Samma area

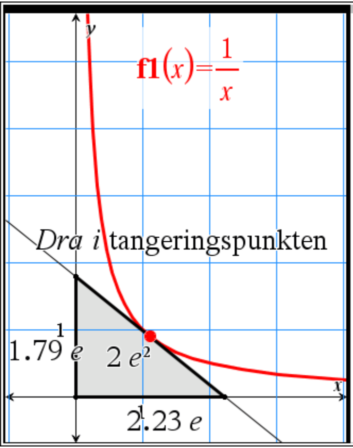
En tangent dras till den del av funktionen y = 1/*x* som ligger i första kvadranten. Tangenten och axlarna bildar en triangel. Vad kan du säga om arean av denna triangel?

Den här övningen passar bra för kurs 3 i samband med genomgång av derivata. Vi utnyttjar en hel del CAS-funktioner. Dock kan man göra en hel del algebraiska manipulationer ”för hand”. Det viktiga är dock inte dessa algebraiska manipulationer utan resonerandet fram till lösningen, med och utan derivata.

Vi ritar funktionen y = 1/*x* och drar sedan en tangent till kurvan och ser till att tangenten skär *x*- och *y*-axeln. Vi ritar sedan en triangel med hörn i origo och i skärningspunkterna med axlarna. Vi mäter sedan triangelns bas, höjd och area.

Genom att dra i tangeringspunkten ser vi att arean för triangeln verkar vara konstant 2 areaenheter.

Kan vi bevisa att det är så?

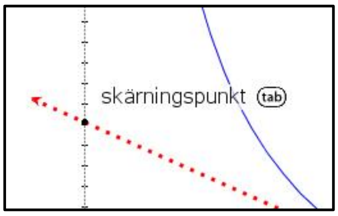


Vi ritar funktionen y = 1/x och drar sedan en tangent till kurvan och ser till att tangenten skär x– och y–axeln. Vi ritar sedan en triangel med hörn i origo och i skärningspunkterna med axlarna. Vi mäter sedan triangelns bas, höjd och area. Genom att dra i tangeringspunkten ser vi att arean för triangeln verkar vara konstant 2 areaenheter.

Kan vi bevisa att det är så?

Instruktioner för ritningen: Rita först funktionen. Med geometriverktygets alternativ Punkter och linjer kan du sedan rita en tangent till kurvan. Markera en punkt på kurvan och tangenten ritas. Dra sedan ut tangentens pilar så att de skär axlarna.

Därefter väljer du *Punkt* bland geometriverktygen och placerar punkter i skärningspunkterna med axlarna.



Rita sedan en triangel med hörn i origo och skärningspunkterna med axlarna. Rita också två linjesegment för triangelns kateter. Dessa linjesegment läggs ovanpå triangelns kanter. Därefter kan du mäta triangelns area och kateternas längder.
Nu kan du dra i tangeringspunkten.

Här visar vi hur man löser problemet med derivata. Derivatan av 1/*x* är -1/*x*².

Nu använder vi *enpunktsformen* $y - y_1 = k(x - x_1)$ i punkten (a, 1/a):

$$y - \frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2}(x - a)$$

Fortsatta instruktioner ges på sidan. Vi använder en del CAS-verktyg, t.ex. *expand* som utvecklar uttryck, och *solve*, som löser ekvationer algebraiskt.

Derivatan av y= 1/x är =−1/x^2 . Vi använder *enpunktformen* för tangentens ekvation i punkten $x = a$. Vi löser sedan ut y.

$\text{solve}\left(y-\frac{1}{a}=\frac{-1}{a^2}\cdot(x-a),y\right)$ ▸ $y=\frac{-(x-2\cdot a)}{a^2}$

Vi förenklar uttrycket:

$\text{expand}\left(y=\frac{-(x-2\cdot a)}{a^2}\right)$ ▸ $y=\frac{2}{a}-\frac{x}{a^2}$

Skärningen med y–axeln (sätt x = 0). Det ger att höjden i triangeln är $\frac{2}{a}$.

Skärningen med x–axeln (sätt y = 0): Det ger basen i triangeln:

$\text{solve}\left(\frac{2}{a}-\frac{x}{a^2}=0,x\right)$ ▸ $x=2\cdot a$

Arean blir då $\frac{\frac{2}{a}\cdot 2a}{2}$ = 2

Problemet kan även lösas utan derivata. Se nästa sida.

Här visar vi också hur man kan lösa problemet *utan* derivata. Här gäller det att förstå att det bara finns en lösning till den ekvation vi ska lösa. Lösningen är ju en tangeringspunkt.

Om vi betecknar triangelns bas (skärningen med x–axeln) med a och triangelns höjd (skärningen med y–axeln) med b kan vi skriva tangentens ekvation på formen $y = kx + m$

som $y= -\frac{b}{a}\cdot x + b$

Observera negativa lutningen.

Eftersom denna linje har en gemensam punkt med kurvan så kan vi finna punkten genom att lösa ut x ur ekvationen

$-\frac{b}{a}\cdot x + b=\frac{1}{x}$

$\text{solve}\left(\frac{-b}{a}\cdot x+b=\frac{1}{x},x\right)$ ▸ $x=\frac{-\left(\sqrt{a\cdot(a\cdot b-4)\cdot b}-a\cdot b\right)}{2\cdot b}$ or $x=\frac{\sqrt{a\cdot(a\cdot b-4)\cdot b}+a\cdot b}{2\cdot b}$

Eftersom det bara finns en lösning till denna ekvation så måste uttrycket under rottecknet *(diskriminanten)* vara noll. Detta inträffar när $a\cdot b$=4. Eftersom arean av triangeln är $\frac{a\cdot b}{2}$ så blir resultatet att arean är 2 a.e.