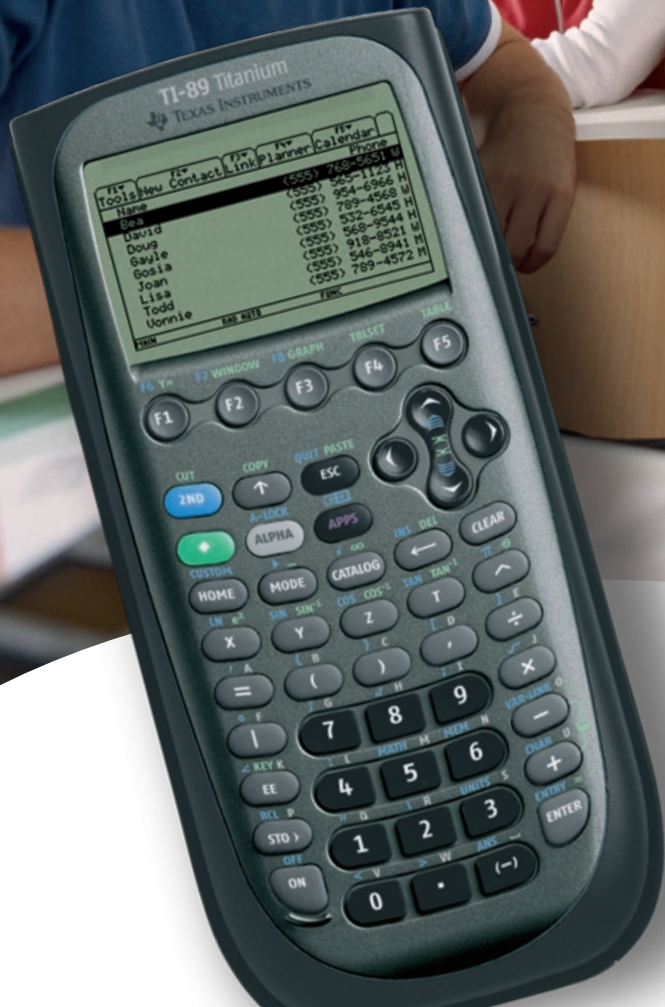


Undersök, upptäck och verifiera med
TI-89 Titanium

Lars Jakobsson



 **TEXAS
INSTRUMENTS**
TI Technology – Beyond Numbers

Innehåll

FÖRORD	1
TRÅKIGT MEN VIKTIGT - INTRODUKTION	2
<i>Funktionstangenterna F1-F5</i>	2
<i>Ändring av inställningar</i>	2
<i>Mjukstart</i>	3
<i>Redigera ett uttryck</i>	3
<i>Mera om redigering</i>	4
<i>Tilldelning</i>	4
GRUNDLÄGGANDE EXEMPEL MED EKVATIONER, FUNKTIONER OCH GRAFER	6
<i>Grafritning och kommandona solve, factor, Define</i>	6
<i>Uppgifter</i>	7
<i>Kommandona differentiate, zero, Maximum och cSolve</i>	7
<i>Uppgifter</i>	10
<i>Kommandona integrate och deSolve</i>	10
<i>Uppgifter</i>	11
LITE DISKRET MATEMATIK OCH MODELLERING	12
<i>Fakultet, permutationer och kombinationer</i>	12
<i>Uppgifter</i>	13
<i>Listhantering och statistisk plottning</i>	13
<i>Uppgifter</i>	16
SUMMOR OCH SERIER	17
<i>Uppgifter</i>	17
NUMERISK LÖSNING AV DIFFERENTIALEKVATIONER, RIKTNINGSFÄLT	18
<i>Uppgifter</i>	18
PROBLEMLÖSNING	19
<i>Undersök, upptäck och verifiera</i>	19
<i>Uppgifter</i>	21
NÅGRA LÖSNINGAR	24
SLUTORD	32

Förord

Detta instruktionsmaterial är uppbyggt kring ett antal matematikuppgifter och är indelat i avsnitt baserat på det matematiska innehållet. Ett inledande avsnitt innehåller en hel del väsentlig information, som behövs för att förstå hur räknaren kan användas rent tekniskt. Varje följande avsnitt inleds med en kort inledning med presentation av använda funktioner och kommandon, följt av uppgifter. Urvalet av uppgifterna är baserat på innehållet i de olika kurserna i gymnasieskolan. Lösningar ges till alla uppgifter utom de som finns i avsnittet problemlösning.

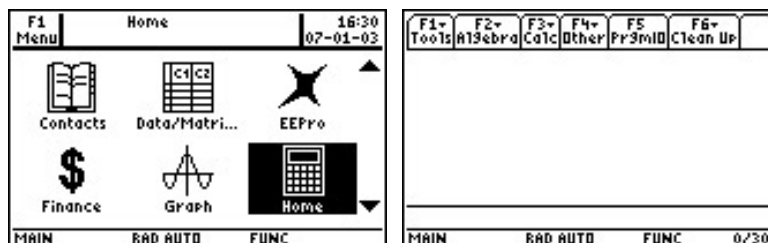
Eftersom TI-89 Titanium är ett CAS-verktyg (Computer Algebra System) och alltså är symbolhanterande kan läraren i framtiden presentera nya typer av uppgifter för eleverna. Dessa kan i stor utsträckning baseras på problemlösning. Detta gör att en större grupp av elever än tidigare kan hantera komplexa problem med stöd av räknaren. Just det vill jag exemplifiera i detta instruktionsmaterial.

Löddeköpinge i januari 2007

Lars Jakobsson

Tråkigt men viktigt - introduktion

När räknaren startas med ON-tangenten öppnas applikationsfönstret (vänstra bilden). Bläddra fram Home och tryck ENTER eller tryck på tangenten HOME på tangentbordet. Om räknaren inte tidigare använts visas ett tomt huvudfönster (högra bilden).



Funktionstangenterna F1-F5

Högst upp under skärmen finns de sex menyerna F1-F6. Med hjälp av de fem funktionstangenterna F1-F5 kommer du åt dessa olika menyer.

För att öppna F6-menyn behöver du först trycka på 2nd-tangenten sedan F1. Detta framgår av texten över tangenten F1 på tangentbordet. Om du öppnade menyn kan du stänga den igen utan att göra något val genom att trycka antingen ESC-tangenten eller HOME-tangenten.

Det finns ytterligare en meny som kan nås med F1-tangenten, nämligen funktionseditorn, Y=. Denna meny når du genom att trycka först på RUTER-tangenten sedan F1. Om du öppnade funktionseditorn kan du återvända till huvudfönstret genom att trycka på HOME-tangenten.

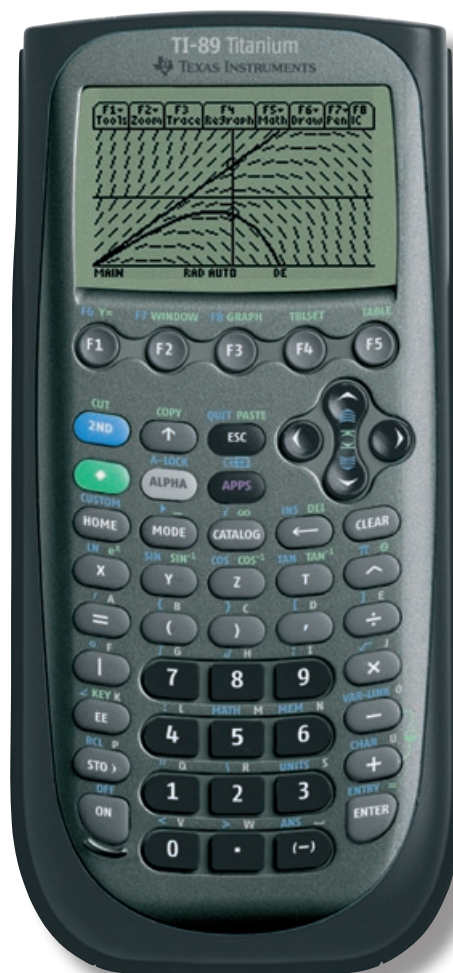
Ändring av inställningar

Skulle du vilja ändra inställningar på räknaren trycker du på MODE-tangenten och möts då av följande fönster:



Du kan göra val genom att använda piltangenterna. Efter att ha öppnat en valmeny kan du återvända utan att ändra något, antingen genom att trycka ESC-tangenten eller trycka ENTER på det aktuella valet. Om du vill göra en ändring ställer du markören på det önskade alternativet och trycker ENTER.

För att bläddra mellan de tre fönstren med inställningsval kan du antingen använda F1-F3 eller piltangenterna. Det är möjligt att byta språk på räknaren. Även svenska finns som en nedladdningsbar applikation. I detta material används engelska som språkval.

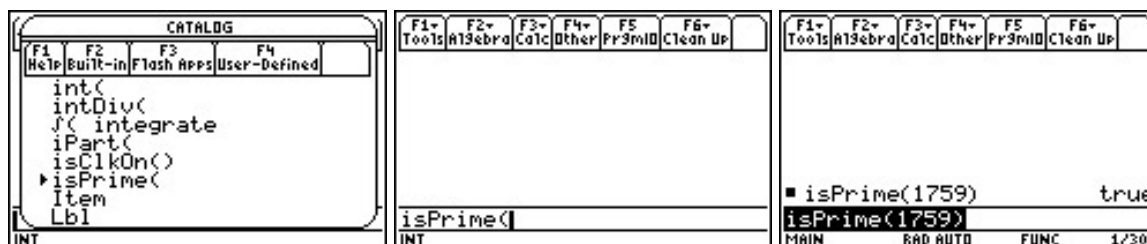


Om du gör ändringar i inställningarna måste du bekräfta ändringarna med ENTER då du lämnar MODE-menyn annars kan du använda ESC-tangenten. Allt detta framgår av skärmen.

Mjukstart

Genom att trycka på CATALOG-tangenten får du tillgång till samtliga funktioner i räknaren. Du kan bläddra med piltangenterna, alternativt snabbflytta genom att trycka på den inledande bokstaven i instruktionen (utan att först trycka på ALPHA, detta val sker automatiskt).

Anta att du vill undersöka om talet 1759 är ett primtal. Funktionen kallas isPrime. Tryck därför först på bokstaven I (9-tangenten) och bläddra sedan ner till isPrime. (vänstra bilden). Genom att trycka ENTER kopieras funktionen till inmatningsraden (mellersta bilden). Sedan skrivs talet med avslutande parentes. Genom att trycka ENTER får du svaret (högra bilden).



Vi kan naturligtvis undersöka detta också genom att faktorisera talet 1759. Det går att hitta factor i katalogen som vi gjorde med isPrime, men många av de kommandon, som används ofta, är lättare tillgängliga i de olika menyerna F1-F6. I det här fallet använder du lämpligen F2-menyn (Algebra-menyn). Se vänstra bilden nedan.

Kopiera kommandot till inmatningsraden med ENTER. Du behöver inte först radera det som står där, om det är markerat (se bilden). Det som står där skrivs nämligen i så fall automatiskt över. Skulle det inte vara markerat (t ex om att du flyttat markören på inmatningsraden med piltangenterna), så tömmer du raden först med CLEAR-tangenten.

Eftersom räknaren svarar med talet självt går det inte att faktorisera (högra bilden).



Redigera ett uttryck

Anta att du nu skulle vilja faktorisera talet 1760. Det är då bekvämt att kunna redigera det uttryck som redan finns.

Gör då så här: tryck först på pil-höger-tangenten. Uttrycket är nu inte längre markerat. Flytta sedan markören med pil-vänster-tangenten, så att den befinner sig omedelbart till höger om talet 1759. Tryck på RADERA-tangenten (mellan CATALOG och CLEAR) två gånger. (vänstra bilden nedan). Skriv sedan 60 och tryck ENTER. Resultatet av faktoriseringen dyker då upp (se bild till höger). Observera dels att räknaren normalt arbetar i inskjutnings-mode, dvs flyttar efterliggande tecken framför sig, dels att du inte behöver ställa markören vid radslut för att utföra kommandot. Markören kan stå var som helst i inmatningsraden.

F1+	F2+	F3+	F4+	F5	F6+
Tools	Algebra	Calc	Other	Pr3mID	Clean Up
■ isPrime(1759) true ■ factor(1759) 1759 ■ factor(1760) $2^5 \cdot 5 \cdot 11$ ■ factor(1760)					
MAIN		RAD AUTO		FUNC 2/30	

F1+	F2+	F3+	F4+	F5	F6+
Tools	Algebra	Calc	Other	Pr3mID	Clean Up
■ isPrime(1759) true ■ factor(1759) 1759 ■ factor(1760) $2^5 \cdot 5 \cdot 11$ ■ factor(1760)					
MAIN		RAD AUTO		FUNC 3/30	

Mera om redigering

Skriv in $(a+b)^2$ på inmatningsraden och tryck ENTER. För att kunna mata in bokstäverna trycker du först på ALPHA-tangenten och sedan den aktuella tangenten för bokstaven (för a blir det ALPHA sedan =). Vill du se uttrycket utvecklat? Välj då F2-menyn och bläddra ner till expand. Kopiera till inmatningsraden.

F1+	F2+	F3+	F4+	F5	F6+
Tools	Algebra	Calc	Other	Pr3mID	Clean Up
■ isPrime(1759) true ■ factor(1759) 1759 ■ factor(1760) $2^5 \cdot 5 \cdot 11$ ■ $(a+b)^2$ $(a+b)^2$ ■ $(a+b)^2$					
MAIN		RAD AUTO		FUNC 4/30	

F1+	F2+	F3+	F4+	F5	F6+
Tools	Algebra	Calc	Other	Pr3mID	Clean Up
1: solve(2: factor(3: expand(4: zeros(5: approx(6: comDenom(7: propFrac(8: lnSolve(					
MAIN		RAD AUTO		FUNC 4/30	

F1+	F2+	F3+	F4+	F5	F6+
Tools	Algebra	Calc	Other	Pr3mID	Clean Up
■ isPrime(1759) true ■ factor(1759) 1759 ■ factor(1760) $2^5 \cdot 5 \cdot 11$ ■ $(a+b)^2$ $(a+b)^2$ ■ expand($(a+b)^2$)					
MAIN		RAD AUTO		FUNC 4/30	

Nu är det dags att utnyttja de "historiska paren", dvs det tidigare inskrivna. Tryck pil-upp-tangenten antingen endast en eller två gånger. I detta fall spelar det ingen roll eftersom markören i båda fallen hamnar på samma uttryck. (I vänstra bilden nedan har pil-upp-tangenten använts två gånger.) Tryck ENTER för att kopiera till inmatningsraden. Observera att funktionen expand sätter en vänsterparentes. Detta innebär att du måste sätta en högerparentes innan du trycker ENTER. Om du glömmer det, får du ett felmeddelande med anvisning hur du ska komma vidare. Prova gärna! Efter korrekt parentessättning dyker det utvecklade binomet upp på skärmen.

F1+	F2+	F3+	F4+	F5	F6+
Tools	Algebra	Calc	Other	Pr3mID	Clean Up
■ isPrime(1759) true ■ factor(1759) 1759 ■ factor(1760) $2^5 \cdot 5 \cdot 11$ ■ $(a+b)^2$ $(a+b)^2$ ■ expand($(a+b)^2$)					
MAIN		RAD AUTO		FUNC 1/4	

F1+	F2+	F3+	F4+	F5	F6+
Tools	Algebra	Calc	Other	Pr3mID	Clean Up
■ isPrime(1759) true ■ factor(1759) 1759 ■ factor(1760) $2^5 \cdot 5 \cdot 11$ ■ $(a+b)^2$ $(a+b)^2$ ■ expand($(a+b)^2$)					
MAIN		RAD AUTO		FUNC 4/30	

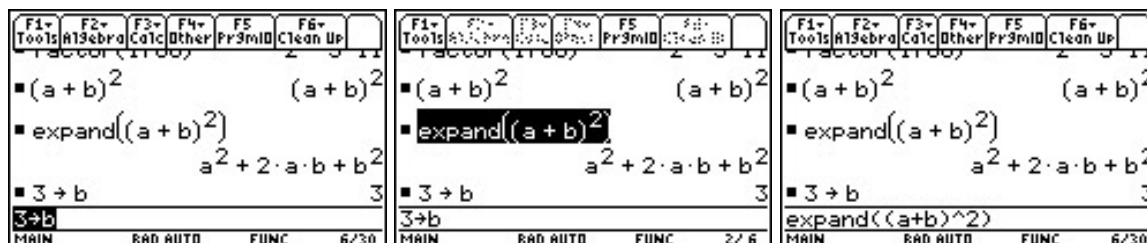
F1+	F2+	F3+	F4+	F5	F6+
Tools	Algebra	Calc	Other	Pr3mID	Clean Up
■ factor(1760) $2^5 \cdot 5 \cdot 11$ ■ $(a+b)^2$ $(a+b)^2$ ■ expand($(a+b)^2$) ■ expand($(a+b)^2$)					
MAIN		RAD AUTO		FUNC 5/30	

Att använda "historiska par" är mycket arbetsbesparande. Fler övningsstillfällen kommer senare.

Tilldelning

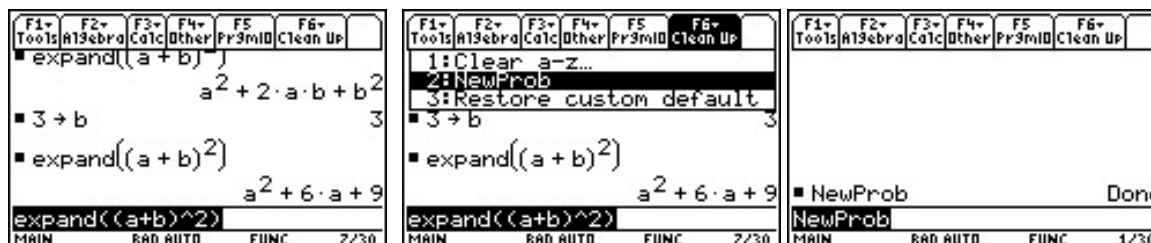
Det går att binda en variabel, dvs att lagra ett tal eller en funktion i en variabel. I detta avsnitt följer en kort beskrivning av hur detta sker och vilka konsekvenser det får.

Skriv 3 STO B. STO-tangenten finns till vänster på tangentbordet precis över ON-tangenten. Studera sedan vad som händer då du utvecklar $(a+b)^2$. Utnyttja de historiska paren för att hämta $\text{expand}((a+b)^2)$, för att spara arbete. Se bilderna som följer.



Är resultatet förvånande? Konsekvensen av tilldelningen blir att variabeln b nu är en konstant med värdet 3 och kommer att ersättas med 3 om den används i fortsättningen.

Det är därför viktigt att ta bort sådana bindningar när det är dags för ett nytt problem. Ett praktiskt sätt att göra detta på är att använda NewProb, new problem, som finns i F6-menyn. Kopiera kommandot till inmatningsraden och tryck ENTER.



Alla historiska par försvann och lagrade värden är nu borta. Studera gärna statusraden vid skärmens nedre del. Längst till höger kan du i senaste bilden läsa 1/30. Detta visar att det finns ett historiskt par nämligen NewProb och Done. I mittenbilden får du informationen 7/30. Här finns alltså 7 historiska par. Vad händer då, när antalet historiska par blir 30? Inget dramatiskt. De tidigaste kommer att kastas ut efter hand som nya tillkommer.

På statusraden kan du också utläsa att räknaren är inställd på vinkelmåttet radianer (RAD) och att den är i funktions-mode (FUNC), y som funktion av x, när det gäller grafitrning. Texten AUTO avslöjar att räknaren kommer att evaluera uttryck exakt om så är möjligt annars approximativt. Slutligen visar MAIN vilket bibliotek (folder) som är aktivt i händelse att något sparas. Förändringar av dessa inställningar gör du vid behov genom att trycka på MODE-tangenten, så som visats ovan.

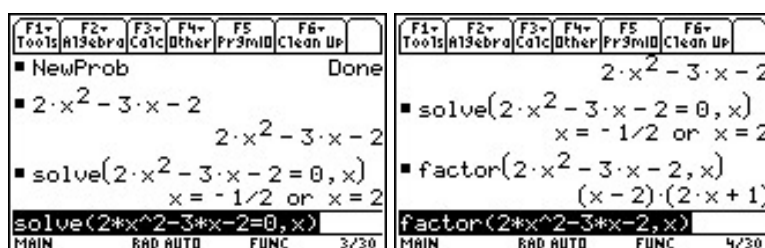
Därmed är det dags att komma till skott!

Grundläggande exempel med ekvationer, funktioner och grafer

I de tre inledande uppgifterna kommer du att möta funktioner som finns i Algebra-menyn (F2). Dessutom kommer du att se hur funktioner kan definieras i funktionseditorn.

Grafritning och kommandona solve, factor, Define

För att lösa andragradsekvationen $2x^2 - 3x - 2 = 0$ ska du så småningom välja Solve i F2-menyn. Men först kan vara praktiskt att skriva in uttrycket i vänstra ledet, $2x^2 - 3x - 2$, separat. Sedan väljer du F2, solve, kopierar kommandot till inmatningsraden, hämtar vänsterledet bland de historiska paren och avslutar med $=0$. Observera syntaxen med avslutande "komma" x, som anger aktuell variabel i Solve-kommandot. De historiska paren utnyttjas sedan för att lösa ekvationen $2x^2 - 3x - 2 = 0$, för att faktorisera $2x^2 - 3x - 2$ och för att rita funktionen $y = 2x^2 - 3x - 2$.

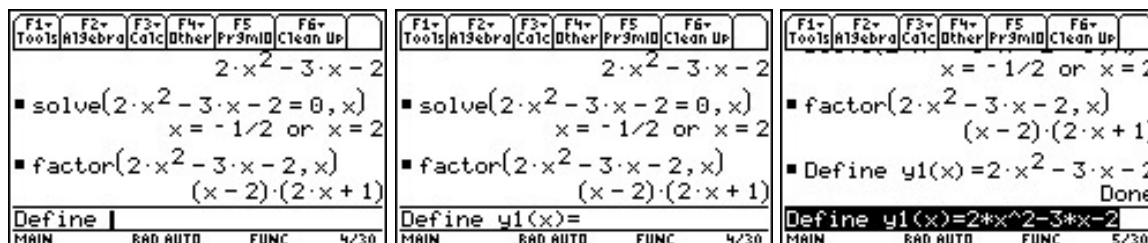


Observera syntaxen med ,x även i factor. Det är inte nödvändigt här, då termerna är rationella tal, men ifall de är irrationella behövs x-et.

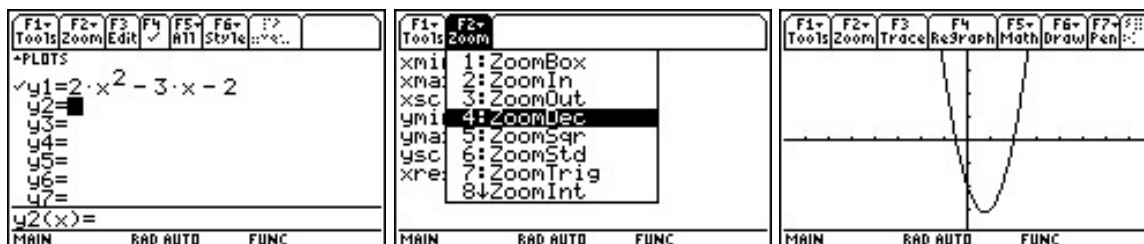
I detta läge är det lämpligt att diskutera faktorsatsen med eleverna så att de tydligt ser sambandet mellan det faktoriserade uttrycket och lösningarna till motsvarande ekvation.

För att definiera funktionen kan du antingen använda Y= menyn, som är tillgänglig genom tryckning på RUTER-tangenten följt av F1 eller använda kommandot Define. I detta fall är det mera praktiskt att använda det senare eftersom uttrycket i högerledet redan är inskrivet.

Kommandot Define finns i F4-menyn. Kopiera detta till inmatningsraden. Skriv sedan $y_1(x)=$ och använd piltangenterna att hämta uttrycket $2x^2 - 3x - 2$ bland de historiska paren.



Du kan nu, om du vill, kontrollera att funktionen finns i funktionseditorn genom att trycka Y= (RUTER och F1). Tryck WINDOW (RUTER och F2) för att göra fönsterinställningar. Välj ett standardfönster ZoomDec genom att trycka på F2 i detta fönster. Tryck ENTER med ZoomDec markerat och grafen dyker upp.



Diskutera funktionens nollställen utifrån grafen och jämför med tidigare resultat från ekvationslösningen och faktorruppdelningen.

Uppgifter

- 1 Vilka är lösningarna till andragradsekvationerna?
 - a) $x^2 + 2x - 2 = 0$
 - b) $x^2 + 2x + 1 = 0$
 - c) $x^2 + 2x + 2 = 0$
 - d) $x^2 + 2x - 3 = 0$
- 2 Faktorruppdela uttrycken:
 - a) $x^2 + 2x - 2$
 - b) $x^2 + 2x + 1$
 - c) $x^2 + 2x + 2$
 - d) $x^2 + 2x - 3$
- 3 Rita funktionerna:
 - a) $y1(x) = x^2 + 2x - 2$
 - b) $y2(x) = x^2 + 2x + 1$
 - c) $y3(x) = x^2 + 2x + 2$
 - d) $y4(x) = x^2 + 2x - 3$

Jämför resultaten i 1, 2 och 3 och diskutera med eleverna.

För att lösa ett ekvationssystem skriver du *and* mellan ekvationerna och avslutar med ,x. Värdet på y dyker automatiskt upp som en sidoeffekt. Prova gärna med att skriva ,y istället och observera skillnaderna. Rita gärna de båda linjerna och jämför den algebraiska och den grafiska lösningen. För att rita linjerna kan du använda Solve för att lösa ut y. Sedan kan du med Define definiera y1(x) respektive y2(x) som de båda linjära funktionerna. Observera att funktionerna måste kallas y1(x) och y2(x). Det blir alltså ett litet redigeringsarbete som behövs då du löst ut y. (Författarens anm. *and* hittar du enklast i katalogen.)

- 4 Lös ekvationssystemet
$$\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$$

Kommandona differentiate, zero, Maximum och cSolve

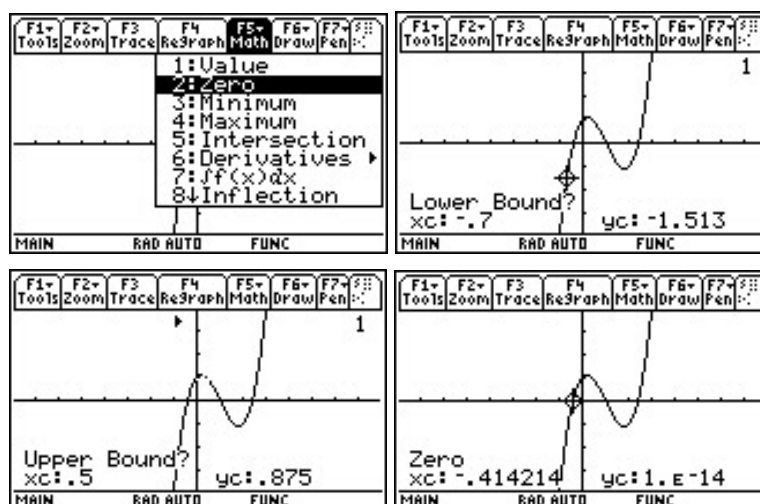
För att kunna hantera räknaren i följande uppgifter behöver du utöver ovanstående nya kunskaper också kunna använda några kommandon i F3-menyn (Calc). Dessutom kommer du att stifta bekantskap med numeriska metoder, som du förmodligen tidigare är bekant med eftersom de också är tillgängliga på grafräknare, som inte är symbolhanterande t ex TI-84.

Till att börja med studerar vi funktionen $y = x^3 - 3x^2 + x + 1$. Rita funktionens graf. Vilka nollställen har funktionen? Vilka är koordinaterna för den lokala maximipunkten (numerisk och exakt bestämning)?

Starta med NewProb. Detta är bra som rutinåtgärd. Välj sedan Y= menyn (RUTER följt av F1), placera markören vid y1 och skriv in $x^3 - 3x^2 + x + 1$ och tryck ENTER. Naturligtvis hade det gått lika bra att använda tekniken ovan med Define. I funktionseditorn där du befinner dig trycker du F2, Zoom. Tryck ENTER för standardfönstret ZoomDec, vartefter grafen uppenbarar sig.

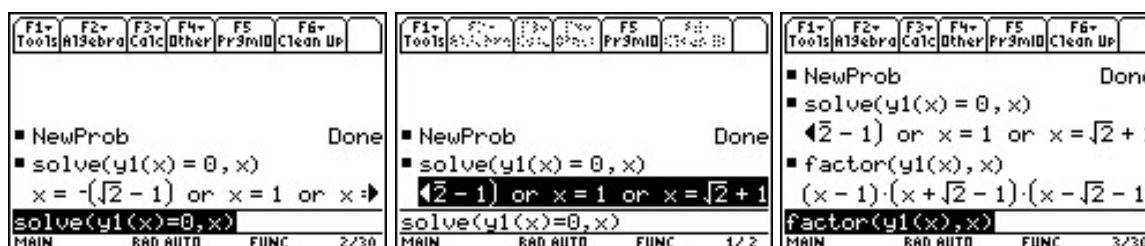


Som framgår av grafen har funktionen tre nollställen. Koordinaterna för dessa kan du bestämma numeriskt genom att använda zero i F5-menyn (Math). Liksom för en grafräknare, markeras vänster och höger intervallgräns och värdet beräknas. Tekniken visas på det negativa nollstället. Tryck ENTER då du markerat Lower Bound och Upper Bound. Som framgår av sista bilden är ett närmvärde på detta nollställe 0,414214. Antalet decimaler som redovisas varierar beroende på inställningen av "Display digits" i MODE-menyn.

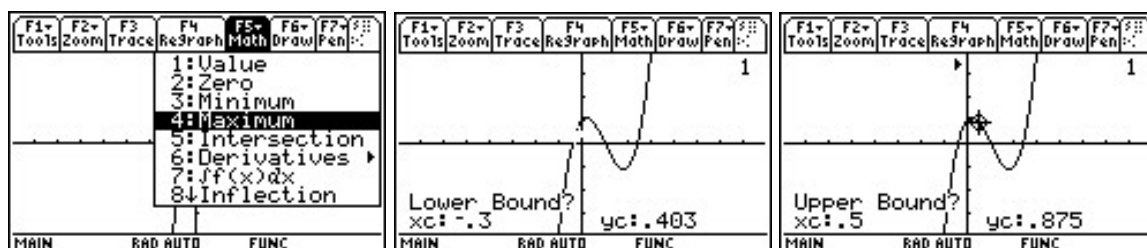


Eftersom TI-89 är symbolhanterande kan det vara trevligt med en exakt bestämning. Den gör du genom att använda Solve. Det kan också vara intressant att sedan använda factor för att verifiera med en faktoreruppdelning av funktionen.

Tryck HOME-tangenten och följ stegen som visas i följande bilder. För att se alla nollställena går du upp i de historiska paren och bläddrar åt höger med piltangenten (höger).

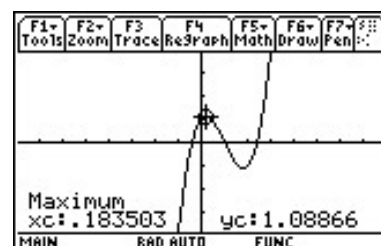


Tryck RUTER följt av F3 för att återvända till grafen. Den lokala maximipunktens koordinater bestämmer du nu med hjälp av Maximum i F5-menyn (Math). Markera en punkt till vänster om (Lower bound) och en till höger om (Upper bound) maximipunkten. Tryck ENTER efter varje.



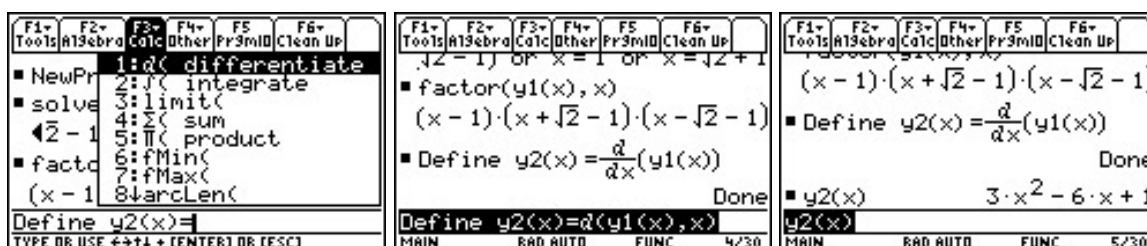
Av bilden intill framgår att närmevärden för maximipunktens koordinater är (0,183503 ; 1,08866).

Nästa steg är att bestämma dessa koordinater exakt. För detta behöver vi derivata funktionen. Eftersom vi också ska undersöka derivatans nollställen är det praktiskt att definiera derivatan som en egen funktion. Denna kan döpas på lämpligt sätt t ex y1prim(x). Det går givetvis också bra att använda någon av de funktionsnamn som finns i funktionseditorn. Varför inte använda y2(x)?



Tryck HOME-tangenten. Välj F4, Other och sedan Define. Skriv y2(x)= och öppna Calc-menyn (F3). Se bild.

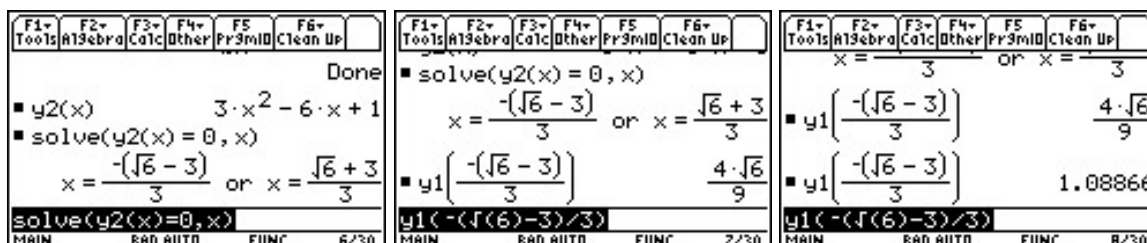
Kopiera differentiate till inmatningsraden med ENTER. Skriv y1(x) , x) Tryck ENTER. Kontrollera gärna utseendet av derivatan genom att skriva y2(x) och trycka ENTER.



Nu bestämmer du derivatans nollställen med solve och sedan funktionsvärdet för y1(x) i maximipunkten. För att få fram funktionsvärdet på ett enkelt sätt kan du först skriva y1(och sedan utnyttja de historiska paren. Kopiera ner hela resultatet och radera

sedan allt utom $\frac{-(\sqrt{6}-3)}{3}$. Avsluta med högerparentes och tryck ENTER. Hur får du då

ett närmevärde för att kunna jämföra med tidigare resultat? Enkelt – tryck RUTER följt av ENTER för ett approximativt svar. Se bilderna nedan.



Avslutningsvis: då du snart behöver icke-reella lösningar kan det vara bra att veta att i Algebra-menyn (F2) finns Complex, där du finner cSolve, med samma syntax som för solve.

Uppgifter

- 5 Studera grafen av $f(x) = 2x^3 - x - 1$.
- Hur många nollställen har funktionen?
 - Motivera detta genom t.ex. faktorisering.
 - Bestäm numeriskt och algebraiskt koordinaterna för den lokala maximipunkten.
 - Vilka lösningar har ekvationen $2x^3 - x - 1 = 0$ i den komplexa talmängden?
- 6 Studera funktionen $y = x \cdot e^x$ med avseende på lokala extrempunkter och nollställen och rita funktionens graf.

Kommandona integrate och deSolve

Primitiva funktion bestäms och integraler beräknas som följer. Vi startar med att

bestämma en primitiv funktion till $x \cdot \sin x$ och sedan beräknar vi $\int_{1/2}^{3/2} (x^2 + x) dx$.

Först städar du med NewProb (i Cleanup -menyn, F6). Välj sedan Calc-menyn (F3) och integrate. Kopiera kommandot till inmatningsraden och skriv $x \cdot \sin(x)$, x och tryck ENTER. Funktionen $\sin$ finns som 2nd Y och den sätter själv vänsterparentesen. Glöm inte den högra! Av resultatet framgår att räknaren utfört en partiell integration och svarar med den primitiva funktion som har integrationskonstanten = 0.

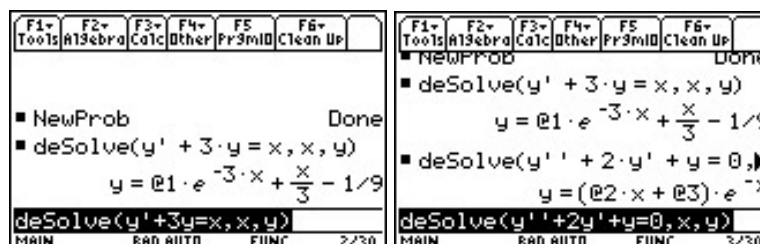
Vid en integralberäkning tillfogas undre och övre gräns med komma emellan. Observera att det är viktigt att du matar in $1/2$ och $3/2$ och inte 0.5 respektive 1.5. Kontrollera gärna vad som händer om du skulle göra "fel".



Vid lösning av differentialekvationer används deSolve i Calc-menyn (F3).

Vi studerar först diff.ekvationen $y' + 3y = x$ och söker den allmänna lösningen till denna ekvation. Syntaxen framgår av följande bilder. Derivatsymbolen (primet) finns som 2nd =. Observera att den godtyckliga konstanten betecknas @1, vänstra bilden nedan. Om vi fortsätter att lösa flera diff.ekvationer kommer de godtyckliga konstanterna att numreras @2, @3 osv tills vi använder NewProb.

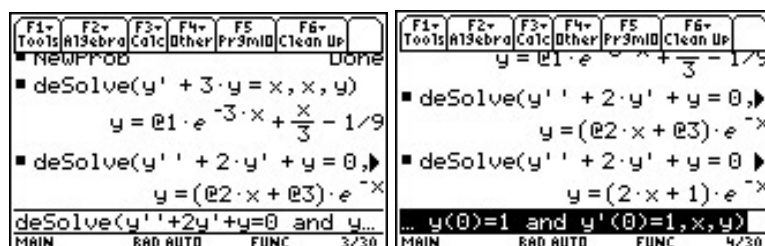
Här näst studerar vi en andra ordningens homogen diffekv. nämligen $y'' + 2y' + y = 0$. För att skriva y'' använder du 2nd = två gånger i följd.



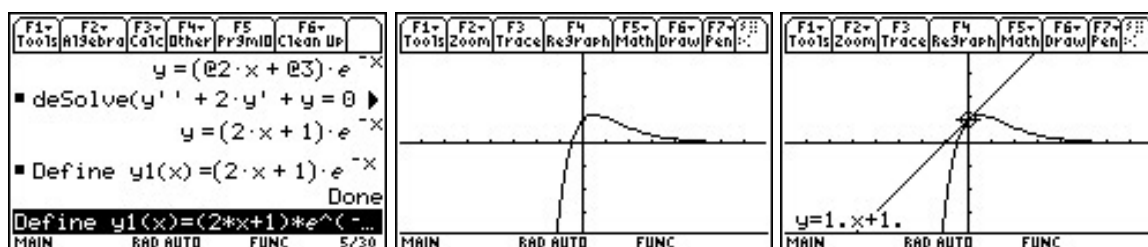
Slutligen låt oss bestämma den speciella lösning till $y'' + 2y' + y = 0$ för vilken lösningskurvan i skärningen med y-axeln tangeras av linjen $y = x + 1$. Rita också denna lösningskurva.

Randvillkoren innebär att $y(0) = 1$ och att $y'(0) = 1$.

Randvillkoren skjuts in direkt efter diff.ekvationen med *and* emellan. Se bilder nedan (den högra bilden visar slutet av inmatningsraden)! Enklast kopierar du *and* från katalogen (CATALOG-tangenten).



För att rita funktionen, använder du Define och kopierar sedan lösningen till inmatningsraden. Eftersom denna visar $y =$ flyttar du markören så att den befinner sig omedelbart till höger om y och tillfogar $1(x)$, så att definitionen blir $y1(x) = (2x + 1) \cdot e^{-x}$ istället. Standardfönstret ZoomDec är troligtvis inställt så tryck endast GRAPH, dvs. RUTER och F3. Om så önskas kan du rita tangenten genom att använda Tangent i Math-menyn (F5). Då räknaren frågar Tangent at? Skriv 0 (x-koordinaten) och tryck ENTER. Denna bestämning är numerisk vilket framgår av decimalpunkterna efter koefficienterna.



Uppgifter

- 7 Bestäm den primitiva funktion till $\ln x$ vars lokala minimipunkt är -2.
- 8 Lös differentialekvationen $y'' - 2y' - 3y = 0$.
- 9 Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'' - 2y' - 3y = 0$ vars lösningskurva i origo tangeras av linjen $y = 2x$.
- 10 Studera funktionen $y = \sin k \cdot x$ för k-värdena $k = 1, 2$ och 3 .
- 11 Rita grafen av funktionen $y = x \cdot \sin x$. Bestäm nollställena och förklara grafens utseende genom att studera dess derivata.
- 12
 - a) Utveckla funktionerna $\sin 2x$ och $\cos 2x$.
 - b) Utveckla funktionerna $\sin 3x$.
 - c) Fundera först och kontrollera sedan vad resultatet blir då $\sin 4x$ utvecklas.

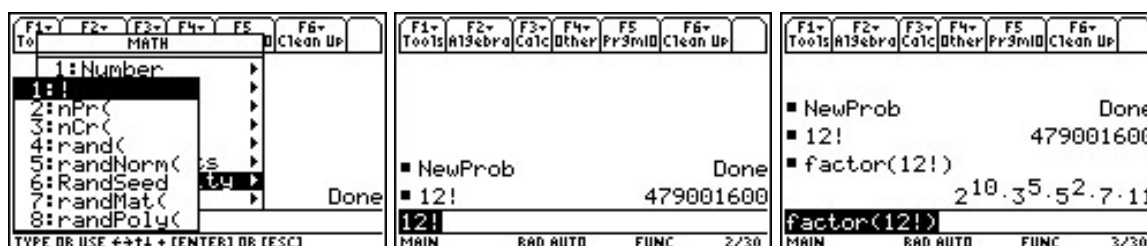
Lite diskret matematik och modellering

Här behöver du veta hur du ska kunna beräkna faktulteter, kombinationer och permutationer.

På hur många sätt kan en kö bestående av tolv personer ordnas? På hur många sätt kan du välja ut fyra personer ur en grupp av tolv personer om det är viktigt i vilken ordning de väljs (t ex en ordförande, en sekreterare, en kassör och en webbredaktör). På hur många sätt kan gruppen väljas om det är oviktigt i vilken ordning valet har skett? Endast vilka personer, som valts, är av intresse.

Fakultet, permutationer och kombinationer

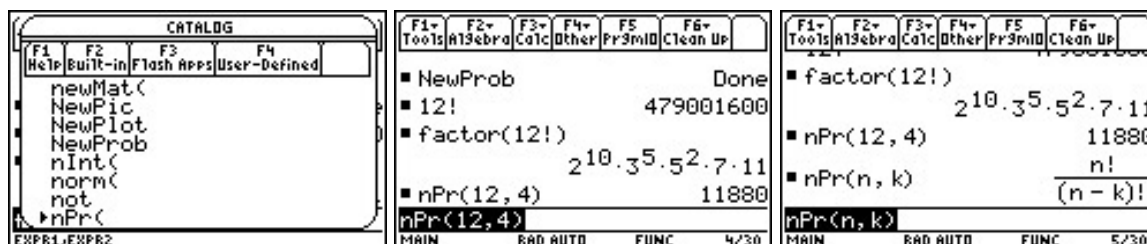
Som bekant kan 12 personer ordnas på $12!$ sätt. Fakultetstecknet finns naturligtvis i katalogen men är enklare att finna som Math (2nd 5), Probability och sedan alternativ 1. Välj först NewProb i CleanUp-menyn (F6). Skriv 12 och kopiera sedan fakultetstecknet, så som beskrivits ovan. Utan att så begärts, studerar vi samtidigt hur faktoruppdelningen av $12!$ ser ut. Se bilderna.



Antalet permutationer av 4 element bland 12 är av intresse när vi ska välja ut personer i ordning. Detta antal kan skrivas $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 = \frac{12!}{(12-4)!}$. Den funktion som används

kallas nPr och finns i samma meny som fakultetstecknet. Se bilden till vänster ovan. Vi skulle kunna hämta den här, men det kan vara en god idé att istället använda katalogen eftersom syntaxen för funktionen avslöjas där. Så tryck på CATALOG-tangenten och sedan N (dvs. siffran 6). Bläddra ner till nPr med piltangenterna. Längst ner i statusraden avslöjas att argumenten är två stycken med komma emellan (EXPR1,EXPR2). Kopiera nPr till inmatningsraden med ENTER och skriv sedan 12,4 och avslutande parentes. Tryck ENTER.

Som bonusbild visas resultatet av $nPr(n,k)$.



Antalet kombinationer av 4 element bland 12 är $4!$ gånger färre än antalet permutationer, eftersom de utvalda kan ordnas på $4!$ sätt. Detta antal skrivs $\binom{12}{4}$. Beräkna $nCr(12,4)$.

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Tools	At3ebra	Calc	Other	Pr3mid	Clean Up
210.35.52.7.11					
11880					
nPr(12, 4)					
nPr(n, k)					
(n - k)!					
495					
nCr(12, 4)					
nCr(n, k)					
k! · (n - k)!					
MAIN RAD AUTO FUNC 6/30					

Uppgifter

- 13 På hur många sätt kan de 52 korten i en kortlek ordnas?
- 14 Talet avslutas med ett stort antal nollor. Hur många är det? Varför är det detta antal?
- 15 Du ska plocka ut 13 kort ur kortleken. På hur många sätt kan det ske?
- 16 Vid en bridgegiv blandas de 52 korten och delas sedan ut till de fyra spelarna. Korten är med andra ord förutbestämda då blandningen är avklarad. Hur många olika bridgegivar finns det? För fullständig information är det viktigt att veta att det är oväsentligt i vilken ordning korten plockas upp av de fyra spelarna.



Listhantering och statistisk plottning

Hur många diagonaler finns det i en fyrhörning, femhörning och en sexhörning? Gör en matematisk modell med hjälp av listhanteringen i vilken du får fram en trolig formel. Kontrollera formelns giltighet genom t.ex. en 7-hörning. Bevisa formeln!

I en triangel går det inte att rita någon diagonal. I en fyrhörning går det att dra 2. I en femhörning är det möjligt att dra 5 och i en sexhörning 9 diagonaler. Detta kan eleverna komma fram till genom att rita motsvarande figurer. Vi studerar detta i två listor.

För att öppna den inbyggda listeditorn tryck på APPS-tangenten. Välj Data/Matrix Editor och tryck ENTER. Namnge filen, t ex "diagonal", i rutan Variable. Tryck ENTER två gånger (en gång för inmatningen och en för att stänga pop-up-fönstret).



Högra bilden visar list-editorn efter fullbordad inmatning.

F1-Tools	F2-Plot Setup	F3-Cell	F4-Header	F5-Calc	F6-Util	F7-Stat
DATA						
	c1	c2		c3		
1						
2						
3						
4						
r1c1=						
MAIN	RAD AUTO	FUNC				

F1-Tools	F2-Plot Setup	F3-Cell	F4-Header	F5-Calc	F6-Util	F7-Stat
DATA						
	c1	c2		c3		
1	3	0				
2	4					
3	5					
4	6					
r2c2=2						
MAIN	RAD AUTO	FUNC				

F1-Tools	F2-Plot Setup	F3-Cell	F4-Header	F5-Calc	F6-Util	F7-Stat
DATA						
	c1	c2		c3		
1	3	0				
2	4	2				
3	5	5				
4	6	9				
r1c2=0						
MAIN	RAD AUTO	FUNC				

Tryck nu Plot Setup (F2). Välj Define (F1). Som Plot Type väljer du Scatter (punktdiagram) och som markörer vid Mark: Box. Skriv sedan in varifrån x och y-värdena ska hämtas. I mellanbilden nedan har inmatning av c1 redan skett och dialogrutan för y ska fyllas i med c2. Observera att du måste trycka på ALPHA-tangenten ett antal gånger för att få inmatat c1 respektive c2. När inmatningen är klar tryck ENTER (2 gånger).

Figure 1 shows three sequential screenshots of the 'main\diag3on1 Plot 1' dialog box. The first screenshot shows the 'Define' button highlighted. The second screenshot shows the 'Plot Type' set to 'Scatter' and 'Mark' set to 'Box'. The third screenshot shows the 'Plot 1' checkbox checked and 'x=c1 y=c2' entered.

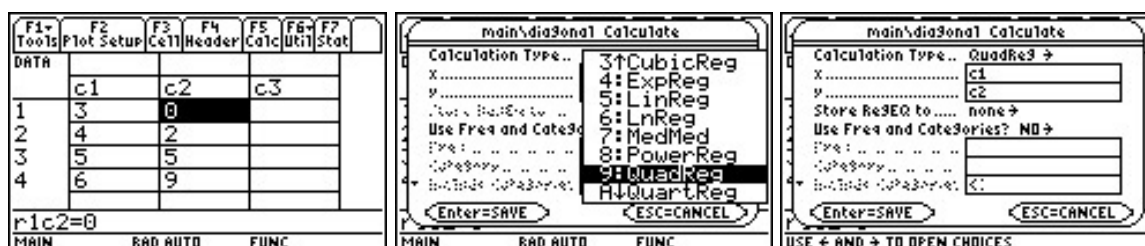
Det är dags för fönsterinställningar. Tryck RUTER följt av F2 för WINDOW. Med tanke på de värden som ska plottas är det lämpligt med $x_{min}=3$, $x_{max}=8$, $y_{min}=0$ och $y_{max}=15$. Avsluta med att trycka GRAPH-tangenten dvs. RUTER och F3.

Det verkar vara möjligt att punkterna ligger på en andragsgradskurva. För att kunna undersöka detta, kan du utföra en regression. Återvänd till listeditorn genom att trycka på APPS-tangenten och på nytt välja Data/Matrix Editor, som ovan. Välj sedan Current eftersom du har denna listvariabel öppen.

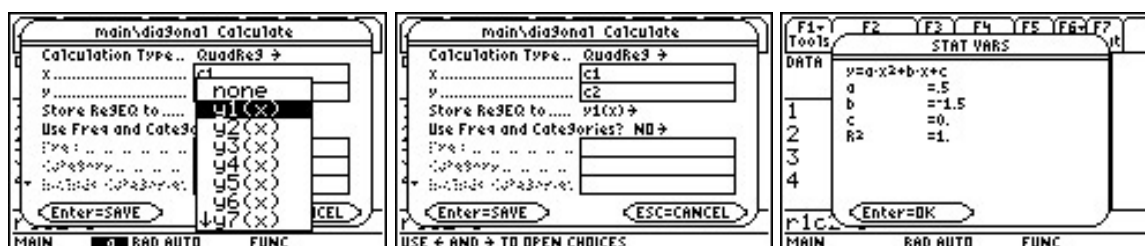
The screenshot displays the TI-84 Plus CE calculator's Data/Matrix Editor. The top menu bar contains the following options: F1-Tools, F2-Zoom, F3-Trace, F4-ReGraph, F5-Math, F6-Draw, F7-Pen, and a Help icon. The left pane shows the 'Data' editor with the following settings: Xmin=3, Xmax=8, Xscl=1, Ymin=0, Ymax=15, Yscl=1, and Xres=2. The right pane shows the 'Data/Matrix Editor' menu with the following options: 1: Current, 2: Open..., and 3: New... The bottom status bar displays 'MAIN', 'BAD AUTO', 'FUNC', and 'TYPE OR USE <=>+1+ (ENTER) OR (F5C)'.

När räknaren är tillbaka i listeditorn väljer du Calc (F5). Se bild nedan till vänster.

På översta raden öppnar du menyn för Calculation Type och bläddrar ner till QuadReg för att kunna utföra en polynomregression av andra graden. Tryck ENTER. Mata in c1 och c2 i rutorna för x och y respektive. Glöm inte att trycka på ALPHA-tangenten vid lämpliga tillfällen Alpha-mode är ursprungligen valt. Så du matar in c utan att först trycka ALPHA. För att mata in siffran 1 trycker du först ALPHA för att lämna alpha-mode. På nästa rad trycker du först ALPHA för att återvända till alpha-mode men räknaren återgår själv då du skrivit c. Dags att tala om var regressionsekvationen ska lagras.



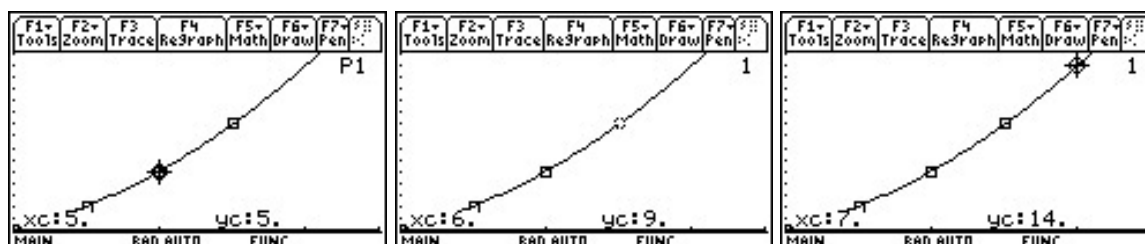
Tryck höger piltangent då markören står på *none* efter Store RegEQ, för att öppna detta valfönster. Om du av misstag skulle råka trycka ENTER här, återvänder du till listeditorn och får på nytt trycka Calc (F5). Men ingen större skada är skedd. Alla hittills gjorda val ligger kvar. Välj $y_1(x)$ och tryck ENTER. Se bilden i mitten. Tryck på nytt ENTER för att utföra regressionen.



Räknaren har anpassat en funktion $y_1(x) = 0,5 \cdot x^2 - 1,5 \cdot x$, med $n \geq 3$. Här är naturligtvis konstanterna närmevärden eftersom modellen är framtagen numeriskt.

Då du trycker ENTER återvänder räknaren till listeditorn. För att se hur modellen stämmer tryck GRAPH, dvs. RUTER och F3.

I graffönstret ser du en god anpassning till de fyra punkterna. Tryck Trace, som är F3. I fönstrets övre högra hörn kan du läsa P1 som visar att markören följer punkterna i plot 1. Kontrollera detta genom att trycka pil-höger och pil-vänster. Bilden visar att femhörningen har 5 diagonaler, allt enligt inmatad data. Tryck pil ner och räknaren lämnar plotten och går över till funktionen $y_1(x)$. Tryck t ex på siffran 6 och sedan ENTER och räknaren redovisar antalet diagonaler i sexhörningen enligt modellen. Kontrollera alla de värden som är inmatade så att modellen stämmer. När detta är klart skriv in 7 för att få en förutsägelse om antalet diagonaler i en sjuhörning. Stämmer det? Prova med 8, är detta också OK?



Om du försöker mata in 9 får du ett felmeddelande. Anledningen är att värdet ligger utanför den definitions mängd $[3, 8]$ som du gett genom fönsterinställningarna. Och just när du ville veta detta! Detta är enkelt avhjälpt. Tryck på HOME-tangenten för att komma till huvudfönstret. Skriv $y1(9)$ på inmatningsraden och tryck ENTER. Ändra till $y1(90)$ och tryck ENTER. Hur ska vi veta om detta är sant? Vi kan inte veta om modellen ger rätta värden om vi inte kan kontrollera dessa. Det är inte helt lätt gjort med en 90-hörning. Här krävs ett bevis.



Beviset utför du i uppgift 18 nedan.

Observera i de två senare bilderna ovan att resultaten redovisas som 27. respektive 3915. och inte som 27 och 3915 respektive. Räkaren visar med detta, att det inte är en exakt beräkning utan numerisk.

Uppgifter

17

Vid kulspel spelar barn ibland "pyris". Den enklaste består av ett lager med en enda kula. "Fyrapyrisen" har två våningar. "Tiopyrisen" är en skapelse med tre våningar med sex kulor i botten. Flera våningar kan byggas på med samma mönster.



- Hur många kulor finns det i en 5-vånings pyris?
- Hur många finns då i en n -vånings? Modellera först och bevisa sedan.

18

Bevisa att antalet diagonaler i en n -hörning är $\frac{n^2}{2} - \frac{3 \cdot n}{2}$.

Summor och serier

Anta att du vill beräkna summan av alla positiva heltal upp till och med 100. Denna summa kan skrivas $\sum_{k=1}^{100} k$.

Om du känner till syntaxen för kommandot kan du kopiera det från Calc-menyn (F3). Känner du inte till syntaxen, kan du ta reda på den genom att söka upp kommandot i katalogen och kopiera det till inmatningsraden därifrån. Statusraden ger dig nödvändig information. Efter att ha läst denna skriver du in summan och trycker ENTER.

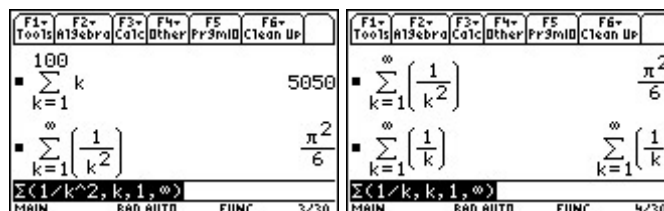


För att summera en talföljd med oändligt många element ersätter vi den övre summationsgränsen med oändlighetssymbolen. Denna finns tillgänglig på tangentbordet som RUTER följt av CATALOG.

För att beräkna summan $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ skriver vi som visas i bilden

nedan. Serien är konvergent med summan $\frac{\pi^2}{6}$. Då vi vill beräkna summan

$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ får vi det resultat, som nästa bild visar. Detta ska tolkas så att summan inte kan beräknas. Orsaken är att serien är divergent.



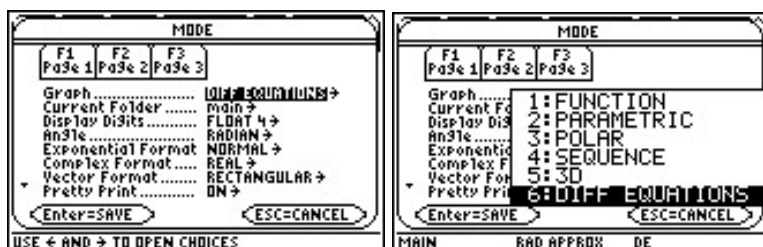
Uppgifter

- 19 Beräkna summan av alla tresiffriga tal som är delbara med 7.
- 20 Beräkna summan $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots$
- 21 Beräkna $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \frac{1}{81} - \frac{1}{243} + \dots$

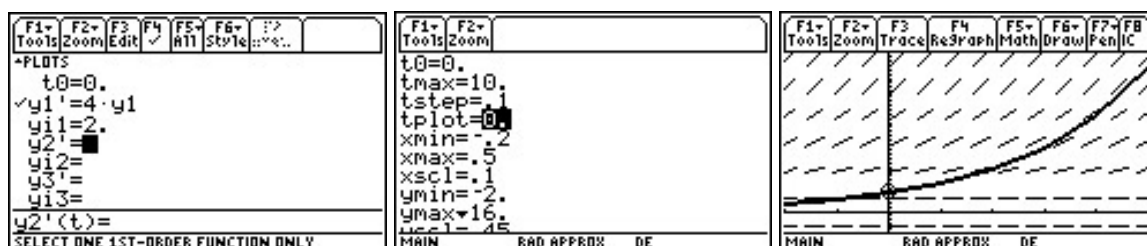
Numerisk lösning av differentialekvationer, riktningsfält

För att kunna studera differentialekvationer med grafisk lösningsmetod måste du ställa om räknaren. Detta gör du genom att trycka på MODE-tangenten. Genom att trycka pilhöger då markören står på Graph får du möjlighet att välja funktionstyp.

Välj DIFF EQUATIONS.. Bekräfta med ENTER (2 gånger), för att spara inställningarna.

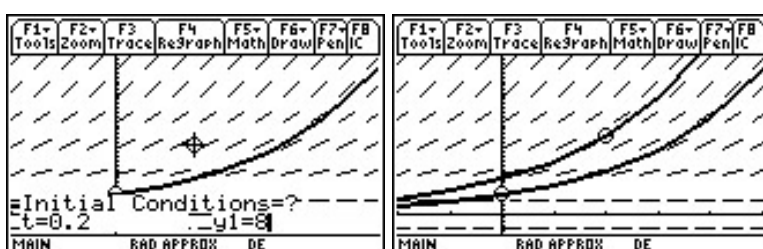


Anta att du vill studera diff.ekvationen $y' - 4 \cdot y = 0$ med startvillkoret $y(0)=2$. Denna ekvation kan lösas exakt och det kan vara av värde för att jämföra med den numeriska metoden. Tryck $y=.$, dvs. RUTER och F1. Här skriver du nu in ekvationen $y' = 4y$ med det givna startvillkoret så som vänstra bilden visar. Välj sedan WINDOW och ställ in fönstret enligt den mellersta bilden. Tryck GRAPH och räknaren ritas upp ett riktningsfält och en lösningskurva utifrån det givna randvillkoret, högra bilden. Tätheten i riktningsfältet kan ställas in i WINDOW-meny. Längst ner finner du fldres (field resolution). I bilden nedan är 14 valt. Experimenera!



Om du vill välja en annan startpunkt, kan du göra det även när du har kurvan synlig. Detta sker genom att du trycker på F8, (2nd F3), IC som betyder Initial Conditions. Använd gärna TRACE, F3, för att studera kurvan.

Med IC kan du själv välja startpunkt genom att flytta markören med piltangenterna och sedan trycka ENTER alternativt ange t och y1 värden och få en annan lösningskurva till differentialekvationen ritad. Jämför lösningskurvorna med den exakta lösningen.



Uppgifter

22

Om ett föremål faller och vi tar hänsyn till luftmotståndet mot rörelsen kommer hastigheten, v , att bestämmas av diff.ekv. $m \cdot v' = m \cdot g - k \cdot v^2$. Här är m hopparens massa, g tyngdaccelerationen och k en konstant, som beror av bl.a föremålets form och storlek. Studera hur hastigheten beror av tiden för $m = 80$ kg och $k = 16$ kg/m. Välj begynnelsefarten 0 m/s.

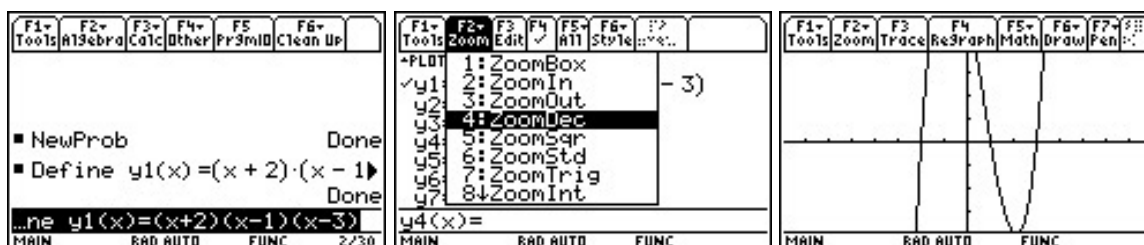
Problemlösning

Med ett CAS-verktyg som TI-89 Titanium kan eleverna få uppgifter med en annan typ av formulering, där lösningen utvecklas från en upptäckt, till en fortsatt undersökning och slutligen till en generalisering genom en algebraisk verifiering. Här följer ett inledande exempel, som är av denna karaktär. Flera likartade problemställningar finns i de följande uppgifterna.

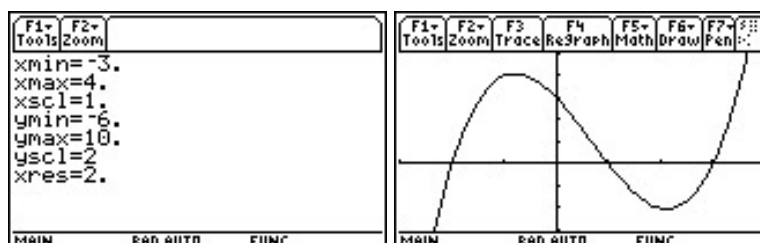
Undersök, upptäck och verifiera

Definiera ett tredjegradspolynom som har tre nollställen, gärna heltalsvärden. Rita en tangent till funktionsgrafen och studera om och var den skär x-axeln. För vissa tangeringspunkter kommer tangenten att skära x-axeln i ett av nollställena. Finns det något mönster för när detta inträffar? Undersök! Är det du observerat generellt? Bevisa! Vi bortser från de fall att tangenten ritas i själva skärningspunkten med x-axeln.

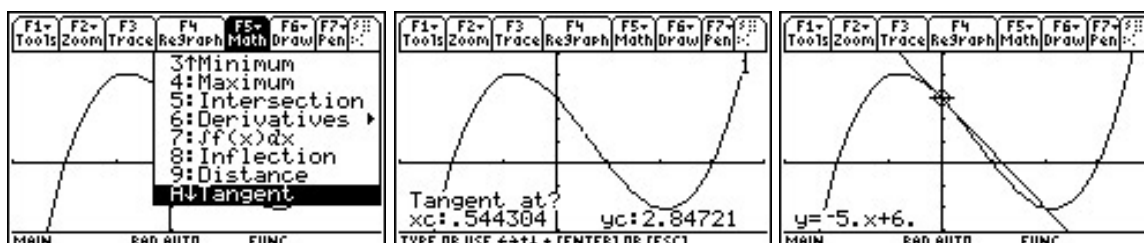
Enklarest definierar du problemet faktoruppdelat, eftersom detta ger full kontroll över nollställena. I funktionseditorn, Y= (RUTER och F1) väljer du Zoom följt av ZoomDec, för att senare justera fönsterinställningarna. Detta val kunde lika gärna ha gjorts i WINDOW-menyn (RUTER och F2) eller GRAPH-menyn (RUTER och F3).



Fönsterinställningarna justeras i y-led, så att extrempunkterna blir synliga (med marginal). Samtidigt justeras x-axeln så att ett "lagom intervall blir synligt. Se bilderna som följer.



För att rita tangenter använder du Math-menyn, F5. När räknaren frågar "Tangent at?" kan du antingen flytta markören med piltangenterna eller skriva in ett x-värde. Det senare rekommenderas. Rita tangenten i punkten med $x=0$. Tryck därför 0 och sedan ENTER.

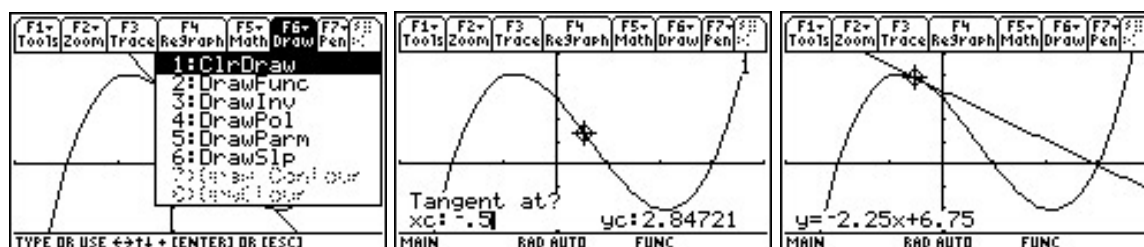


Denna tangent skär x-axeln mellan de båda nollställena $x=1$ och $x=3$, närmare bestämt i $x=1,2$ vilket kan bestämmas med hjälp av tangentens ekvation som redovisas i fönstret. Denna beräkning kan ske på traditionellt sätt med papper och penna eller med kommandot solve i Algebra-menyn.

Det kan vara intressant att observera att om du ritar en tangent för ett något lägre x-värde kommer tangenten att få flackare lutning och skära närmare $x=3$. Å andra sidan om du ritar en tangent för ett något större x-värde kommer skärningen att närma sig $x=1$.

Innan du fortsätter kan det vara praktiskt att radera den tangent som du nyss ritade. Detta sker med ClrDraw i Draw-menyn, F6.

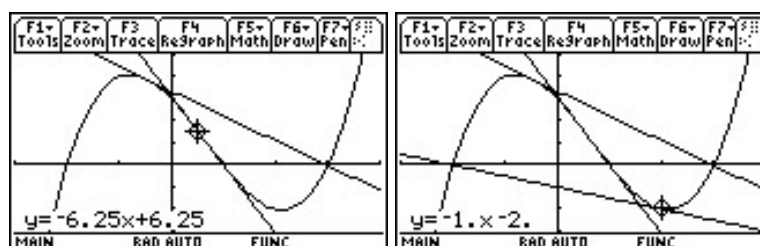
Först provar du att rita en tangent med tangeringspunkten $x=-0,5$.



Detta var ett framgångsrikt val. Tangenten som ritas i $x=-0,5$ skär x-axeln för $x=3$. Detta verifieras genom att tangentens ekvation, $y = -2,25x + 6,75$, har lösningen $x=3$ för $y=0$.

Låt gärna denna tangent ligga kvar och rita ytterligare en för $x=0,5$. Ytterligare en framgång! Av ekvationen för tangenten framgår att $y=0$ då $x=1$.

Kvar står att rita en tangent som skär i det tredje nollstället, $x=-2$. Det är uppenbart att tangeringspunkten måste läggas på ett högre x-värde. Testa $x=2$. En ny fullträff! Av tangentens ekvation framgår att $y=0$ ger $x=-2$.



Vad är det nu som är speciellt med dessa punkter? Jo, $x=2$ ligger faktiskt mitt emellan $x=1$ och $x=3$ som är två av nollställena. Gäller detta även för de andra?

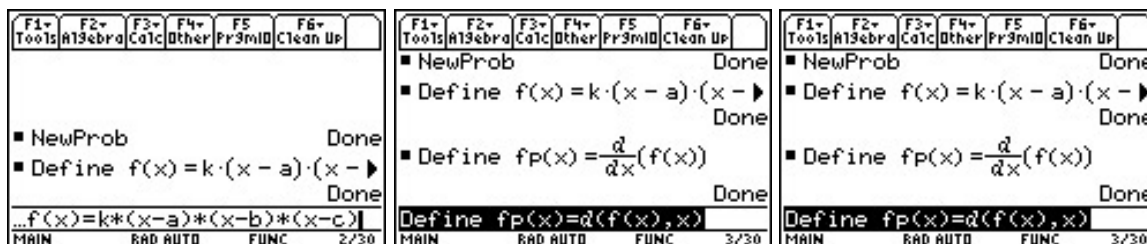
$$\frac{-2+1}{2} = -\frac{1}{2} \text{ och } \frac{-2+3}{2} = \frac{1}{2}. \text{ Det stämmer!}$$

En egenskap är upptäckt! Låt nu eleverna undersöka några olika tredjegradspolynom med andra nollställen. Variera gärna också så, att koefficienten för tredjegradstermen inte är 1.

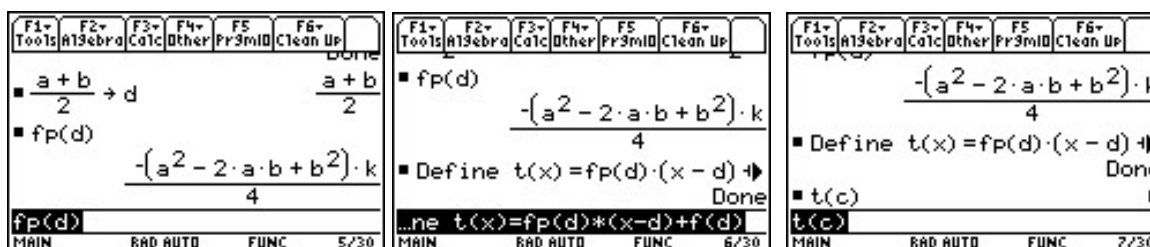
Naturligtvis kommer elevundersökningarna att bekräfta det som redan observerats. Nu har eleverna upptäckt genom att undersöka flera polynom. Nu återstår det att verifiera att detta gäller generellt med ett bevis.

Definiera därför $f(x) = k \cdot (x-a) \cdot (x-b) \cdot (x-c)$. Eftersom tangentens ekvation ska bestämmas, behövs riktningskoefficienten till linjen och därmed derivatan av funktionen f . Därför definieras också $fp(x)$ som derivatan av $f(x)$. Låt oss kalla tangeringspunkten för d . Lagra medelvärdet av de två nollställena i d genom:

$$\frac{a+b}{2} \text{ STO } d.$$



Lutningen hos tangenten i punkten $x=d$ bestäms, liksom ekvationen, $t(x)$, för denna tangent. Slutligen undersöks värdet $t(c)$.



Att $t(c) = 0$ visar att tangenten skär x-axeln just för $t=c$.

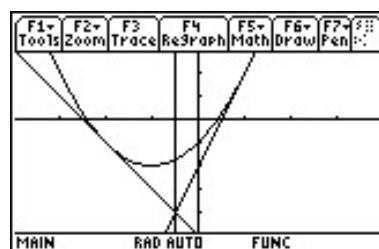
Därmed är det bevisat att för en tredjegradsfunktion med tre nollställen gäller: då en tangent ritas i en punkt där x-värdet är medelvärdet av två av nollställenas x-koordinater, så skär denna tangent i det tredje nollstället.

Uppgifter

- 23 Ett andragradspolynom har nollställena 1 och 6. Funktionen har ett lokalt maximum = 4. Vilket är polynomet?
- 24 För vilka värden på C har funktionen $f(x) = x^3 - 5x + C$ tre nollställen?
- 25 Studera funktionen $f(x) = x^2 + 2x - 1$.
 - a) Bestäm lutningen hos den linje som går genom P(-1 ; -2) och Q(2 ; 5) på kurvan och jämför med derivatan till $f(x)$ i mittpunkten på intervallet [-1,2].
 - b) undersök motsvarande för punkterna (-2 ; f(-2)) och (1 ; f(1)).
 - c) Undersök om upptäckten gäller generellt för alla andragradspolynom, dvs om den gäller för $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$.
 - d) Gäller detta för polynom av tredje graden också?

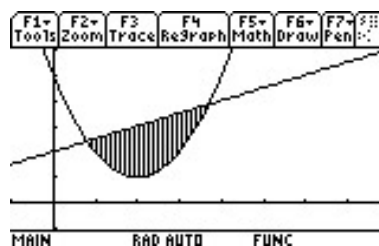
- 26 Studera på nytt funktionen $f(x) = x^2 + 2x - 1$.
- Bestäm minimipunktens (M) koordinater.
 - Rita en tangent till kurvan i punkten (P) med $x=1$ och bestäm koordinaterna för skärningspunkten (Q) mellan tangenten och symmetrilinjen till andragradsfunktionen.
 - Jämför y-koordinaterna för punkterna P, Q och M. Vilken slutsats drar du?
 - Upprepa undersökningen för en tangent i punkten med $x=-2$. Gäller din slutsats här också?
 - Undersök om upptäckten gäller generellt för alla andragradspolynom, dvs. om den gäller för $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$.
- 27 Studera på nytt funktionen $f(x) = x^2 + 2x - 1$.

- Rita tangenterna till kurvan i punkterna $x=-2$ och $x=1$. Bestäm x-koordinaten för skärningspunkten (x_p) mellan dessa tangenter. Slutsats?



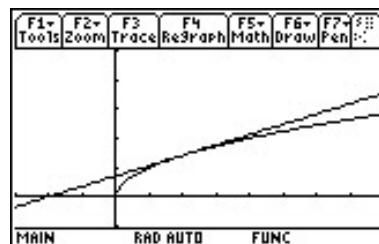
- Rita den vertikala linjen genom x_p . Bestäm arean av det område som begränsas av kurvan, den vänstra av tangenterna och den vertikala linjen genom x_p . Upprepa för området mellan kurvan, den högra tangenten och den vertikala linjen. Jämför de båda areorna. Slutsats?
- Dags att generalisera. Gäller slutsatserna godtyckliga andragradspolynom och tangenter? Studera på nytt $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$.

- 28 En rät linje skär en andragradsfunktion $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ i punkterna P och Q. Visa att arean av det skuggade området endast beror av a och differensen mellan x-koordinaterna för P och Q.



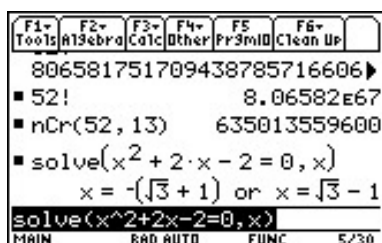
Uppgifterna 25-28 är hämtade från The Case for CAS utgiven av T³ Europe

- 29 Rita funktionen $y = \frac{1}{x}$. Tangenten i punkten med $x=1$ skär x-axeln i punkten P och y-axeln i Q.
 a) Bestäm arean av triangeln OPQ, där O är origo.
 b) Rita tangenten i punkten med $x=2$ och upprepa ovanstående areaberäkning.
 c) Upprepa gärna med andra x -värden för att se hur arean förändras.
 d) Bevisa med en godtycklig tangeringspunkt ($a ; 1/a$) att det observerade gäller generellt.
- 30 Rita en tangent till funktionen $y = \sqrt{x}$ i punkten med $x=2$. Bestäm skärningspunkten med x-axeln. Upprepa för andra värden på x för att observera ett mönster. Bevisa algebraiskt dina iakttagelser.
- 31 a) En engångsmugg har bottenradien 2,5 cm och radien på öppningen 3,3 cm. Muggens höjd är 10,0 cm. Hur stor är dess volym?
 b) Generalisera ovanstående. Hur stor volym har en mugg med bottenradie r_1 , öppningsradie r_2 och höjd h ?
- 32 Bestäm ekvationen för normalen till funktionen $y = \ln x$ i punkten med $x=a$. Ta reda på x-koordinaten för skärningspunkten mellan denna normal och x-axeln. Vilket är avståndet mellan denna punkt och punkten $x=a$ på x-axeln?
- 33 Arean, T , av en triangel med sidorna a , b och c kan beräknas med Heron's formel, $T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, där s är halva omkretsen av triangeln.
 a) Beräkna arean av den rätvinkliga triangeln med sidor 3 cm, 4 cm och 5 cm.
 b) Beräkna arean av den rätvinkliga triangeln med sidor 3 cm, 4 cm och 6 cm. Redovisa exakt värde.
 c) Bevisa Heron's formel.
- 34 Undersök lösningarna till diff.ekv. $y''+2y'+b \cdot y = 0$ för b -värdena: $b = -3, 1$ och 2
- 35 Studera funktionen $y = x^2 + b \cdot x - 1$ för b -värdena: $b = -2, -1, 0, 1$ och 2 . Undersök speciellt läget av minimipunkten för de olika funktionerna och sök ett samband som kan beskriva läget av dessa.
- 36 Då vi bygger korthus staplar vi kort enligt ett visst mönster. Nedan visas bilder av envånings-, tvåvånings- och trevåningskorthus. Som bjälklag mellan våningarna ligger minsta mängd kort, dvs ett i tvåvånings och tre i ett trevånings, överst ett och där under två. Hur många kort finns i fyrvåningshuset och i n -våningshuset? Hur många kort går det åt att bygga alla hus tom n -våningshuset utan att riva de föregående?

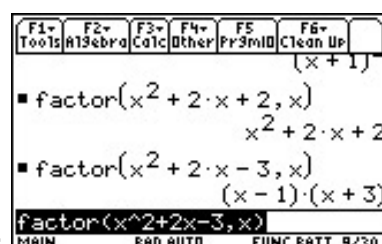
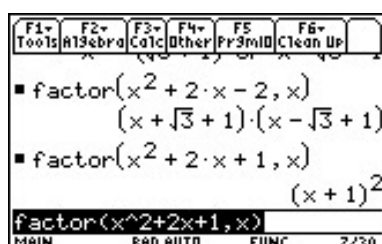


Några lösningar

- 1 Solve finns i menyn F2, Algebra. Här visas endast lösningen på 1a.



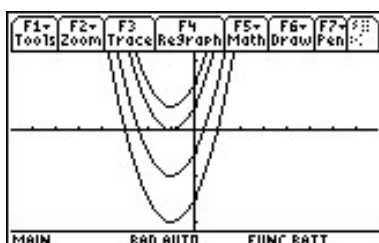
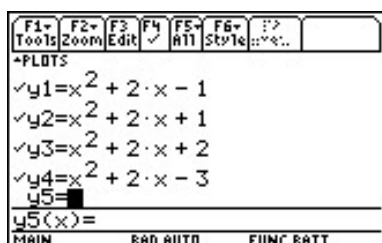
- 2 Factor finns i menyn F2, Algebra.



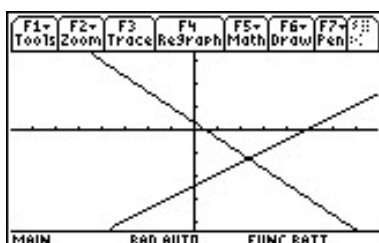
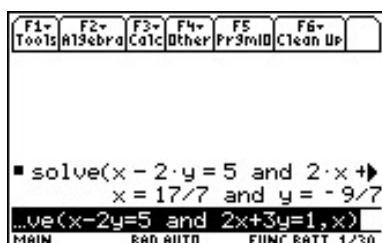
a, b: MAIN RAD AUTO FUNC 7/30 c, d: MAIN RAD AUTO FUNC BATT 9/30

Om någon term är irrationell som i a, måste Factor ha parametern x. Om termerna är rationella kan x utelämnas och syntaxen förenklas till Factor($x^2 + 2x - 3$).

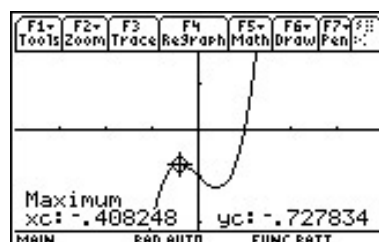
- 3 Funktionerna definieras under Y=, "ruter" F1 och funktionen ritas under GRAPH, "ruter" F3. Fönstret är ZoomDec med en förskjutning 0,5 enheter vertikalt nedåt.



- 4 Använd Solve under F2, Algebra. I Catalog hittar du "and".

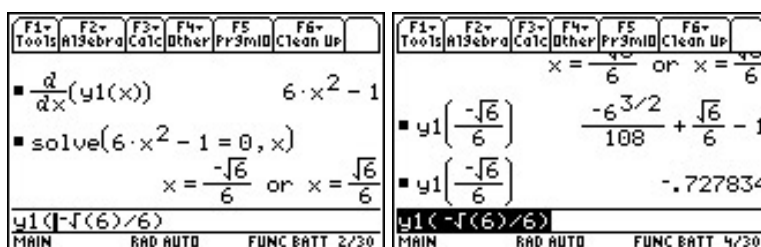


- 5 Lösningarna till c och d visas. Med grafen på skärmen finner du Maximum i F5-menyn. Markera vänster och höger intervallgräns, Lower bound och Upper bound respektive. Tryck sedan Enter.

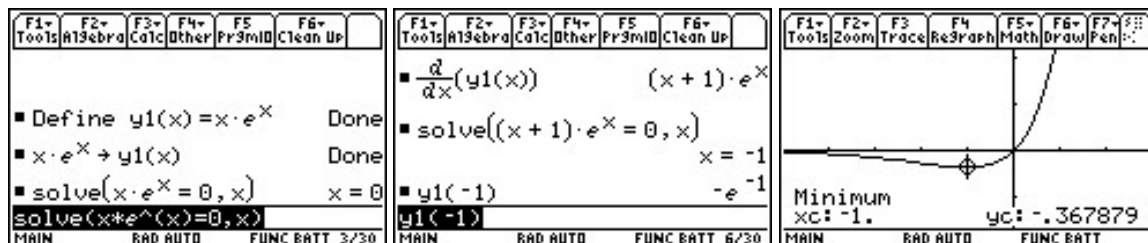


I vänstra bilden nedan har inte kommandot på inmatningsraden utförts ännu. Först i den högra bilden syns funktionsvärdet exakt och approximativt.

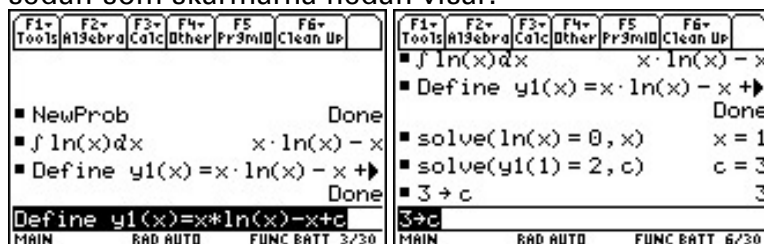
Derivata-symbolen finns i menyn F3 eller på tangentbordet, 2nd 8.



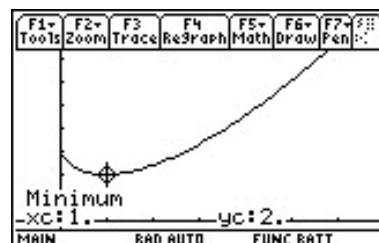
- 6 Funktionen behöver inte skrivas in i Y= menyn. Den kan även matas in med hjälp av Define i F4-menyn eller med hjälp av STO. Båda metoderna visas i den vänstra bilden nedan. Här framgår också att funktionen har ett nollställe $x=0$. Den högra bilden visar derivatan, att derivatan har ett nollställe, $x=-1$ och att funktionsvärdet då är $-1/e$.



- 7 Integralsymbolen finns i menyn F3 eller på tangentbordet, 2nd 7. Observera syntaxen. Vi har här en primitiv funktion där integrationskonstanten satts till 0. Vi söker en speciell primitiv funktion och adderar därför konstanten C. Den speciella funktion vi söker finner vi sedan som skärmarna nedan visar.

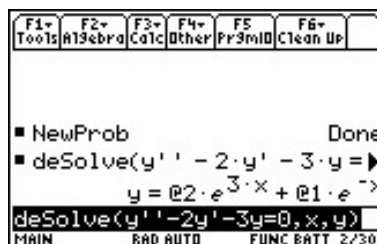


Eftersom derivatan, dvs $\ln x$ är en växande funktion kommer teckenväxlingen hos den att vara från minus till plus. Alltså rör det sig om ett minimum.



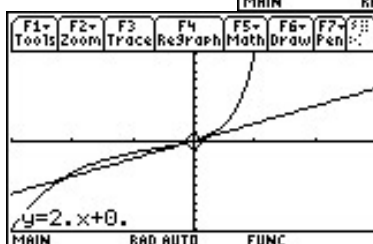
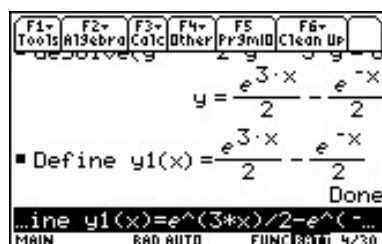
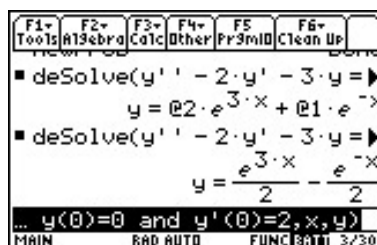
- 8 deSolve finns i F3-meny. Derivata-primen finns som 2nd = på tangentbordet. För att få andraderivatan används denna två gånger.

De godtyckliga konstanterna i lösningen betecknas av T1-89 med @1 och @2.

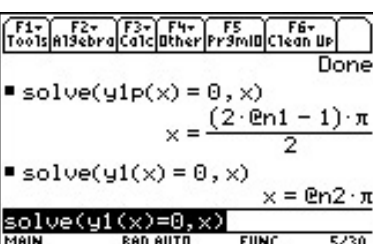
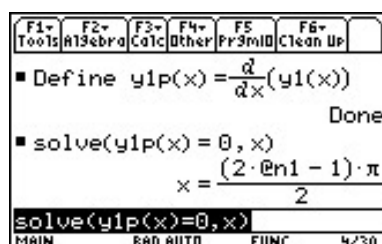
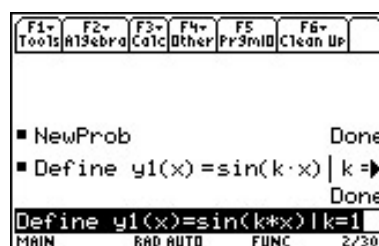


- 9 Villkoret innebär att $y(0)=0$ och att $y'(0)=2$. Villkoren tillfogas med and direkt efter diffekvationen.

I bilderna nedan har jag ritat lösningskurvan. Observera att graderingen på de båda axlarna är olika.



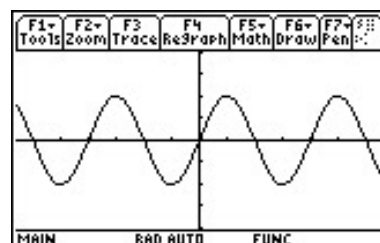
- 10 Starta med $k = 1$. Funktionen kan definieras som bilden visar. Detta gör det bekvämt att ändra värde på k . Definiera sedan derivatan. Jag valde funktionsnamnet $y1p(x)$ för derivatan av $y1(x)$. Bestäm derivatans nollställen. Se vänstra bilden nedan. Bestäm funktionens nollställen. Se högra bilden nedan.

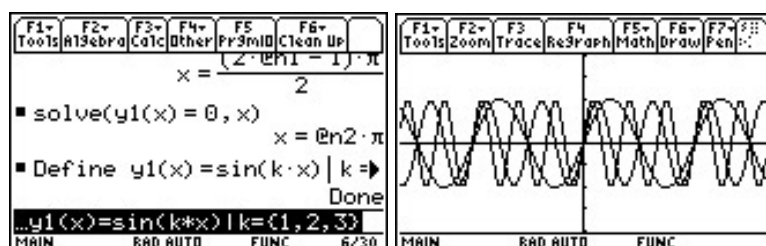


Slutligen rita grafen av funktionen. Fönsterinställningarna är som grund ZoomTrig som sedan ändrats så att y-axeln är $[-2, 2]$.

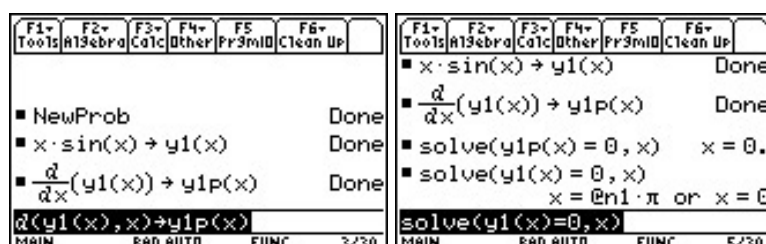
Upprepa ovanstående steg helt enkelt genom att ändra definitionen av $y1(x)$. Kopiera ner den gamla definitionen och ändra. Upprepa tidigare utförda beräkningar genom kopiering.

Ändra så slutligen definitionen av $y1$, så att $y1(x)$ kommer att bli en kurvsvara genom att tilldela k värden ur en lista. Se vänstra bilden nedan. Genom att trycka på GRAPH, RUTER F3, får vi högra bilden.

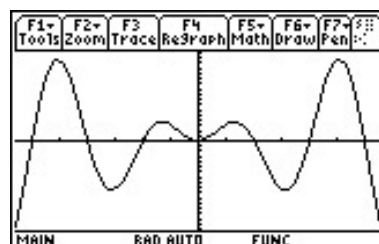




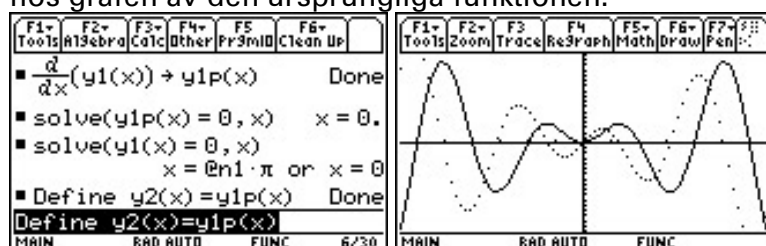
- 11 Funktionen och dess derivata definieras genom att lagras med STO som omväxling till att använda Define i F4-menyn. Vänstra bilden. Sedan söks nollställena till derivata, men föga framgångsrikt. Endast ett redovisas. Varför? Funktionens nollställen bestäms. Se högra bilden.



Funktionens graf ritas.
Grundinställningen är ZoomTrig med efterföljande ändring av y-axelns gradering. Som framgår finns det mer än ett nollställe till derivatan.



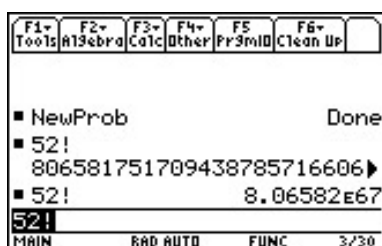
För att studera derivatan och dess nollställen ritar vi grafen av derivatan. För att kunna rita yp(x) gör vi den tilldelning som vänstra bilden nedan visar och ritar sedan. Se högra bilden. Derivatans nollställen hos derivatan och derivatans teckenväxling bekräftar utseendet hos grafen av den ursprungliga funktionen.



- 12 I F2 menyn hittar du under Trig, tExpand. Nedan redovisas lösningarna på 12a.

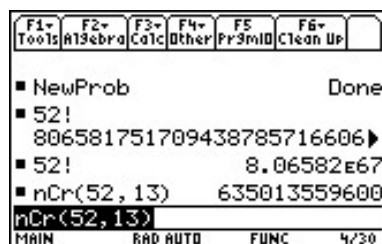


- 13 Symbolen !, fakultet, finner du under Math (2nd 5), Probability.



- 14 Antalet nollor i 52! är 12.
Ledning: Se det inledande exemplet under diskret matematik där en bild visar faktorruppdeleningen av 12!.

- 15 Antal kombinationer av r element bland n, $\binom{n}{r}$, betecknas nCr, se



CATALOG.

- 16 Varje enskild hand kan sorteras på 13! sätt, så antalet är $\frac{52!}{(13!)^4}$.

Ett annat sätt att resonera rent kombinatoriskt är att du tänker dig de 52 korten framför dig. Först väljer en person ut 13 kort bland dessa. Detta kan

ske på $\binom{52}{13}$ sätt. Sedan väljer nästa person ut 13 bland de resterande 39

korten och slutligen väljer den tredje ut 13 kort bland de 26 kvarvarande. Den sista personen tar återstoden. Här finns bara ett enda val.

Enligt multiplikationsprincipen blir då antalet givar $\binom{52}{13} \cdot \binom{39}{13} \cdot \binom{26}{13} \cdot 1$. Detta

antal ska rimligen vara detsamma som det vi beräknade som $\frac{52!}{(13!)^4}$. Det

känns mödosamt att kontrollera alla siffrorna i de båda talen. Lyckligtvis behöver du inte göra det. Du frågar din räknare om talen är lika. Detta sker genom att du påstår att de är lika. Boolesk algebra ger dig svaret true eller false beroende på utfallet.

För att kunna se hela talet flyttar du upp markören bland de historiska paren och bläddrar åt höger med piltangenten.



17 Antalet kulor för de olika våningarna är:

Våningar:	1	2	3	4
Kulor:	1	4	10	15

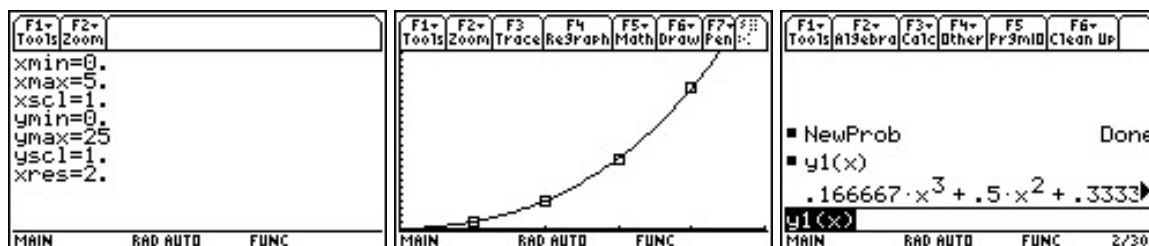
som läggs in i listeditorn i en variabel som kallas kulor. Därefter gör du en Plot setup (F2) och finner att den redan är klar. De föregående inställningarna finns där. Om så inte är fallet upprepar du enligt det inledande exemplet. Låt gärna eleverna försöka med en regression av andra graden först för att se att denna ger felaktiga resultat. Välj därefter QubicReg. Ställ in som bilden i mitten nedan visar.



Gör fönsterinställningar enligt nedan och studera sedan graferna. Genom att använda Trace kan du se att funktionsanpassningen stämmer överens med de värden som är kända. Som syns nedan har femvånings-pyrisen 35 kulor enligt modellen, vilket stämmer överens med det antal du kan beräkna "för hand" genom att se att antalet kulor som tillkommer i nästa lager är 15

stycken. Också kan du se att modellen tycks vara $\frac{1}{6} \cdot n^3 + \frac{1}{2} \cdot n^2 + \frac{1}{3} \cdot n$, genom

att studera koefficienterna i regressionsekvationen. Detta återstår nu att bevisa.



För att bevisa detta använder du lämpligen ett induktionsbevis.

Vi ser att modellen är giltig för $n=1$ eftersom $\frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 1$, med eller utan

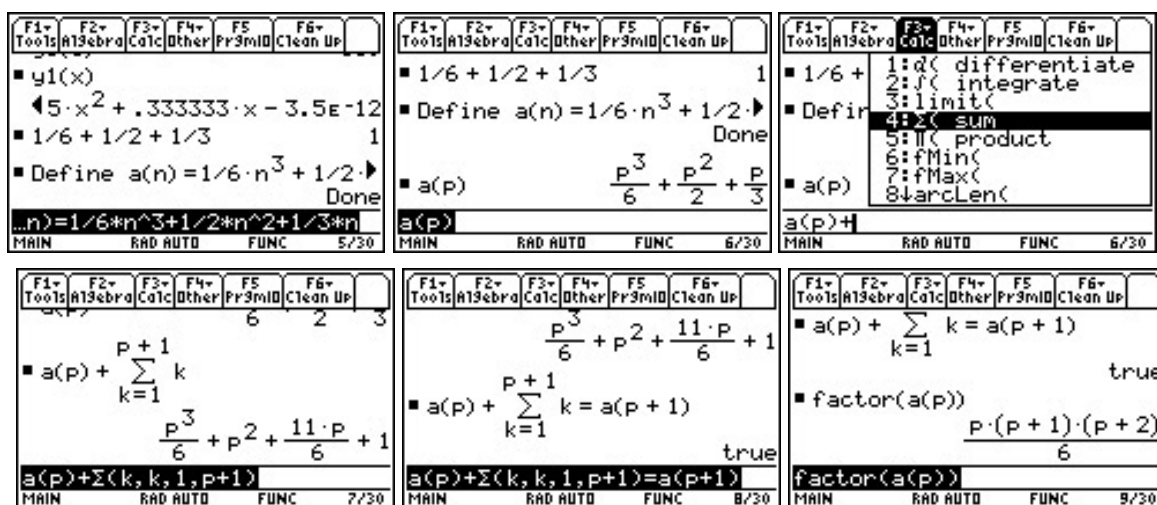
räknarstöd. Definiera en funktion $a(n) = \frac{1}{6} \cdot n^3 + \frac{1}{2} \cdot n^2 + \frac{1}{3} \cdot n$, som anger

antalet kulor i en n -vånings pyris. Vi antar nu att modellen gäller för ett godtyckligt värde för n , nämligen $n=p$.

Då vi bygger den $(p+1)$ -a våningen under p -vånings-pyrisen lägger vi till

$1 + 2 + 3 + \dots + (p-1) + p + (p+1) = \sum_{k=1}^{p+1} k$ stycken kulor. Summan kan beräknas

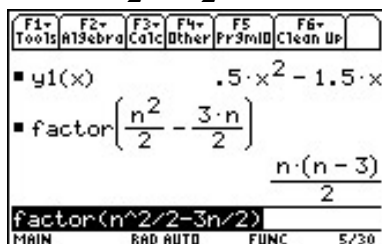
med räknaren. Se bilderna 3 och 4 nedan. Observera syntaxen för summationen. I bild 4 har summan adderats till $a(p)$ och utgör alltså antalet kulor i pyrisen med $(p+1)$ våningar. Är detta samma som $a(p+1)$? Om så är fallet, gäller modellen även för $n=p+1$. Kontrollera t ex som i bild 5.



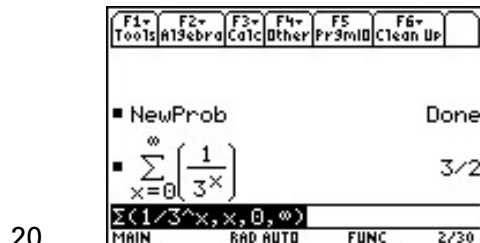
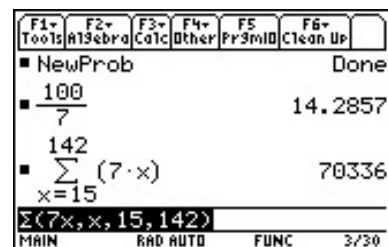
Vi har visat att om modellen gäller för $n=p$ så gäller den också för $n=p+1$. Eftersom modellen gäller för $n=1$ gäller den därmed för alla n . I den sista bilden har sambandet faktoruppsdelats för att få ett "tydligare" utseende.

- 18 Från ett godtyckligt hörn i en n -hörning är det möjligt att dra $(n-3)$ diagonaler. Det är ju inte möjligt att dra en diagonal till något av de båda angränsande hörnen och inte heller till det "egna" hörnet. Detta gäller för vart och ett av de n hörnen. Så enligt multiplikationsprincipen blir detta $n \cdot (n-3)$ stycken. Då uppstår ett litet problem bara. Alla diagonaler har nu räknats två gånger (t ex från hörn 1 till hörn 4, men också från hörn 4 till hörn 1). Antalet diagonaler i en n -hörning är med andra ord $\frac{n \cdot (n-3)}{2}$. Enligt modellen vi tog fram är

antalet $\frac{n^2}{2} - \frac{3 \cdot n}{2}$, vilket är samma sak.

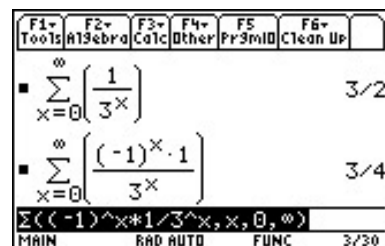


- 19 Summan kan skrivas $\sum_{k=15}^{142} 7 \cdot k$. Gränserna har bestämts som bilden visar.

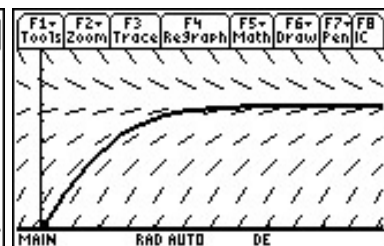
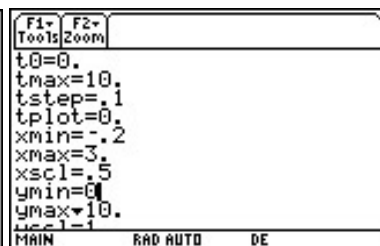
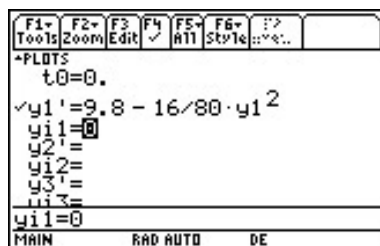


20

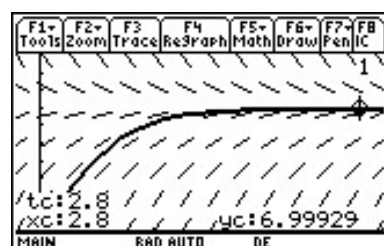
21



- 22 Skriv om diff.ekvationen som $v' = g - \frac{k}{m} \cdot v^2$.

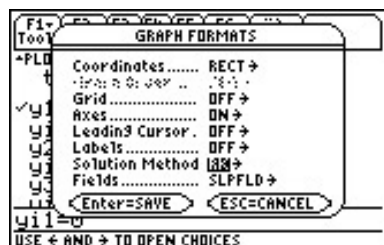


I bilden till höger framgår att hopparen uppnår en slutfart som är i det närmaste 7 m/s. Denna fart kan du beräkna exakt. Då slutfarten i det närmaste uppnås är accelerationen i det närmaste 0 m/s². Det innebär att $0 = 9.8 - \frac{16}{80} \cdot v^2$. Detta ger $x = 7$ m/s som stämmer väl överens med den numeriska metodens resultat.



Det är möjligt att ändra bl a lösningsmetod i en meny som kallas GRAPH FORMAT.

Den kan du öppna från graffönstret genom att trycka RUTER och F (tangenten |). Den inställning som använts ovan framgår av fönstret RK som Solution Method står för Runge Kutta. Som alternativ kan du välja Eulers metod. Lek gärna med inställningarna här.



Slutord

Det är min förhoppning att du fått en inblick i den mångfald av möjligheter som TI-89 erbjuder. Hoppas också att du haft lika mycket glädje att arbeta med materialet som jag hade när jag utarbetade det.

Lars Jakobsson

