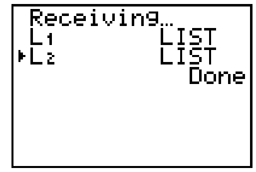
6. Quando os dados já estiverem todos transmitidos, verá a mensagem **DONE**.



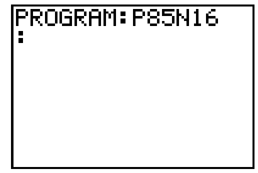
Colocando Dados num Programa

Nota: Estas instruções assumem que os dados já se encontram nas listas L1 e L2.

1. Carregue em [PRGM] [▸] [▸] [ENTER].



2. Digite o nome que quer dar ao programa e carregue em [ENTER].

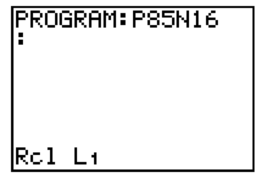


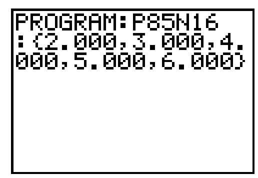
3. Carregue em [2nd] [RCL] [2nd] [L1] [ENTER] [2nd] [RCL] [2nd] [L1] [ENTER].

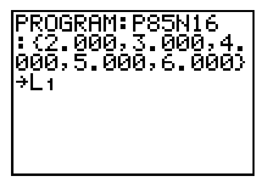
   Esta instrução chama os dados da lista L1 e coloca-os no seu programa.

   Carregue em [2nd] [RCL] [2nd] [L2] [ENTER] [2nd] [RCL] [2nd] [L2] [ENTER].

   Esta instrução chama os dados da lista L2 e coloca-os no seu programa.







4. Carregue em [2nd] [QUIT] para sair.

   Assim terminará a versão mais simples do programa. Os dados estão colocados no programa. Quando o programa for executado os dados serão recolocados em L1 e L2.

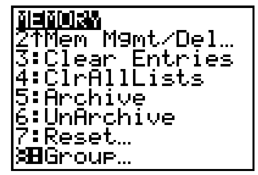
TI-83 Plus Grupos e Arquivos

Guardando objectos em Grupos

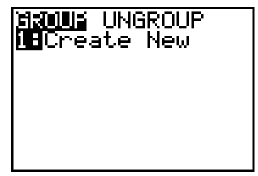
Acabou a aula em que usou o CBL com o programa (BALLDROP) para recolher dados de objectos em queda livre. Os dados estão em L1 e L2. Ajustou um modelo aos dados em (Y1) e está para dar o toque de saída. Necessita de apagar toda esta informação da sua calculadora para a deixar preparada para a próxima aula.

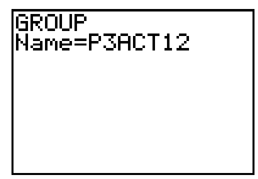
As suas opções são ou recorre a um computador para guardar tudo, ou guarda na memória de arquivo, como grupo, da sua TI-83 Plus.

1. Carregue em [2nd] [MEM] **8:Group**

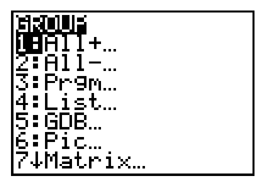


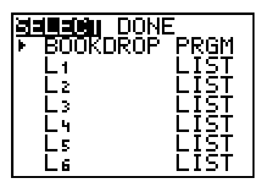
2. Seleccione **1:Create New** e escreva o nome que quer dar à totalidade dos dados que quer salvar. Neste exemplo, eu dei o nome **P3ACT12** para o período 3 actividade 12. Carregue em [ENTER].



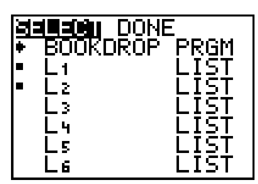


3. Seleccione o que quer salvar com este nome. Isto faz o mesmo que o TI-GRAPH LINK. Como estou a guardar três tipos diferentes de objectos (listas, equações e programas), eu carreguei em **2:All-.**



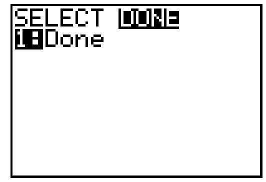


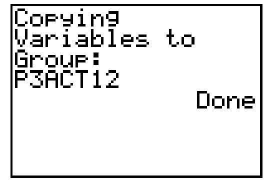
4. Mova o cursor até às listas, carregando em [ENTER] ao lado de qualquer um dos objectos que queira guardar, quando já estiverem seleccionados o símbolo ▸ irá mudar para ▪ .



5. Quando acabar a sua sselecção, carregue em [▸] e [ENTER]. Acabou.

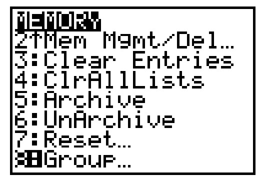
   O grupo **P3ACT12** está agora salvo na memória de arquivo.

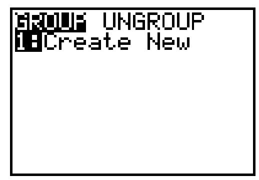




Desagrupando

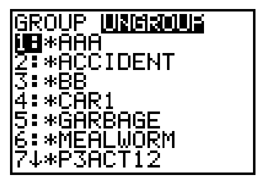
1. Carregue em [2nd] [MEM] **8:Group**.





2. Carregue em [▸] para seleccionar **UNGROUP**.

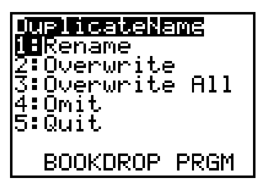
   Nota: o ***** *antes do nome significa que os objectos estão na memória de arquivo não na RAM.*

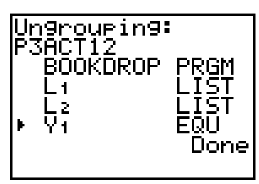


3. Carregue em [▾] para baixar o cursor até ao grupo que necessita. Carregue em [ENTER] quando estiver ao lado do objecto que quer desagrupar.

   Se o objecto já estiver na RAM, seleccione **2:Overwrite** [ENTER].

   Nota: Antes de desagrupar, certifique-se que agrupou o que quer que estivesse na memória e que queria guardar.





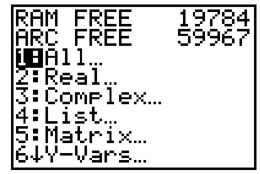
Arquivar ou não Arquivar

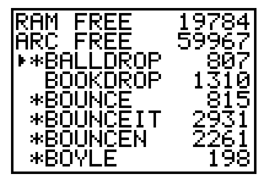
1. Carregue em [2nd] [MEM] **2:Mem Mgmt/Del**.

2. Carregue em [▼] para baixar o cursor e seleccionar o tipo de objecto que vai arquivar ou desarquivar.

   Por exemplo, no caso dos programas, carregue em **7:Prgm**.

   Está agora a ver uma lista de todos os programas. Os que estão marcados com uma ***** estão já arquivados e portanto não ocupam memória RAM. Os que não têm ***** estão na memória RAM. Para mudar de Arquivar para Desarquivar, mova o cursor até ao objecto que quer desarquivar e carregue em [ENTER].





Quando um objecto não está arquivado pode ser usado, caso contrário não o poderá usar.

Nota 1: Ungrouping desarquiva os objectos no grupo. Grouping cria uma cópia arquivo dos objectos.

Nota 2: Uma aplicação pode correr sem que seja desarquivada.

