Innehåll

Referenser:
Edwards/TI-84 Plus Graphing Calculator for Dummies, Wiley Publishing Inc 2004
Morgan/ Explorations, Statistics handbook for the TI 83,Texas Instruments 1997
Hoffman&Hoffman/Explorations, Time, value, money, applications on the TI 83. Texas Instruments 1997.
Nissen&Texas Instruments/ Eksempelsamling til TI 83
Texas Instruments hemsida: education.ti.com
Math Teacher, National Council of Teachers of Mathematics, Technology Tips från olika nummer.

Printed in Sweden by Ljungbergs Tryckeri AB

Förord

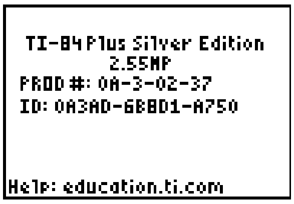
Detta häfte innehåller ett antal tips på hur du kan göra din grafräknare till ett effektivt och användbart hjälpmedel inom olika områden av den matematik som behandlas inom de första kurserna på gymnasieskolan. Det mesta som tas upp ryms inom kurs 1 och 2. Vi har, i de flesta fall, inte delat upp innehållet efter räknarens funktioner utan mer efter matematiska områden. I början av häftet finns dock en del allmänna tips som är användbara oavsett vilken matematik som behandlas. Vissa avsnitt, t.ex. inom sannolikhetslära och kombinatorik, går lite utanför kurserna. Vi tycker dock att det finns anledning att ta upp en del av detta därför att räknaren här en del fantastiska funktioner.

I slutet av häftet visar vi hur man kan kommunicera med datorn via programmet TI Connect™. Vi berättar också något om de applikationer som är förinstallerade på räknaren.

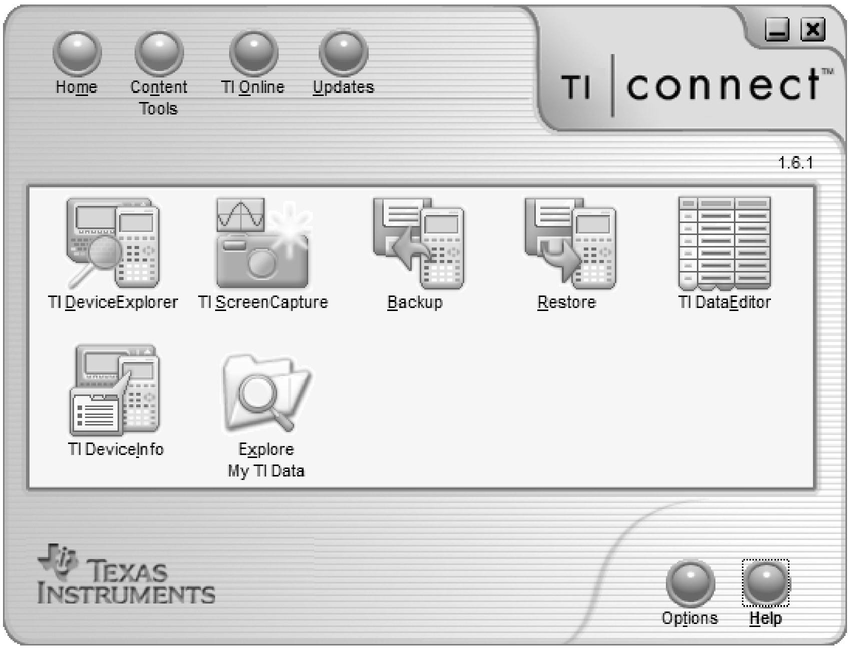
Vi vill betona att vår tanke är att det som tas upp i detta häfte ska berika de matematikmoment som man sysslar med, inte ersätta. Tyvärr kan vi ett sådant här häfte inte ta upp alla de funktioner som finns inbyggda i räknaren. Intresserade kan finna utförliga beskrivningar i handboken till räknaren eller söka i den rikhaltiga flora av böcker och annat material som finns om grafritande räknare. På Internet kan ni söka på "graphing calculator". Från Texas Instruments webbplats, education.ti.com, finns många länkar.
Många av idéerna till detta häfte har sitt ursprung i ett motsvarande danskt material, författat av Knud Nissen. Se referenslistan.

1 Ställa in räknaren

Det här häftet är avsett för dig som har en TI-84 Plus och det senaste operativsystemet **2.55 MP.** Du kan lätt kontrollera vilket operativsystem du har genom att starta räknaren och trycka på [2nd][MEM]. Där väljer du sedan alternativet `1:About`.



Om du behöver ladda ner en uppdatering ska du använda programmet TI Connect, som fritt kan laddas ner från TI:s hemsida education.ti.com. Det är ett mycket användbart program där du bl.a. kan göra skärmbilder från räknaren och ladda ner olika applikationer.

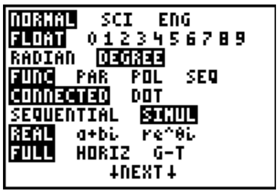


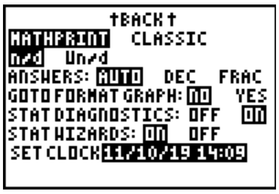
Skärmbilder i detta häfte har tagits med OS-version 2.53MP och senare i antingen MathPrint™- eller Classic-läge. MathPrint betyder att matematiska uttryck ser ut precis som i läroböcker.

Vi går igenom vad detta betyder i början av häftet. Samtliga funktioner är tillgängliga i båda lägena; men skärmarna kan skilja sig något åt beroende på vald lägesinställning. Några exempel belyser funktioner som inte är tillgängliga i tidigare OS-versioner. Om din räknare inte har det senaste operativsystemet kanske vissa funktioner inte är tillgängliga och dina skärmbilder kan se annorlunda ut. Ladda alltså ner det senaste operativsystemet från education.ti.com.

Det första du tänker på när du har en ny räknare i handen är naturligtvis - Hur sätter jag på den? Med [ON]-knappen naturligtvis. Hur stänger jag av den? Om du tittar på räknaren så står det OFF med blå stil ovanför [ON]-knappen. Det betyder att det är en s.k. *2nd-funktion* som du når om du först trycker på [2nd]-knappen uppe till vänster. Det fungerar alltså som [SHIFT]-tangenten på en dator. De ”gröna” funktionerna når du genom att först trycka på [ALPHA]-knappen. Titta gärna också på de första sidorna i den handbok du fick med din räknare.

Tryck nu på knappen [MODE]. Där gör man en del allmänna inställningar. De flesta bryr vi oss inte om nu men några av dem ger vi oss på direkt. Det finns två sidor med olika inställningar. På den andra sidan finns det två inställningar som påverkar inmatningar och resultat på skärmen. Det är MATHPRINT/CLASSIC och ANSWERS. Vi kommer att visa hur det påverkar skärmen i olika exempel.

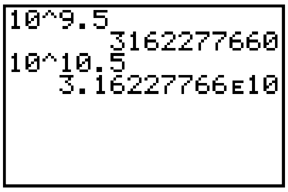


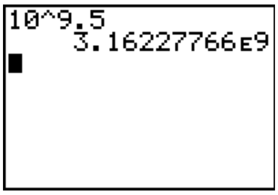


Vi börjar dock med inställningen för hur tal kan representeras På den första raden så ställer man in detta. Normal betyder att det tal vi skriver in visas på det sätt vi är vana vid. Låt nu räknaren stå inställd på FLOAT på andra raden. Senare i kapitlet visar vi vad som händer om man ändrar där.

Om resultatet av en beräkning överstiger 10 siffror, ger räknaren resultatet i exponentiell form. Detta gäller om du har ”normal-inställningen”. Se skärmbilden nedan till vänster. Du kan redan från början ställa in räknaren till att konsekvent ge resultat i exponentiell form genom att välja ”Scientific notation” (Sci) i menyn. Se skärmbilden ovan till höger.

Flytta markören till alternativet Sci på översta raden och tryck sedan på [ENTER]. Vi ska nu räkna nu ut 10^9.5 igen. Nu visas resultatet i exponentiell form med entalssiffra.





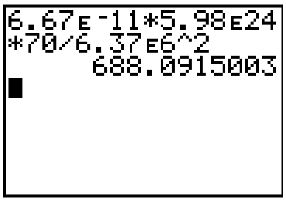
Om du vill skriva in tal i exponentiell form (t.ex. $6{,}02 \cdot 10^{23}$) skriver du så här (siffror visas här inte som tangenter): 6.02 [2nd] [EE] 23. Vi visar med ett exempel:

Dragningskraften i N (newton) mellan jorden och dig kan beräknas enligt formeln

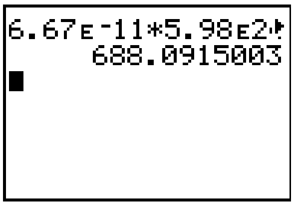
$$F = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}$$

Gravitationskonstanten $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2 kg^{-2}, jordens massa $M = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg, din egen massa $m = 70$ kg och avståndet mellan jordens medelpunkt och jordytan, r, är 6370 km = $6{,}37 \cdot 10^6$ m.

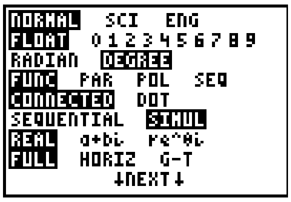
Vi matar nu in vårt uttryck enligt formeln. Tänk på att använda tangenten [(-)] och inte subtraktionstangenten när du skriver in talet $6{,}67 \cdot 10^{-11}$. Dragningskraften blir ca 688 N. Det hade du kanske kunnat räkna ut ändå eftersom du kanske vet att en massa på 1 kg vid jordytan har en tyngd på 9,82 N. ($70 \cdot 9{,}82 \approx 687{,}4$).



När text visas kan TI-84 Plus-skärmen visa högst 8 rader med högst 16 tecken per rad i läge Classic. I läge MathPrint™ visas eventuellt färre rader och färre tecken per rad. Se skärmbilderna nedan. Om man har långa uttryck kan det alltså vara klokt att ha skärmen i Classic-läge. Pilen i den högra bilden visar att man kan skrolla åt höger.



Nu kommer vi till nästa inställning som handlar om hur många siffror som ska visas i resultat. När räknaren gör en beräkning av ett uttryck visas kanske väldigt många siffror och du kanske tycker att det blir lite för mycket. Detta kan vi ställa in på andra raden i inställningsmenyn.



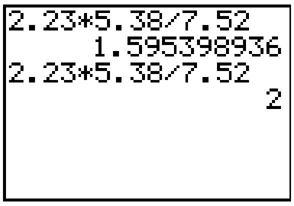
Normalinställningen är oftast **FLOAT** (flytande decimalantal) och den inställningen gör att ett tal visas som ett decimaltal med upp till 10 siffror samt tecken och decimaltecken.

Fast antal siffror (0 till 9) till höger om decimaltecknet får du genom att ställa markören på önskad siffra och sedan trycka på [ENTER].

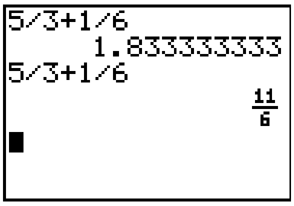
Decimalinställningen gäller för alla tre visningsformaten på första raden i [MODE]-menyn.

Vi visar nu ett exempel på vad som händer vid inställningen **FLOAT** resp. fast inställning av decimaler. Det påverkar inte bara hur resultatet visas i *grundfönstret* utan även på en del andra ställen.

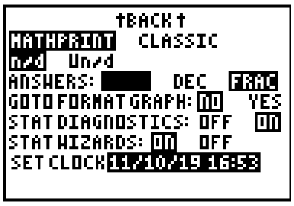
Skriver vi t.ex. in ett uttryck i grundfönstret med inställningen **FLOAT** resp. **0** ser det ut som på skärmbilden nedan. Avrundningen till 0 decimaler ger visserligen ett korrekt avrundat värde men det kan vara väldigt förvirrande. Ett bra tips är att vid beräkningar i grundfönstret ha inställningen **FLOAT** och göra avrundningen utifrån det som visas på skärmen. Avrundningen till fixt antal decimaler kan dock vara bra när man visar beräkningsresultat i andra fönster. Det gäller t.ex. värden som visas när man arbetar med grafer och när man gör beräkningar med datalistor i statistikdelen. Avrundning till två decimaler är lämpligt när man arbetar med beräkningar som handlar om pengar. Om inget annat sägs har vi inställningen FLOAT i fortsättningen.



Om du matar in ett uttryck med bråk så beror resultatet på om vi har ställt in att resultat ska visas som bråk eller decimaltal. Så här ser det ut när vi adderar två bråk.



Först har vi inställningen decimaltal (DEC) och sedan inställningen bråk FRAC. Denna inställning görs på 3:e raden under ANSWERS. Lägg märke till att vi har *MathPrint*-läge, vilket gör att 11/6 visas med rakt bråkstreck.



2 Mer om inmatning av uttryck

Ett *uttryck* är i detta sammanhang en sekvens eller följd av

tal t.ex. **`7*5^2,`**
variabler t.ex. **`2A+B`**
funktioner (med tillhörande argument) t.ex. **`log(200)`**

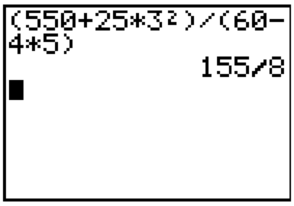
Naturligtvis ska ett *uttryck* uppfylla några syntaktiska regler, och gör det inte det så får man ett felmeddelande - *syntax error.* Den syntax som man ska följa är nästan precis densamma som när du skriver matematik med papper och penna eller med datorn.

Innan vi kommer in på tips för de olika kapitlen så ska vi ta upp lite grand om hur beräkningar går till "inuti" räknaren. Det handlar om i vilken ordning olika räkneoperationer utförs. Det kallar man för *prioriteringsregler*. När du använder din räknare finns det en del saker att tänka på.

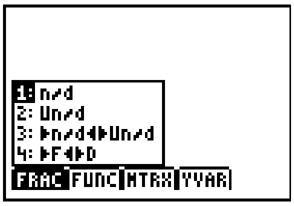
Tänk dig att du ska göra beräkningen

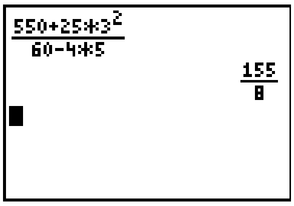
$$\frac{550 + 25 \cdot 3^2}{60 - 4 \cdot 5}$$

Om du skulle skriva in det här uttrycket som det står med täljaren först blir det helt fel. Här ska du ju dividera något som har ett värde (täljaren) med något annat (nämnaren). Då blir man naturligtvis tvungen att skriva i parenteser runt täljare och nämnare i sitt beräkningsuttryck. Vi har i den vänstra bilden nedan använt inställningen `CLASSIC` och `FRAC`. Resultatet visas alltså som ett bråk och inte som ett närmevärde.



Nu ska vi skriva uttrycket som det skrivs i läroböcker. Tryck på [ALPHA] [F1]. Här finns några mallar för att arbeta med bråkuttryck. Välj alternativ 1 genom att trycka på [ENTER]. Då får vi en skärm med ett bråk utan siffror. Skriv nu in uttrycken i täljare och nämnare. Du flyttar markören med piltangenterna. Se högra bilden nedan. Här behöver vi förstås inte använda parenteser. Vi har använt `MATHPRINT`-läge vilket gör att vi får raka bråkstreck i *resultatet*.





Operationerna utförs i följande ordning
1. Parenteser.
2. Potenser
3. Multiplikationer och divisioner
4. Additioner och subtraktioner.

I allmänhet behöver man inte tänka på detta när man gör beräkningar med räknaren. Den prioriterar! Man bör tänka på när man måste sätta ut parenteser förstås eftersom dessa oftast är underförstådda.

Vi ska nu beräkna uttrycket

$$-3{,}17+\frac{2{,}53^2-\sqrt{5{,}25}}{2{,}46}$$

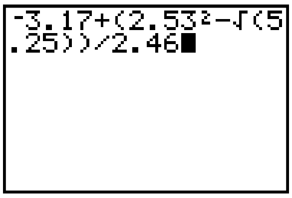
Vi har nu inställningen *CLASSIC*, som är lämplig om man arbetar med längre uttryck.
Först måste du tänka på att det minustecken som står framför 3,17 anger att det är ett negativt tal. På räknaren skiljer man mellan ett minus för att ange ett negativt tal $\boxed{(-)}$ och operatorn minus för subtraktion $\boxed{-}$.

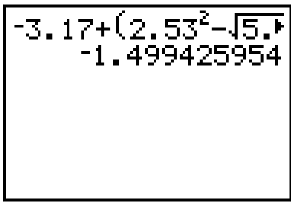
Knappa nu in följande sekvens:

$\boxed{(-)}$ 3.17 $\boxed{+}$ $\boxed{(}$2.53 $\boxed{x^2}$ $\boxed{-}$ $\boxed{\text{2nd}}$ [√] 5.25 $\boxed{)}$ $\boxed{)}$$\boxed{\div}$ 2.46

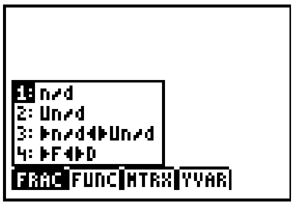
Om du upptäcker att du matat in fel någonstans kan du använda knapparna $\boxed{\blacktriangle}$, $\boxed{\blacktriangledown}$, $\boxed{\blacktriangleright}$ och $\boxed{\blacktriangleleft}$ för att förflytta markören till den plats där felet är. Sedan kan du rätta felet genom att helt enkelt skriva över. Du kan också ta bort det tecken där markören befinner sig genom att trycka på $\boxed{\text{DEL}}$. Du kan också sätta in (inpassa) ett eller flera tecken genom att trycka på $\boxed{\text{2nd}}$ [INS].

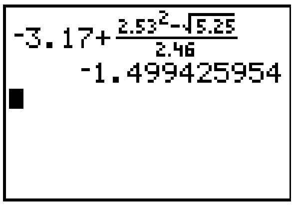
Bilden nedan visar skärmen vid ett korrekt inmatat uttryck. Till vänster har vi CLASSIC-läge och till höger MathPrint-läge. Man få visserligen ett korrekt rottecken men fördelen med CLASSIC-läge är uppenbar eftersom hela uttrycket kan ses på samma skärm.





En riktig snygg variant är, som vi nämnde i förra exemplet, att utnyttja de *mallar* som finns för olika funktioner. Du trycker alltså på $\boxed{\text{ALPHA}}$ [F1] för att få fram mallen för bråk. Tryck på alternativ `1:n/d`.





Nu kan du skriva in ditt uttryck med raka bråkstreck. Börja alltså med att skriva in –3.17 och tryck sedan på alternativ 1:n/d och skriv in resten av uttrycket. Se högra bilden ovan.

Lägg märke till att då du knappade in $\boxed{\text{2nd}}$ [√], i CLASSIC-läge så skrev räknaren √ (. Det betyder att räknaren själv lägger till en vänsterparentes före det tal som den ska dra roten ur.

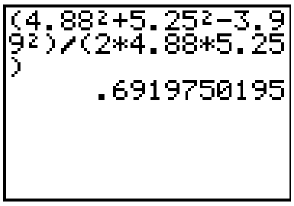
Om du upptäcker ett fel i inmatningen av uttrycket efter det att du tryckt på $\boxed{\text{ENTER}}$ kan du få tillbaka det inmatade uttrycket för redigering igen genom att trycka på $\boxed{\text{2nd}}$ [ENTRY]. Det finns också ett annat sätt som vi tar upp senare. Man kan nämligen *skrolla* genom tidigare inmatningar och resultat genom att trycka på [`PIL UPP`].

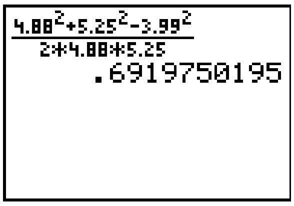
Om du trycker på fel knappar och t.ex. hamnar i en annan meny, kan du alltid komma tillbaka till grundskärmen genom att trycka knappsekvensen [2nd] [QUIT].

Vi ska nu göra en beräkning av det krångliga uttrycket

$$\frac{4,88^2 + 5,25^2 - 3,99^2}{2 \cdot 4,88 \cdot 5,25}$$

I CLASSIC-läge, skriv nu in så som skärmen nedan visar och tryck sedan på [ENTER]. Högra bilden visar hur det ser ut när vi arbetar med bråkmallar.



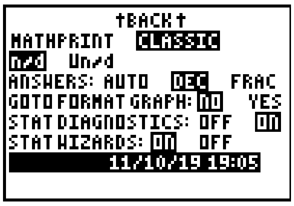


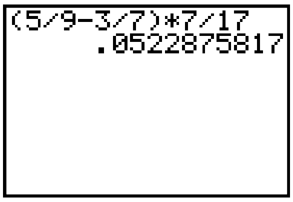
Du förstår säkert att det i CLASSIC-läge här är nödvändigt med parenteser omkring uttrycket i täljaren, men är det lika nödvändigt med parenteser omkring uttrycket i nämnaren. Tänk efter och pröva sedan. Du vet nu att du - om du redan utfört beräkningen – kan *redigera* sista inmatningen genom att trycka på [2nd] [ENTRY] eller också så kan du skrolla uppåt med [PIL UPP] och markera det uttryck du vill ändra och sedan trycka på [ENTER].

3 Bråkräkning

Förenkla uttrycket $\left(\frac{5}{9}-\frac{3}{7}\right)\cdot\frac{7}{17}$ så långt som möjligt.

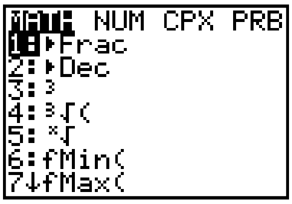
Vi börjar med att mata in uttrycket i räknaren i CLASSIC-läge och inställningen DEC för resultat av beräkningar (se vänstra skärmen nedan) och utför sedan beräkningen:





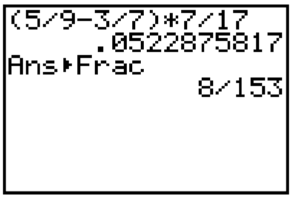
Nu finns det en funktion (▶ **`Frac)`** hos räknaren som omvandlar decimaltal till bråk. Räknaren kan göra denna beräkning om den finner ett enkelt bråk som stämmer överens med decimaltalet. Det finns vissa begränsningar. Du kan läsa mer i Handboken.

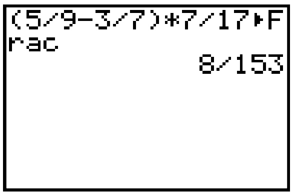
Kommandot ▶ **`Frac`** finner du i [MATH]-menyn. Om du trycker på denna knapp kommer följande meny fram:



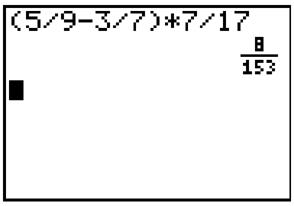
Tryck nu på [ENTER] eller 1 och räknaren svarar då: **`Ans`**▶ **`Frac`**, som kan tolkas på följande sätt: det sist avgivna svaret (resultatet av en beräkning), i detta fall 0.052875817, ska nu omformas till ett bråk.
Tyck på [ENTER] och nu sker beräkningen. Se bilden till vänster.

Du kan slippa beräkningen av decimaltalet genom att direkt skriva som bilden till höger visar.





Nu matar vi in uttrycket med inställningarna `FRAC` och `MATHPRINT` och utför beräkningen.



Vi får direkt ett resultat i bråkform och dessutom ett rakt bråkstreck eftersom vi hade inställningen `MATHPRINT`.

4 Använda svarsknappen vid upprepade beräkningar

I detta avsnitt går vi igenom en jättebra funktion som du kan ha stor nytta av och som hjälper dig att hålla koll på dina beräkningar, speciellt om det handlar om beräkningar i flera led.
När beräkning av ett uttryck utförs genom att du tycker på ENTER, visas naturligtvis resultatet på skärmen men samtidigt sparas resultatet i ett speciellt register som kallas *Ans*. Efter varje beräkning uppdateras detta register så att det alltid rymmer resultatet av den *sista* beräkningen.
Om du t.ex. efter en utförd beräkning trycker på + så svarar räknaren

```
Ans+
```

och det du nu skriver in adderas till Ans. Motsvarande sker om du istället trycker på −, × eller ÷. Om du t.ex. tycker på x^2, svarar räknaren Ans^2. Om du vill använda det värde som ligger lagrat i registret Ans i en ny beräkning så trycker du 2nd [ANS].

Avrunda pengar

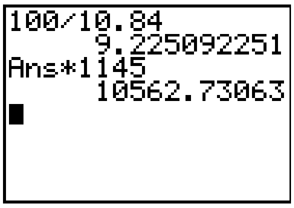
Anta att du köper en datorutrustning vid en resa i ett EU-land. Du betalar 1145 Euro med ett betalkort. Växelkursen vid köpet var 10,80 Euro för 100 svenska kronor. Vad fick man vid växlingen betala för 1 Euro och vad kostar datorn i svenska pengar? Avrunda till hela kronor.

1 Euro kostar

$$\frac{100}{10,84}\text{ SEK} \approx 9,23\text{ SEK}$$

Datorn kostar alltså i svenska pengar $9,23 \cdot 1145$ SEK ≈ 10568 SEK.

Vad är det för konstigt med det här? Vi gör nu beräkningen med räknaren.



Som ni ser har vi *ingångsdata* och *resultatet* av beräkningarna direkt på räknarens skärm. Hur mycket 1 Euro kostar står på andra raden och sedan fortsätter vi beräkningarna med detta värde på rad 3. Resultatet av beräkningarna står sedan på rad 4. Ni ser att vi får resultatet 10563 kr (10562.73063). På grund av att vi gjorde en avrundning när vi beräknade vad 1 Euro kostar så *förstorades* sedan felet i avrundningen 1145 gånger när vi beräknade vad datorn kostade. I detta fall blev det då en skillnad på 10568 kr – 10563 kr = 5 kr. Inte mycket men i ekonomiska sammanhang kan man oftast inte göra så utan måste vara mer exakt.

Med din räknare kan man alltså direkt fortsätta beräkningarna med ett mycket noggrant *delresultat*. Man behöver alltså inte göra avrundningar utan kan fortsätta med det delresultat som ligger lagrat i räknaren.

Upprepade beräkningar

Ett kapital på 500 kr insätts på ett konto som ger 3 % årlig ränta. Beskriv hur kapitalet utvecklas år för år.

1) Först matar vi in 500 och trycker på ENTER.
2) Sedan trycker vi × 1.03 och trycker på ENTER igen.
3) Vi fortsätter att trycka på ENTER.

Resultatet ser du på skärmbilden nedan:

```
             500
Ans*1.03
             515
Ans*1.03
          530.45
Ans*1.03
        546.3635
```

Vad som har hänt är att instruktionen ”sist beräknade värdet multipliceras med 1,03” utförs gång på gång. Det sist beräknade värdet uppdateras varje gång vi trycker på [ENTER].

Efter tre år har således kapitalet vuxit till 546,37 kr. Vi ska se på några ytterligare exempel eftersom Ans-funktionen är mycket användbar.

500 kr sätts in på ett konto i början av varje år. Räntan är 3 %. Visa hur det samlade kapitalet utvecklas.

1) Vi börjar med att mata in 500 och trycka på [ENTER].
2) Sedan trycker vi [×] 1.03 + 500 och avslutar med [ENTER].
3) Vi fortsätter att trycka på [ENTER].

```
                500
Ans*1.03+500
               1015
Ans*1.03+500
            1545.45
Ans*1.03+500
          2091.8135
```

Resultatet syns på skärmbilden ovan. Tabellen ger det samlade kapitalet i början av varje år med början efter 1 år.

Det kan bli lite jobbigt att se så många decimaler i beräkningarna. Här kan det vara lämpligt att t.ex. ställa om till 0 decimaler. Då ser man resultaten i hela kronor, rätt avrundade. Se skärmbilden här till höger.

```
                500
Ans*1.03+500
               1015
Ans*1.03+500
               1545
Ans*1.03+500
               2092
█
```

På samma sätt kan man göra om man t.ex. avbetalar ett lån.

Du lånar 100 000 kr och betalar varje årsskifte av lånet med 10 000 kr inkl. ränta.
Beskriv hur din skuld minskar år från år. Låneräntan är 7 %.

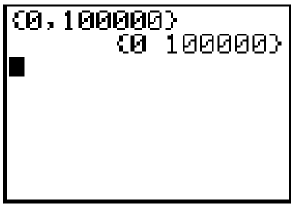
Vi gör precis som förut. Det viktiga uttrycket här är Ans*1.07–10000.
Resultatet syns på skärmen nedan. Efter 3 år är skulden 90 355 kr. Om vi fortsätter att trycka på [ENTER] få vi trycka på [ENTER] sammanlagt 17 gånger innan skulden är mindre än 10 000 kr. Det tar alltså ca 17 år att betala av detta lån. Till höger nedan ser du hur det ser ut när vi tryckt på [ENTER] 17 gånger.

```
          100000
Ans*1.07-10000
           97000
Ans*1.07-10000
           93790
Ans*1.07-10000
           90355
█
```

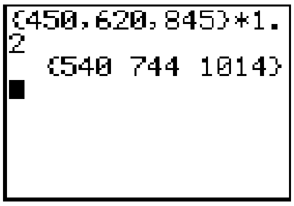
```
           32349
Ans*1.07-10000
           24613
Ans*1.07-10000
           16336
Ans*1.07-10000
            7479
```

5 Listor - göra flera beräkningar på en gång

I exemplet i förra avsnittet kan det vara lite svårt att hålla reda på hur lång tid det tar att betala av skulden. Här är ett litet knep för detta. Vi inför då något som heter *listor* som är mycket användbart. Titta på skärmbilden nedan.

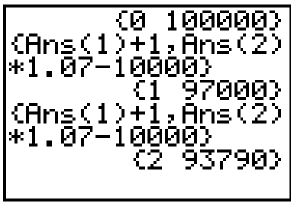


Vi har skrivit in något mellan hakparenteser. Det som finns innanför parenteserna med ett kommatecken emellan är just en *lista*. Hakparenteserna når du genom att trycka på [2nd] [(].
Om du t.ex. ska multiplicera talen 450, 620 resp. 845 med 1,2 så kan du göra så här:

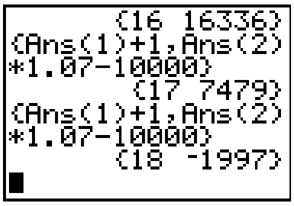


Vi får ut resultaten av tre beräkningar på en gång. Vi går nu tillbaka till vår uppgift med skulden på 100 000 kr.

Titta på skärmbilden nedan. Vi har ställt in antalet decimaler till 0. Hela kronor alltså!

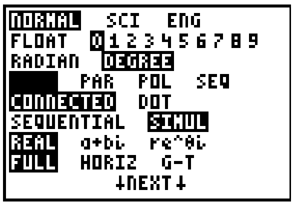


Utifrån vår ursprungliga lista {0, 100000}har vi lagt till 1 till det första elementet i listan. Detta är vårt ***räkneverk***. Vi har multiplicerat det andra elementet med 1.07 och dragit ifrån 10000. Sedan har vi tryckt på [ENTER]. Då får vi fram den återstående skulden efter 1 år. Om vi trycker på [ENTER] en gång till så får vi den återstående skulden efter två år osv. Om vi fortsätter att trycka på [ENTER] så ser vi skulden för de efterkommande åren. Efter 17 år har vi nästan betalat tillbaka allt. Se skärmbilden nedan.



6 Arbeta med formler

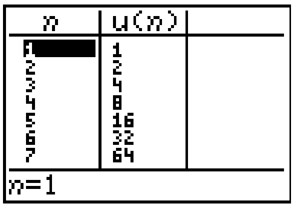
I detta kapitel ska vi ta upp upprepade beräkningar och exemplet med skulden på 100 000 kr en gång till. Det smartaste sättet att se listan med den återstående skulden år för år gör man dock på ett annat sätt. Vi ska då göra en speciell inställning. Tryck på MODE. På fjärde raden, som handlar om inställningar vid grafritning, ställer du in läget **SEQ**. SEQ står för det engelska ordet *sequence*, som betyder sekvens eller i matematiksammanhang *talföljd*.



Vi tar först två andra exempel på talföljder. I första exemplet utgår vi från en första term 1 och multiplicerar sedan med 2 för att få nästa term. Vi upprepar detta för de efterföljande termerna. Vi får då talföljden 1, 2, 4, 8, 16 osv.

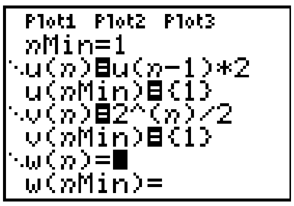
Tryck nu på knappen Y=. Nu ska vi skriva in en formel för vår upprepade beräkning. Vi startar vårt räkneverk vid 1 genom att skriva ***n*****MIN=1.** Gå sedan till nästa rad och skriv in enligt skärmbilden nedan till vänster. **u** når du genom att trycka 2nd [u]. Det står ju ett litet **u** i blå stil ovanför knappen med siffran 7. **n** når du genom att trycka på knappen X,T,Θ,*n*. Den knappen används mycket när vi kommer att arbeta med funktioner och grafer.

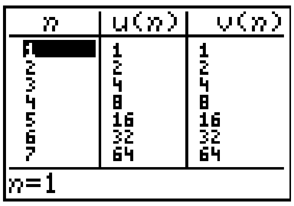
Det vi skrivit in på andra raden betyder att vi ska multiplicera med 2 för att få nästa term. På tredje raden skriver vi in startvärde, dvs. 1. Vi har här en formel i s.k. *rekursiv* form. Vi får nästa term genom att utgå från den föregående.
Nu trycker vi på 2nd [TABLE]. Då dyker en tabell upp på skärmen. Den visar de första termerna i talföljden.



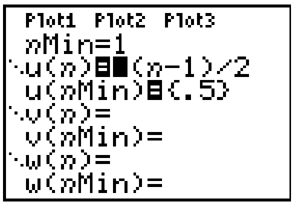
Om du inte får denna tabell kan det bero på att du har en annan tabellinställning. Tryck då på 2nd [TBLSET] och ställ in **TblStart =1** och ∆ **TBL=1**.

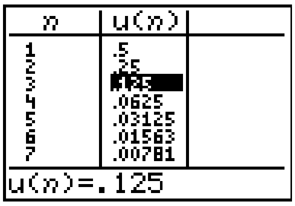
Vi kan också skriva formeln på direkt sätt. Titta på inmatningsfönstret nedan. Talföljden 1, 2, 4, 8 osv. kan man alltså få direkt med formeln v(*n*) = $2^n/2$. Om vi trycker på 2nd [TABLE] får vi följande resultat:





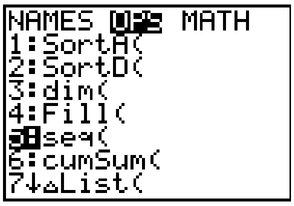
I nästa exempel ska vi istället halvera istället för att dubbla varje gång. Vi vill ha följden 1/2, 1/4, 1/8 osv. I denna följd ska vi sedan beräkna summan. Då kan vi skriva in följande:



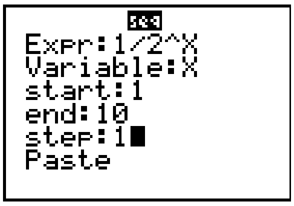


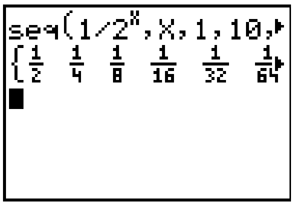
Vi trycker sedan på [2nd] [TABLE]. Vi får då tabellen ovan. Inställning av tabeller kan du göra med [2nd] [TBLSET].

Det finns ett annat sätt att skapa denna talföljd. Räknaren har speciella funktioner för att hantera och göra beräkningar på listor. Tryck på [2nd] [LIST] först. Då får du följande fönster:

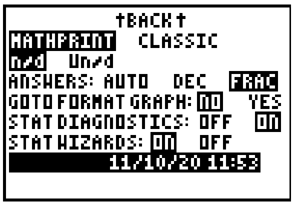


Välj nu `OPS` (Förkortning för OPTIONS som betyder alternativ) och sedan nr `5:seq(`.
Då får vi följande fönster för att mata in våra värden. Flytta markören till Paste och tryck på [ENTER]. Ny dyker inmatningsuttrycket och resultatet upp på skärmen. Se högra bilden nedan.

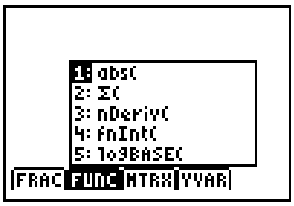


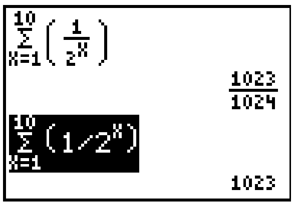


Lägg märke till att vi nu har inställningar MATHPRINT och FRAC, dvs. att vi vill att resultat ska visas i bråkform och skrivas med rakt bråkstreck. Så här ska MODE-menyn ut då:



Nu ska vi beräkna summan för de tio talen. På räknaren finns 4 st genvägar med mallar för att utföra några vanliga operationer. Man når dessa genom att trycka [ALPHA] [F1] till [F4]. Tidigare tog vi upp mallar för att skriva bråk, som man når med [ALPHA] [F1]. Tryck nu på [ALPHA] [F2].

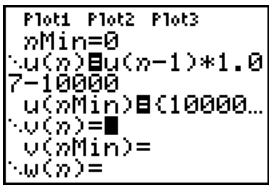


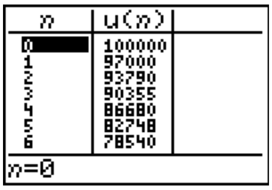


Vi får en meny för några vanliga matematiska operationer. Välj nu alternativ 2 och fyll i mallen. Använda piltangenterna för att flytta dig i mallen och tryck på [ENTER]. Vi får resultatet 1023/1024. Vi visar på skärmbilden ovan uttrycket både med rakt och snett bråkstreck. Ska du skriva med rakt bråkstreck så trycker du, som vi nämnde tidigare, på [ALPHA] [F1].

Tillbaka till skulden på 100 000 kr

Nu kan vi gå tillbaka till vårt efterhängsna exempel med skulden som ska återbetalas. Gå till MODE och ställ in på `SEQ` på rad 4. SEQ står för sequence som betyder talföljd. Skriv nu in enligt fönstret till vänster nedan.

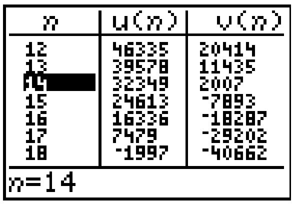




På tredje raden står det 100000 som startvärde även om alla siffror inte ryms. **`nMin`** har vi satt till 0. Du kommer att förstå varför när du tittar på tabellen till höger ovan. Tryck nu på 2nd [TABLE]. Nu dyker en tabell fram på skärmen på en gång. Vi bläddrar oss ner i tabellen genom att trycka på ▼ uppe till höger på räknaren. Det är den stora grå knappen.

Nu ser vi resultatet direkt utan att behöva trycka på ENTER en massa gånger. Att vi började med 0 som startvärde beror på att skulden vid tiden 0 år är 100 000 kr.

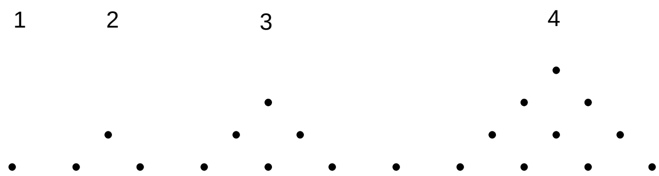
Vi kan lägga till formeln för en talföljd till genom att t.ex. lägga in räntan 5 % istället för 7 %. Då använder vi funktionsknappen **`v`** som du når genom att trycka på 2nd[v]. Om vi nu trycker på 2nd [TABLE] så kommer tabellen nedan fram:



Vi ser att vid räntan 5 % så har vi betalt tillbaka skulden efter ca 14 år. Det återstår då en sista inbetalning på 2007 kr.

Nu ett sista exempel på formler.

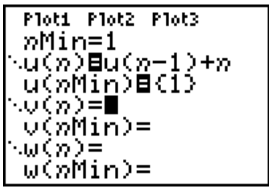
Triangeltal



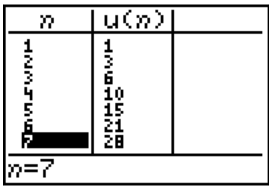
Titta på triangelmönstren nedan där vi visar de första fyra stegen. Antag att vi vill veta hur många prickar det är i figur nr 10?

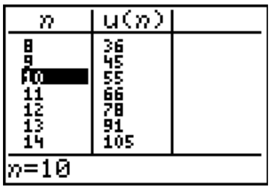
Om vi tittar på figur nr 3 t.ex. så ser vi att antalet prickar där är antalet prickar i föregående figur, dvs. figur nr 2, plus det antal prickar som figurnumret anger (3 st).

Samma sak gäller om vi går till figur nummer 4. Antalet prickar där är antalet prickar i figur nr 3 plus 4 st till eftersom det är figur nr 4. (u(4) = u(3) + 4). Vi har alltså funnit ett mönster och kan skriva in en rekursiv formel. Se inmatningsmenyn nedan.



Trycker vi nu på 2nd [TABLE] så får vi direkt antalet prickar i de första 7 triangeltalen. Bläddrar vi oss ner så ser vi att antalet prickar i figur nr 10 är 55 st.



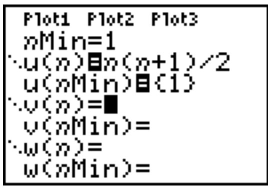


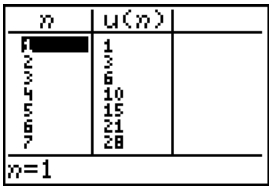
$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$

Man kan visa att en formel för antalet prickar $u(n)$ i figur n är

$$u(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

Om vi matar in denna formel direkt istället i inmatningsfönstret får vi samma resultat som med när vi skrev formeln i rekursiv form.

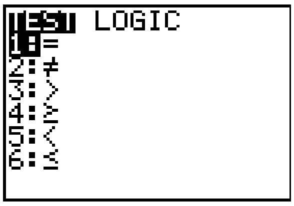


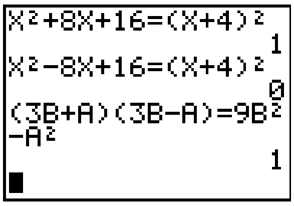


6 Algebra och ekvationer

När man jobbar med algebra så använder man inte räknaren så mycket. Det mesta arbetet görs med papper och penna. Det finns dock några saker där räknaren kan användas. Man kan nämligen *kontrollera* att man har räknat rätt. Det kan handla om algebraiska omskrivningar och faktorisering och ekvationslösning.

Nedan ser du 3 exempel som handlar om *kvadreringsreglerna* och *konjugatregeln*. Det är alltså inga ekvationer utan s.k. *identiteter*; något som alltid gäller. 1 betyder att likheten stämmer och 0 att det inte gäller. Likhetstecknet når du genom att trycka 2nd [TEST]. När test-fönstret öppnas väljer du `1:=` genom att trycka på ENTER. Då kopieras likhetstecknet in i grundfönstret.





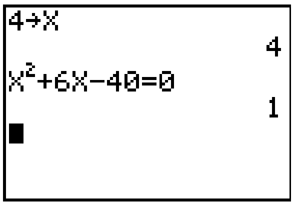
När det gäller lösning av andragradsekvationer kan man göra på liknande sätt. Först får man se till att spara sina lösningar i en variabel, t.ex. X.

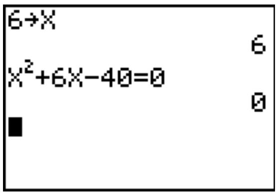
Anta att vi löst andragradsekvationen

$$x^2 + 6x - 40 = 0$$

och fått lösningarna 4 och 6. Vi vill kontrollera dessa lösningar och då gör vi så här:

Spara först den första lösningen i variabeln X. Skriv sedan in ekvationen och tryck på ENTER. Räknaren svarar 1 vilket säger att svaret är rätt. På samma sätt gör vi med den andra lösningen. Den första lösningen var alltså rätt och den andra fel.





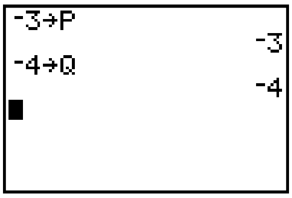
Bestäm rötterna till andragradsekvationen $x^2 - 3x - 4 = 0$.

Andragradsekvationen $x^2 + px + q = 0$ har lösningarna

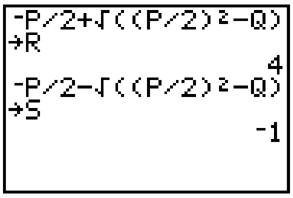
$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

I exemplet ovan är då $p = -3$ och $q = -4$.

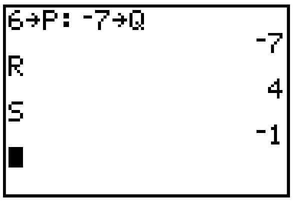
På räknaren kan du lagra talvärden i variabler som betecknas A, B, ... Z. Titta på räknarens "gröna" funktioner, som du når genom att först trycka på ALPHA. Vi visar nu hur man lagrar värdena –3 och – 4 i variablerna P och Q. För att lagra något trycker du på STO▶, så knapp-sekvensen för att lagra – 3 i variabeln P blir då (-) 3 STO▶ ALPHA [P]. Se skärmbilden på nästa sida.



För att beräkna rötterna till andragradsekvationen matar du sedan in formlerna för rötterna, lagrar värdena i en ny variabel och trycker på [ENTER]. Du behöver naturligtvis inte skriva formeln två gånger. Tryck [2nd] [ENTRY] för att ta fram uttrycket igen och byt plustecknet mot ett minustecken. Se skärmbilden nedan. Rötterna R och S är $x = 4$ och $x = -1$.



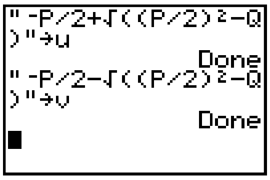
Vi ändrar nu värdena P och Q till 6 resp. – 7 för att lösa ekvationen $x^2 + 6x - 7 = 0$.



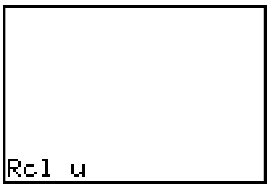
Vi ser att värdena för R och S inte ändras. Detta visar att det bara är *talvärden* som kan lagras i en variabel.

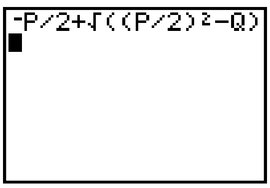
För att åstadkomma en uppdatering av variablernas värden ska vi titta lite på bokstäverna u, v och w, som finns som [2nd]-funktion ovanför knapparna [7], [8], och [9]. Dessa bokstäver kan användas till att ”gömma” formler.

Uttrycken för rötterna till andragradsekvationen kan lagras i u och v. Glöm inte citationstecken omkring uttrycken. ” når du genom att trycka på [ALPHA] och sedan på [+]. Se skärmbilden till vänster nedan.
Därefter kan vi skriva u och v, trycka på [ENTER] och få rötterna beräknade. Se bilden nedan till höger.



För att se vilka formler som ligger ”gömda” i u och v gör vi på följande sätt: tryck [2nd] [RCL] [ALPHA] [u]. RCL står för ”kalla fram”. Se skärmbilden nedan till vänster. Tryck därefter på [ENTER]. Då kommer formeln fram på skärmen. Se skärmbilden till höger.





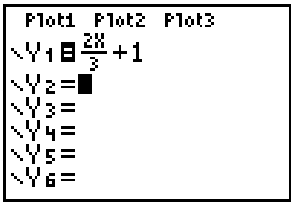
8 Grafritning

I detta kapitel är huvudsyftet att du på olika sätt ska bli bekant med hur man arbetar med funktioner. Det är faktiskt meningen att du också ska göra en hel del arbete ”för hand”. Här tar vi upp en del om hur räknaren hanterar funktioner i allmänhet och blir ibland ganska tekniska.

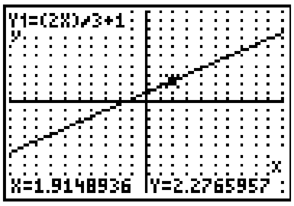
Genom att trycka [Y=] får du fram en editor för inmatning av funktioner. I editorn kan du flytta markören åt olika håll med knapparna [▲], [▼], [▶] och [◀]. Om det finns någon funktion du vill ta bort ställer du markören på den rad där funktionen ska bort, därefter trycker du på [CLEAR].

Räta linjer

För att mata in variabeln *x* i dina funktioner tycker du på [X,T,Θ,*n*]. Skriv nu in funktionen *y* = 2/3*x* – 1 på första raden vid **Y1**. Vi har här skrivit med rakt bråkstreck.



Standardinställningen för räknarens graffönster är från – 10 till 10 både i *x*- och i *y*-led. I fönstret nedan har vi ritat funktionen. Man trycker då på [GRAPH]. Med räknarens funktion [TRACE] kan man ”spåra” i en ritad graf och i fönstrets nederkant se *x*- och *y*-koordinaten för funktionen. I bilden nedan har vi försökt att hamna så nära *x* = 2 som möjligt.

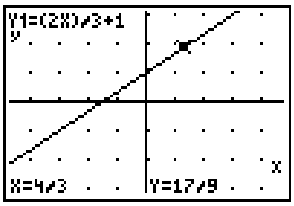


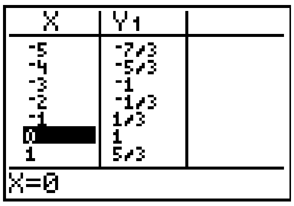
I graffönstret är avståndet från en pixel till nästa

i *x*-led: $\Delta x = \dfrac{x_{\max} - x_{\min}}{94}$ i y-led: $\Delta y = \dfrac{y_{\max} - y_{\min}}{62}$

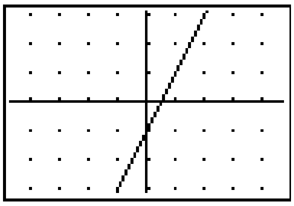
I standardfönstret, som i *x*-led går från – 10 till 10, blir då avståndet mellan intilliggande punkter 20/94 ≈ 0,2127...

Om vi t.ex. ställer in fönstret Xmin = – 4,7, Xmax = 4,7 blir avståndet från en pixel till nästa 0,1. På räknaren kan du trycka på [ZOOM] och sedan **ZDecimal** för att ställa in fönstret så att avståndet från en pixel till nästa blir 0,1 både i *x*- och i *y*-led. Lägg märke till att vi kan *skriva in x*-värdet i bråkform och också få resultatet i samma format. Vi får alltså ett *exakt y*-värde. I detta läge är en längdenhet lika lång på båda axlarna. I standardinställningen är en längdenhet på *x*-axeln *inte* lika lång som en längdenhet på y-axeln.



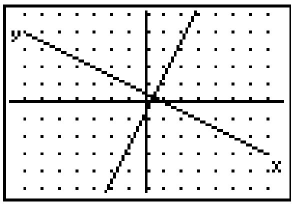


Genom att trycka på [2nd][TABLE] kan vi också få en funktionstabell. Se högra bilden ovan.



Bilden ovan visar funktionen $y = 2x - 1$ i ett *kvadratiskt* rutnät.

Ska vi t.ex. rita de *vinkelräta* linjerna $y = 2x - 1$ och $y = -0{,}5x + 1$ är det viktigt att 1 längdenhet är lika lång på båda axlarna. Annars blir linjerna på skärmen inte vinkelräta mot varandra på räknarens display. Vi har här då ställt in `Zdecimal` under [ZOOM].



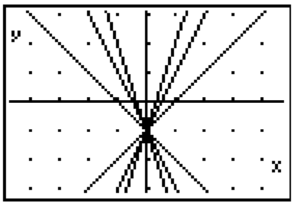
Genom att trycka på [TRACE] så kan vi stega oss fram längs en av linjerna. Hoppet med inställningen **ZDecimal** är 0,1. Vi kan också direkt skriva in *x*-värdet och trycka på [ENTER]. Du hoppar till den andra linjen genom att trycka på [▲] eller [▼].

Under [ZOOM] finns det 17 st olika inställningar för fönstret. Det finns bl.a. ett antal ”bråkinställningar” som samtliga har kvadratiska rutnät, dvs. en längdenhet är lika lång på båda axlarna. Man kan naturligtvis ställa in sitt eget fönster genom att trycka på [WINDOW].

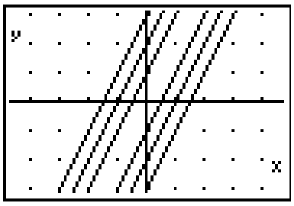
Med hjälp av en *lista* kan vi också rita en skara av linjer. Om vi matar in

Y1={-3,-2,-1,1,2,3}*X-1

får vi 6 st olika linjer med olika lutning men som alla skär *y*-axeln vid – 1.



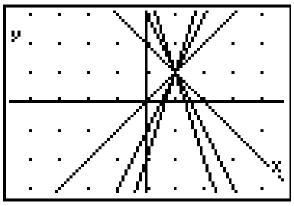
Y1=2X-{-3,-2,-1,1,2,3} ger följande skärmbild



Nu kommer här avslutningsvis en uppgift att fundera över. I editorn för funktionsinmatning skriver du in följande uttryck:

Y1={-3,-2,-1,1,2,3}*(X-1)+1

Vi har här skapat en lista i funktionsuttrycket och kan då rita 6 funktioner på en gång. Den första funktionen är Y1 = – 3∗(X–1) + 1, Om vi nu ritar de räta linjerna med inställningen **ZDecimal** i [ZOOM]-menyn ser det ut så här:



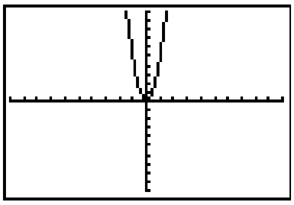
Vilken gemensam egenskap har dessa 6 räta linjer? Det allmänna uttrycket för de funktioner vi matat in är

Y1= k(X–a) + b.

Vad betyder k, a och b i uttrycket?

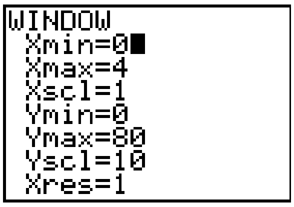
Funktioner och kurvor av andra graden

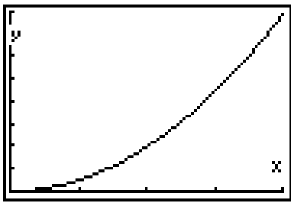
Om du nu matar in funktionen Y1=9.82X^2/2 och ritar den med standardfönstret ser det ut så här:

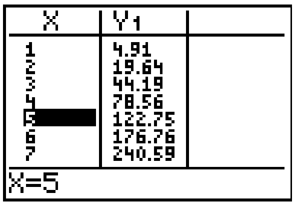


Här handlar det om fallsträckan för en kropp som faller fritt. Y1 är fallsträckan och *x* är tiden i sekunder. Vi ska rita en graf över fallsträckan för tiden 0 till 4 sekunder. Det gäller nu att ställa in fönstret på ett bra sätt. Det finns visserligen en massa inställningar för zoomning av grafer men det bästa sättet här är att göra en beräkning av *y*-värdet för *x* = 4.
Eftersom vi redan matat in funktionen är då det snabbaste sättet att trycka på 2nd [TABLE]. Då ser man funktionsvärdena och kan direkt läsa av funktionsvärdet för *x* = 4. Det går naturligtvis också att direkt från grundfönstret göra en beräkning. I tabellen ser vi att fallsträckan är ca 79 m efter 4 sekunder.

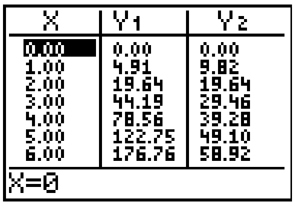
Om man ställer in graffönstret enligt nedan får man en bra graf. Vi har inte något rutnät nu utan bara axelmarkeringar.

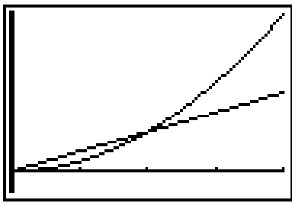




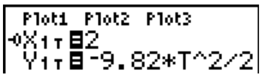


Vi matar in funktionen Y2 = 9.82X och ritar den i samma diagram. Funktionen är *hastigheten* i m/s vid olika tider för en kropp som faller fritt. Att kurvan och linjen skär varandra efter 2 sekunder betyder inget särskilt eftersom det handlar om olika saker – fallsträcka och hastighet. Vi får en tabell om vi trycker på 2nd [TABLE]. Vi ser att efter 2 sekunder så är fallsträckan 19,64 meter och hastigheten är 19,64 m/s.





Det finns ett verkligt smart sätt att inte bara visa hur fallsträckan t.ex. beror av tiden utan man kan faktiskt med räknaren visa själva *rörelsen*. Vi gör en speciell inställning på räknaren. Tryck på [MODE]. På fjärde raden, som handlar om olika inställningar för grafritning, ställer du in på **PAR** som betyder parameterform. Med denna inställning kan man skriva in formler som anger hur *x*- och *y*-koordinaten beror av variabeln T, tiden.

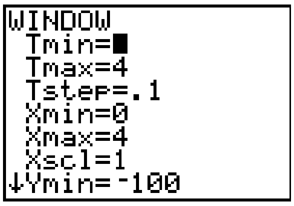


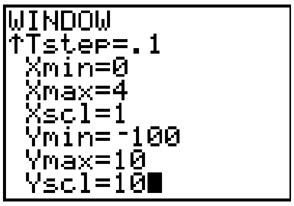
X1T sätts till 2. Det har bara att göra med läget på skärmen. Vi ska ju visa en fallrörelse och då sker den vertikalt längs *y*-axeln.

Y1T skriver du in enligt inmatningsrutan. Det är ju samma formel som förut egentligen men här får man ett T när man trycker på [X,T,Θ,n]-knappen. Dessutom har vi lagt in ett negativt tecken framför formeln. Tänk på att negativt tecken anges med [(-)]. Det negativa tecknet framför uttrycket har att göra med att rörelsen sker nedåt. Du kommer att förstå när vi ritar rörelsen.

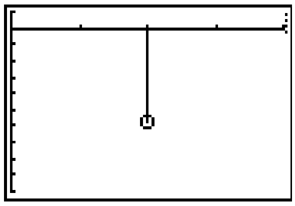
En sak som du kanske inte uppmärksammat är att man kan ställa in hur linjer och kurvor ska ritas på skärmen. I inmatningsfältet på första raden, där det nu står 2, kommer du till olika plottningsalternativ om du flyttar dig längst ut till vänster med [◄]. Genom att upprepade gånger trycka på [ENTER] bläddrar du fram olika alternativ. Välj alltså det alternativ som ser ut som en nyckel ().

Nu ska vi ställa in ett bra fönster för att visa rörelsen. Tryck på [WINDOW]. Alla inställningar får inte plats i på en skärm så vi visar det med två st.





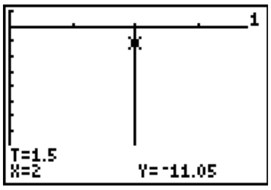
Tiden **T** är mellan 0 och 4 sekunder. Tstep anger hur snabbt vi ska visa rörelsen. **Xmin** och **Xmax** är bara inställningar för att ställa in ett bra läge på skärmen. **Ymin** och **Ymax** sätts till – 100 till 10. Vi ska ju visa en rörelse som sker lodrät nedåt. Så var det klart.



Vi har på bilden här fryst rörelsen genom att trycka på [ENTER]. Om man trycker på [ENTER] igen fortsätter linjen med den lilla bollen sitt fall nedåt.

Du märker kanske att det går fortare och fortare. Det är ju en accelererad rörelse vi visar.

Tryck nu på [TRACE] och bläddra dig framåt 0,1 sekunder i taget. Vi hade ju ställt in **Tstep** till 0,1. När du stegar dig fram ser du att ”hoppen” blir större och större.



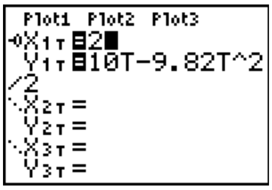
Om du vill ha större steg så ändrar du **Tstep**.

En flicka kastar en boll rakt upp luften med begynnelsehastigheten 10 m/s och fångar den på samma höjd när den kommer ner igen. Hur länge är bollen i luften? Visa också själva rörelsen.

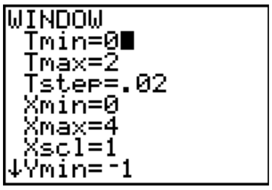
Här ska man använda det välkända sambandet från fysiken

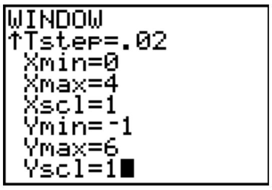
$$s = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \quad \text{med } g = 9{,}82 \text{ och } v_0 = 10.$$

Tryck sedan på knappen [Y=] och skriv in enligt skärmbilden nedan.

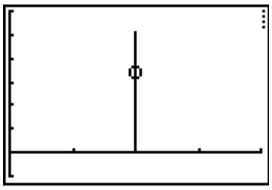


På första raden har vi som förut ställt in ett bra läge på skärmen för det vi ska visa. Ställ nu in fönstret enligt skärmbilderna nedan.

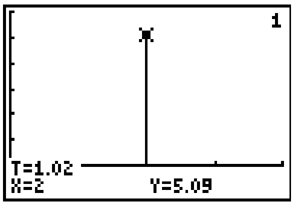




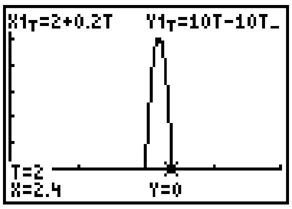
Nu ritar vi grafen. Bollen åker upp i luften och sedan ner igen.



Vi kan spåra i grafen och vi ser att bollen vänder efter ungefär 1 sekund. Se skärmbilden nedan.



Rita nu grafen igen. Nu ser du bollen röra sig uppåt med avtagande hastighet, vända, och sedan falla tillbaka igen med stigande hastighet. Du kan stanna och starta rörelsen genom att trycka upprepade gånger på [ENTER].



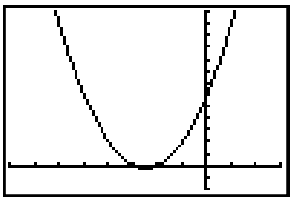
Om vi ger bollen en ”liten vindskjuts” åt höger, t.ex. genom att skriva **X1T=2+0.2T**, får vi bilden ovan. Bollen ramlar då inte ner i exakt samma bana som den kastades upp i. Den vertikala rörelsen påverkas dock inte.

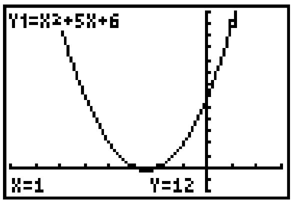
9 Beräkningar av funktionsvärden, nollställen och minsta och största värde

Beräkna funktionsvärdena *f*(1) och *f*(–1), nollställen och minimipunkt för andragradskurvan $g(x) = x^2 + 5x + 6$.

För att kunna se funktionsvärdena, nollställena och minimipunkten i grafen ska vi först ställa om vårt fönster något.

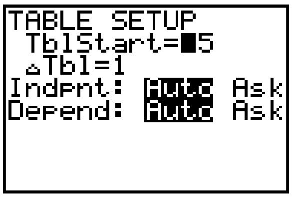
Se skärmbilden nedan till vänster. Genom att trycka på [TRACE] kan vi följa kurvan och se *x*- och *y*-värden längst ner på skärmen. Man kan få funktionsvärdet till vilket *x*-värde som helst genom att direkt skriva in t.ex. 1 och trycka på [ENTER]. Då får man *y*-värdet uträknat direkt. Se bilden till höger nedan. På samma sätt gör man för *x* = – 1 och funktionsvärdet blir då 2. Pröva själv.

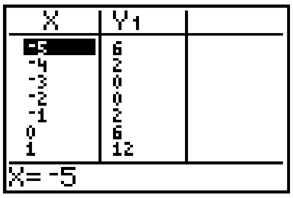




Det finns andra sätt att direkt se funktionsvärden för olika *x*-värden. Vi ska skaffa oss en *värdetabell*. Först ska vi göra in inställning av hur tabellen ska presenteras.

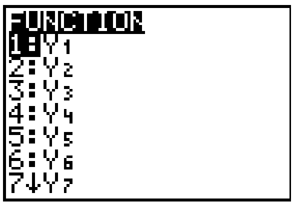
Tryck först på [2nd] [TBLSET]. Då kommer en meny fram. Se bilden nedan till vänster. I menyn ska vi ställa in var tabellen ska börja och hur stor differensen ska vara mellan *x*-*värdena*. Fyll i som bilden visar. Därefter trycker du på [2nd] [TABLE]. Då får man en tabell. Se bilden nedan till höger.

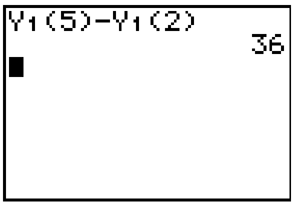


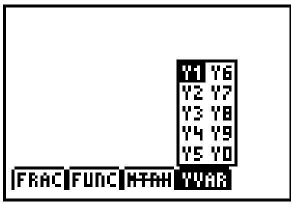


Nu kan vi direkt se funktionsvärdena för *x* = – 1 och *x* = 1.

Det finns faktiskt några sätt till att beräkna funktionsvärden, t.ex. om man vill använda funktionsvärden i beräkningar. Gå till grundfönstret genom att trycka på [2nd] [QUIT]. Tryck sedan på knappen [VARS] och sedan på [▸] för att gå till **Y-VARS**. Då får du en lista med alla funktioner man kan mata in. Tryck på [ENTER] när markören är vid **Y1**.



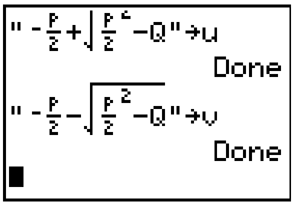




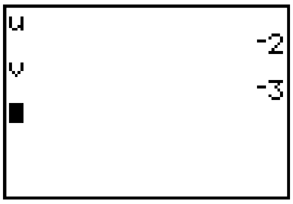
Då inkopieras **Y1** till grundfönstret. Vi kan t.ex. använda oss av detta för att beräkna skillnaden mellan *f*(5) och *f*(2). Man kan också använda mallen för funtioner. Tryck på [ALPHA] [F4]. Sedan kan du kopiera in Y1 till grundfönstret. Se högra skärmen ovan.

Nu ska vi beräkna nollställena eller ekvationens rötter. Tidigare har vi algebraiskt och med hjälp av räknaren gjort detta. Vi lagrade först koefficienterna p och q (om andragradsekvationen skrivs $x^2 + px + q = 0$) i variablerna P och Q och lösningarna i variablerna **`u`** och **`v`**. Låt oss se igen. Om du inte har kvar formlerna nedan kan du skriva in dem igen och lagra dem i **`u`** och **`v`**.

Observera att vi har använt räknarens mall för bråk (ALPHA [F1]) när vi skrivit in formlerna.

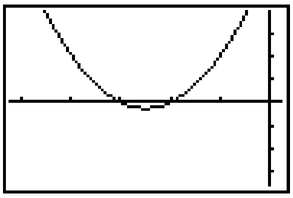


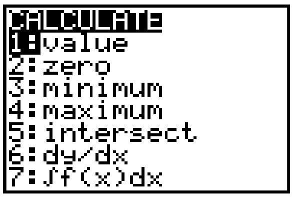
Koefficienterna är nu 5 och 6. Se vänstra bilden på nästa sida. Därefter kan vi ”plocka fram” lösningarna. De ligger i variablerna **`u`** och **`v`**. I högra bilden ser vi lösningarna.



En andragradsekvation kan vi alltid algebraiskt hitta lösningarna till. Har man en ekvation av högre grad kan det vara svårare. Då måste man ofta ta till en numerisk metod.

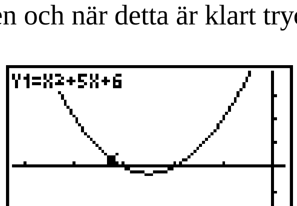
Nu visar vi också den inbyggda *numeriska* metod som finns på räknaren. Först förstorar vi området kring nollställena med **`Zoom In`**. Se vänstra bilden nedan.

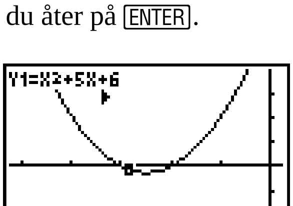




Nu trycker vi 2nd [CALC]. Då får vi åter fram menyn med olika ”calculus”-verktyg. Se högra bilden ovan.

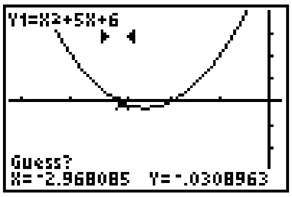
Välj alternativ **`2:zero`** genom att trycka på 2. Först får vi en fråga om att ställa in den vänstra gränsen i det intervall som ska genomsökas. Vi använder piltangenterna ◂ och ▸ och trycker sedan på ENTER. Då får vi en fråga om att ställa in den högra gränsen. Vi gör likadant igen och när detta är klart trycker du åter på ENTER.

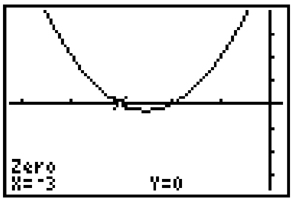




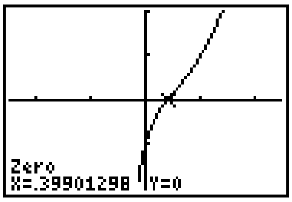
Nu får man en möjlighet att själv gissa var nollstället finns. Det kan ju eventuellt finnas flera nollställen i det valda intervallet.

Använd [◄] och [►] igen. Tryck därefter på [ENTER]. På räknaren kommer snabbt ett numeriskt svar på ett nollställe i det valda intervallet. I det här fallet få vi ett exakt värde.

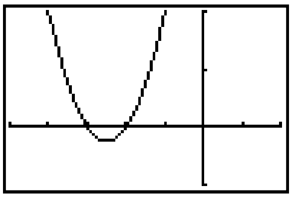


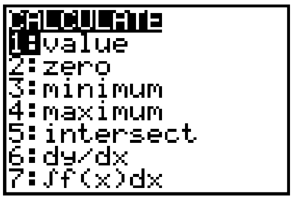


På samma sätt kan det andra nollstället hittas. Nu var det här en ganska enkel andragradsfunktion men man kan ju tänka sig en betydligt ”svårare” funktion. Tänk dig t.ex. att du ska lösa ekvationen $x^2 - 10^{-2x} = 0.$ Räknaren ger den numeriska lösningen $x \approx 0{,}399$.

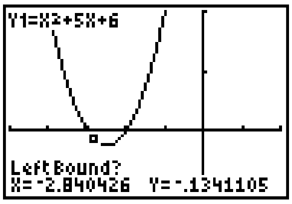


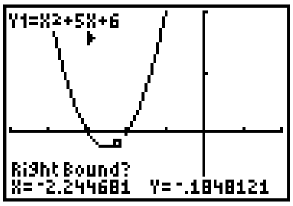
Nu ska vi beräkna funktionens minimipunkt. Vi ”plockar fram” en bra graf av funktionen på skärmen igen och trycker på [2nd] [CALC] igen.

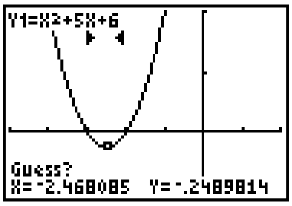


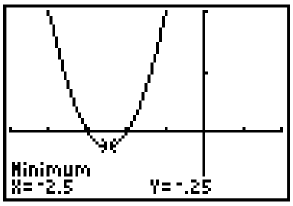


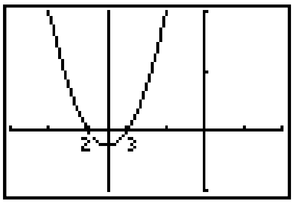
Välj nu alternativ **`3:minimum`** och tryck sedan [ENTER]. Nu får vi frågor om att ställa in vänster gräns, höger gräns och ange en gissning. Vi använder [◄] och [►] för att ställa in gränser och ange en gissning. Efter varje gång vi angett ett svar trycker vi på [ENTER].











Vi får svaret $x = -2{,}5$ och $y = -0{,}25$. Hade vi haft inställningen att svar ska visas som bråk hade vi fått resultatet – 1/4 för *y*-värdet. Vi kan dra slutsatsen att det stämmer eftersom alla andragradskurvor är *symmetriska* kring en lodrät linje genom maximi- eller minimipunkten. Tidigare bestämde vi ju funktionens nollställen till $x = -3$ och $x = -2$. Av symmetriskäl vet man då att minimipunkten har *x*-koordinaten – 2,5.

En *algebraisk* metod är att skriva om funktionen

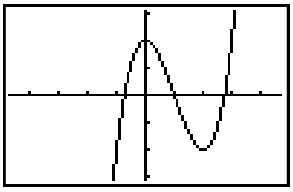
$$y = x^2 + 5x + 6 \text{ som } y = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - 0,25.$$

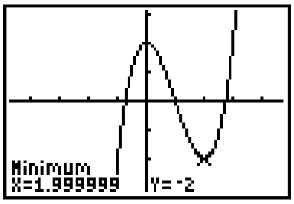
Vi har använt s.k. *kvadratkomplettering*. Pröva att utveckla kvadraten och kontrollera att det stämmer.

Om vi tittar på uttrycket ovan ser vi att *y* antar sitt minsta värde när parentesen är lika med noll. En kvadrats värde kan ju inte vara mindre än noll. Detta inträffar när $x = -2,5$.

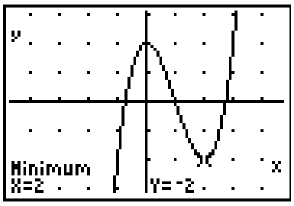
Pröva nu att mata in båda uttrycken ovan i räknarens editor för funktionsinmatning. Kurvorna överlappar varandra på skärmen.

Nu matar vi istället in funktionen $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Vi ställer in graffönstret genom att trycka på ZOOM och välja alternativ **6:ZStandard**. För att få en graf som bättre "fyller ut" fönstret tycker vi på ZOOM en gång till och väljer alternativ **4:Zdecimal**. Se bilden nedan. Pröva effekten av denna inställning med TRACE.



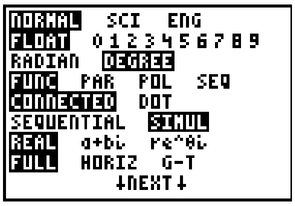


Vi bestämmer nu minimipunkten med samma metod som i det tidigare exemplet. Resultatet syns i bilden ovan. Med exakta metoder kan man visa att ett minimum antas för x = 2. Räknaren kan inte med de värden vi har för vänster och höger gräns och vår gissning skilja på funktionsvärdet för x = 1,999999 och x = 2. Det kan dock hända att du "råkar" få exakta värden i fönstret.

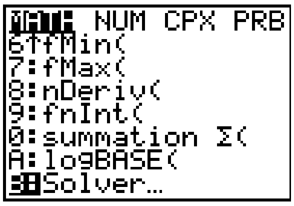


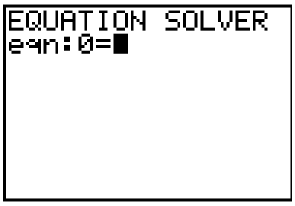
10 Ekvationslösaren

Räknaren har en inbyggd kraftfull ekvationslösare. Du kan hitta den längst ner på MATH-menyn. Under [MODE] ställer du först in **FLOAT** på andra raden och **FUNC** på fjärde raden. Float betyder ju att vi vill att beräkningsresultat ska visas med så många decimaler som möjligt.

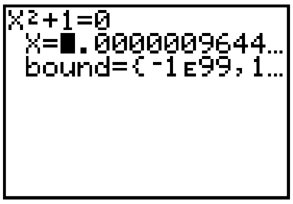


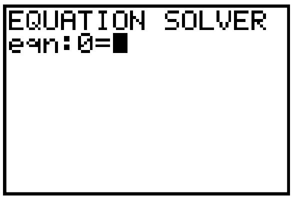
Tryck [MATH] och bläddra ner till alternativ `B:Solver` med hjälp av [▼] och tryck sedan på [ENTER].





Då kommer menyn för ekvationslösaren fram. Se bilden till höger. Om det står något där, tryck på [CLEAR]. Då rensas ”gamla” ekvationer.





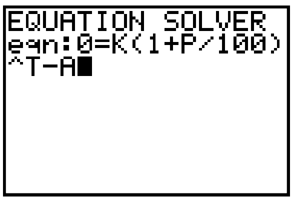
Ett belopp har på 24 år vuxit till 4998,90 kr på ett konto. Ränta har hela tiden varit 5 % per år. Hur stort var det belopp som insattes från början på kontot.

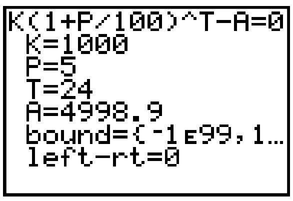
Du känner säkert till att värdet A av kapitalet K med p % ränta på ränta efter t år kan tecknas

med formeln $$A = K\left(1 + \frac{p}{100}\right)^t$$

Vi skriver om vår ekvation som $$0 = K\left(1 + \frac{p}{100}\right)^t - A$$

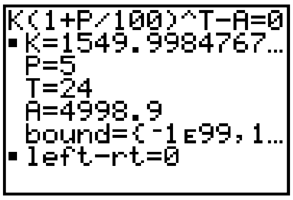
Nu kan vi mata in denna ekvation i ekvationslösarens editor. Du kan alltså skriva in bokstäver. Om man ska mata in en bokstav trycker man först på knappen [ALPHA]. Vi trycker sedan på [ENTER]. Då kommer skärmen till höger fram:





Vi fyller i det vi vet: **P** = 5 (räntan), **T** = 24 (antalet år), **A** = 4998.90 (kapitalet efter 24 år).

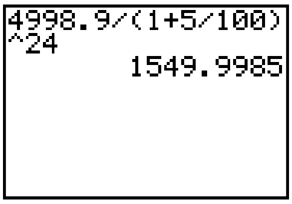
För K måste vi först gissa ett *startvärde*. Vi skriver t.ex. in **1000**. **bound** betyder att vi ska ange ett intervall där ekvationslösaren ska leta efter lösningar. Låt intervallgränserna stå kvar. Nu placerar vi markören vid K. Därefter trycker vi på ALPHA [SOLVE]. Resultatet låter inte vänta på sig:



Svaret blir alltså ca 1550 kr. Sista raden **left – rt**, där rt står för right, betyder att skillnaden mellan vänstra och högra ledet i vår ekvation är noll. Det betyder att vi fått en lösning med ett fel som är *mindre* än vad räknaren kan räkna ut.

Den här uppgiften kan man naturligtvis lösa med att skriva om formeln genom att *lösa ut K* och sätta in värden för *A*, *p* och *t*.

$$K = \frac{A}{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^t}$$

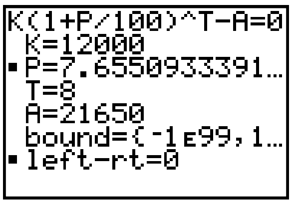


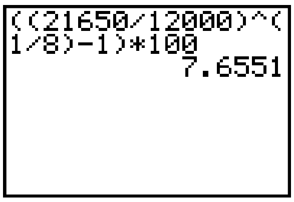
Ekvationslösaren är dock smidig. Man kan snabbt lösa ett annat problem som handlar om samma sak. Nu kanske vi vill veta den genomsnittliga årliga räntan istället.

12 000 kr växte på ett konto under 8 år till 21 650 kr. Hur stor var den genomsnittliga årliga räntesatsen?

Ekvationen är densamma. Vi fyller i det vi känner till och gissar att **P** är 6. Sedan placerar vi markören vid **P** och trycker ALPHA [SOLVE]. Nedan till vänster ser du resultatet. Räntan blir 7,66 % avrundat till två decimaler.
Även denna uppgift kan man naturligtvis lösa med att skriva om formeln genom att lösa ut *p* och sätta in värdena för *K*, *A* och *t*. Uttrycket blir då

$p = \left(\left(\frac{A}{K}\right)^{\frac{1}{t}} - 1\right) \cdot 100$ Insättning av värden på A, *K* och *t* ger värdet på räntesatsen.



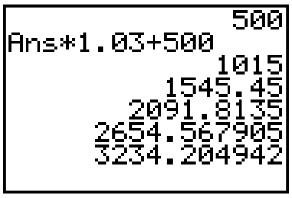


Denna uppgift kunde vi alltså lösa med en algebraisk metod.

Nu ska vi se på ett problem där man inte kan komma åt ett resultat med algebraiska metoder. Problemet ser ut så här:

500 kr sätts in på ett konto i början av varje år. Räntan är 3 %. Visa hur det samlade kapitalet utvecklas.

Vi visade tidigare hur det samlade kapitalet utvecklades år från år med räknarens [Ans]-funktion. Se bildskärmen nedan.



Om K kr sätts in i början av t på varandra följande år till p % ränta, kan det samlade kapitalet A beräknas med formeln

$$A = K \cdot \frac{\left(1+\frac{p}{100}\right)^t - 1}{\frac{p}{100}}$$

I denna formel kan man lösa ut och beräkna t och K för olika värden på de andra variablerna.

Att lösa ut p kan man däremot inte göra. Se på problemet nedan.

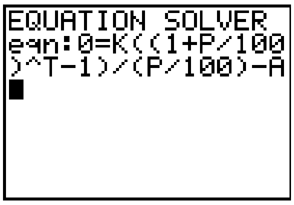
Vi har investerat pengar i en fond. Till fonden har inbetalts 5000 kr i början av varje år. Efter 5 år (6 inbetalningar) är avkastningen på det inbetalade kapitalet 2342 kr. Hur stor årlig ränta motsvarar det?

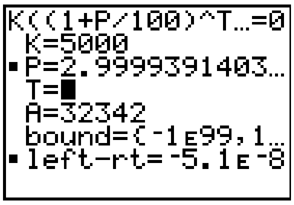
Vi har totalt investerat 30 000 kr. Det samlade kapitalet efter 5 år är då 32 342 kr.

Vi går till ekvationslösaren och skriver om formeln så här:

$$0 = K \cdot \frac{\left(1+\frac{p}{100}\right)^t - 1}{\frac{p}{100}} - A$$

I ekvationslösaren ser det ut som i vänstra bilden nedan. Nu tycker vi på [ENTER]. Nu matar vi in de värden vi känner till. Vi gissar ett värde på **P**, t.ex. 5 %. Vi placerar markören på raden för **P** och trycker [ALPHA] [SOLVE]. Räntesatsen beräknas direkt.





På sista raden i ekvationslösarens fönster står det

`left – rt = –5.1E–8.`

Detta värde (0,000 000 051) är skillnaden mellan vänster och höger led i ekvationen. Av värdet kan vi se att vänster och höger led är lika för de första 7 decimalerna.

11 Linjära modeller och diagramritning

Tabellen nedan visar det uppmätta trycket vid olika djup under havsytan

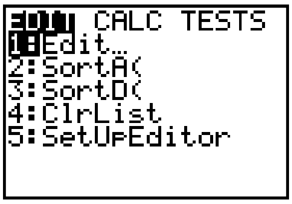
Djup (m)	10	13	35	40	100
Tryck (kPa)	198	228	442	490	1074

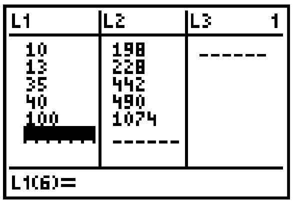
- Undersök om trycket är en linjär funktion av djupet.
- Ta reda på trycket på 150 m djup och vid havsytan.
- Till sista ska du ta reda på vid vilket djup trycket är 300 kPa.

Nu ska vi för andra gången stifta bekantskap med en editor för inmatning av data. I kapitel 5 så tog vi ju upp beräkningar med listor. Vi repeterar dock en del. Tryck nu på [STAT].

I den meny som nu kommer fram, väljer du alternativ **1Edit**. Då kommer editorn för inmatning av data fram. Där finns ett antal kolumner (**L1** till **L6**). De kallas för *listor*. Om det finns data i kolumnerna så flyttar du dig till kolumnhuvudena och trycker på [CLEAR] följt av [ENTER].

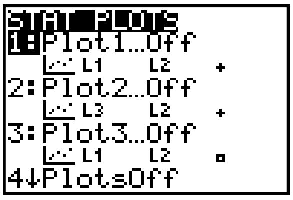
Editorn påminner mycket om kalkylarket i kalkylprogram. Inmatningen av data sker längst ner på skärmen. När du har skrivit in data för en cell (t.ex. **L1(1)**) trycker du på [ENTER]. Markören hoppar då till nästa rad. På skärmbilden nedan har vi matat in data från uppgiftens tabell.





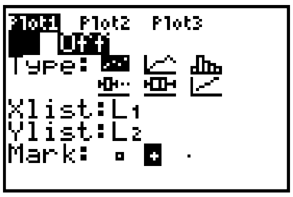
Nu kan det vara intressant att plotta dessa data. Se först till att editorn för funktioner [Y=] är tom. Du tar bort inmatade funktioner genom att trycka på [CLEAR]. Alternativt kan du placera markören ovanför likhetstecknet och trycka [ENTER]. Då slocknar den mörka rutan som står över likhetstecknet. Funktionen är då *avmarkerad*.

Tryck sedan [2nd] [STAT PLOT]. Då kommer menyn nedan fram.



Här finns 3 olika plot-menyer att tillgå. Vi ska nu titta lite närmare på vad man kan göra genom att göra olika inställningar i denna meny.
Placera markören på **1:Plot1..Off** och tryck på [ENTER].

Nu kommer en meny fram för inställningar inför diagramritning. Se bilden nedan. Tryck nu först på **On**.



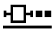
Under **`Type`**: ser du ett antal olika diagram som räknaren kan rita. Bilderna är små men du kan säkert i lista ut vad det är:

 *Spridningsdiagram*. Visar i ett koordinatsystem data från två olika datalistor.

 *Linjediagram*. Samma som förra diagrammet men datapunkterna är sammanbundna med linjer.

 *Histogram*

 *Lådagram* av typ 1

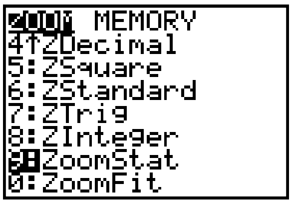
 *Lådagram* av typ 2

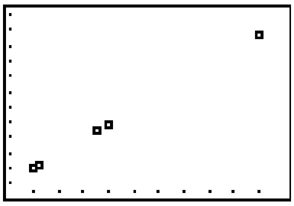
 Ett speciellt diagram som visar hur väl normalfördelade data från en lista är.

Vi ska nu rita ett spridningsdiagram som visar hur våra data ligger i ett koordinatsystem. Vi vet att data ligger i lista **`L1`** och **`L2`**.

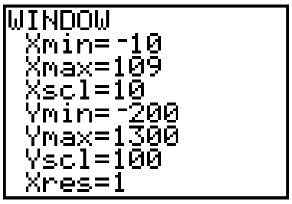
`Mark` betyder vilken markering vi ska ha på datapunkter.

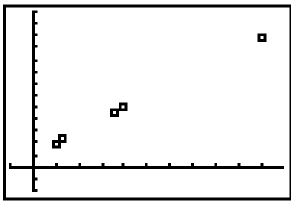
Låt inställningen vara den som visas i bilden på förra sidan Tryck sedan på [ZOOM] och välj där alternativ **`9:ZoomStat`**. Tryck sedan på [ENTER].



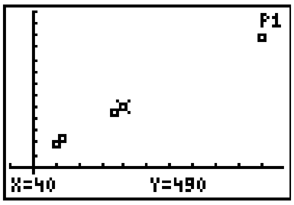


Nu ritas vårt spridningsdiagram upp. En nackdel med diagrammet är att vi inte ser några axlar så vi trycker nu på [WINDOW]. En bra fönsterinställning visas i bilden till vänster. Vi ändrar nu så att vi får en bild där axlarna syns. Tryck därefter på [GRAPH].



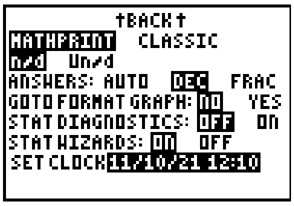


Genom att trycka på [TRACE] kan du hoppa mellan datapunkterna och se *x*- och *y*-värden längst ner på skärmen.

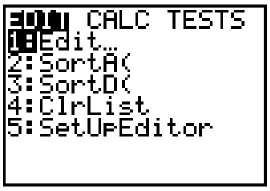


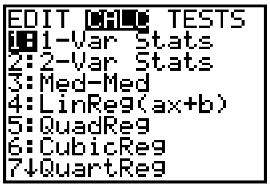
Äntligen ska vi nu pröva hur pass väl datapunkterna ligger efter en rät linje. Nu ska vi gå till statistikdelens beräkningsdel. Tryck först på [ENTER].

Innan du gör det ska du se till att vi har de vissa inställningar för statistik. Tryck på knappen [MODE] och gå till sida 2. Se där till att `STATWIZARDS` är på `ON`.



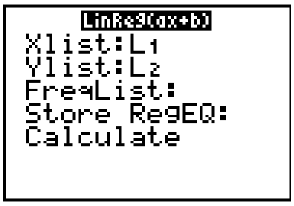
Flytta nu markören med [▶] till alternativet **`CALC`**.



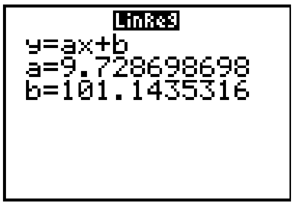


Här finns ett antal olika verktyg för beräkningar på inmatade data. Det verktyg vi nu ska använda finns på rad 4. Vi ska nämligen göra en s.k. *linjär regression* och räknaren kommer då att försöka finna den *bästa räta linjen* genom de givna punkterna.

Tryck nu **`4`** för att välja alternativ **`4:Linreg(ax+b)`**. Då kommer en ny skärm fram.

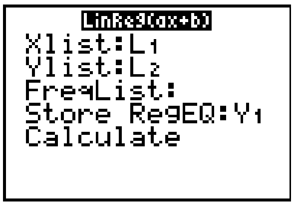


Nu ska vi fylla på instruktionen med var data ska hämtas. Data ska naturligtvis hämtas från kolumnerna **`L1`** och **`L2`**. Vi trycker då [2nd] [L1] resp. [2nd] [L2]. Ange ingenting för `Store RegEQ` nu. Det kommer senare. Se vänstra bilden nedan. Flytta markören till `Calculate` och Tryck sedan på [ENTER]. Se högra bilden. Vi får ekvationen för den bästa räta linjen beräknad.

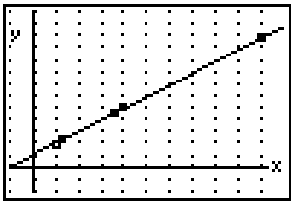


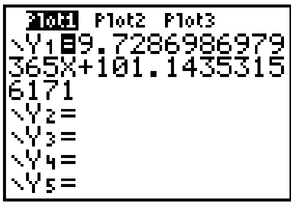
För att rita denna räta linje kan vi mata in funktionen i menyn som vi når genom att trycka [Y=]. Finns det då ingen instruktion som gör att vi slipper skriva in ekvationen? Jo, det finns det. Vi ska nu visa hur man gör.

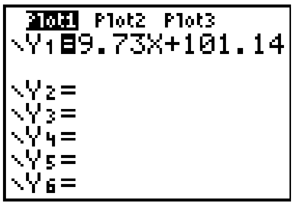
Gå tillbaka så att du får skärmen till vänster ovan. Placera markören på tredje raden vid Store RegEQ och tryck sedan på [ALPHA] [F4]. Då får vi fram mallen med listan med funktioner. Markera Y1 och tryck på [ENTER]. Då får vi följande fönster:



Flytta markören till `Calculate` och tryck sedan på [ENTER]. Vi får då fram samma fönster som tidigare. Tryck nu på [GRAPH]. Nu ritas linjen ut. Tryck på knappen [Y=] så ser du att funktionen är inkopierad där med en massa decimaler. Vi har ju inställningen `FLOAT` för antalet visade decimaler. Man kan ställa om detta så att färre antal decimaler visas. Se högra bilden nedan.

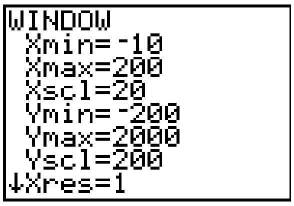


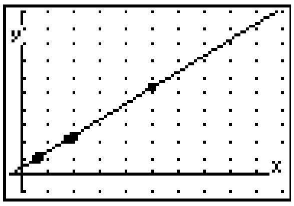




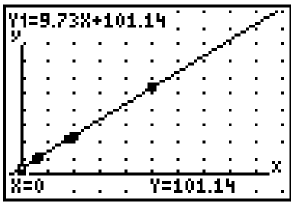
Det finns ett mer omständigt sätt att göra detta på. Då får man gå till en meny med fördefinierade variabler som man når genom att trycka på knappen [VARS]. Där väljer man sedan från en lista med olika grafvariabler.

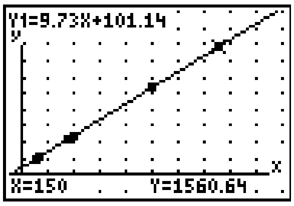
Vi ser att den beräknade räta linjen nästan perfekt går igenom datapunkterna. I uppgiften skulle vi undersöka om trycket var en linjär funktion av djupet. På den frågan kan vi naturligtvis svara ja! Av grafen att döma ligger datapunkterna nästan precis på den beräknade räta linjen.
Sedan skulle vi ta reda på trycket på 150 m djup och vid havsytan, dvs. när djupet är 0 m. Vi ställer nu om vårt fönster så att djupet 150 kommer med. Tryck på [WINDOW] och ställ om fönstret enligt nedan. Tryck sedan på [GRAPH]. Vi ser att några av datapunkterna ”flyter” ihop.



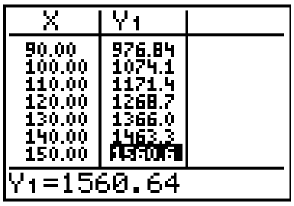


Tryck nu på [TRACE]. Här kan man nu antingen hoppa mellan datapunkterna eller följa den räta linjen med piltangenterna. För att hoppa mellan datapunkter och linjen trycker du [PIL NED]. Gå först till spårning på linjen följ linjen mot större värden för *x*. Tryck sedan 0 i spårningsläget. Markören hoppar till *x*-värdet 0. Värdet för djupet 0 m ges ju annars direkt av linjens ekvation. Du ser resultatet längst ner på skärmen. Knappa sedan in 150 och se det resultatet.





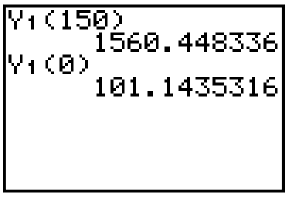
Det finns andra sätt att ta reda på funktionens värden för $x = 150$ och $x = 0$. Vi kan läsa av i en funktionstabell t.ex. Vi har då ställt in steget mellan *x*-värden till 10 med tabellinställningen som du når genom att trycka [2nd] [TBLSET].



X	Y1
90.00	976.84
100.00	1074.1
110.00	1171.4
120.00	1268.7
130.00	1366.0
140.00	1463.3
150.00	1560.6

Y1=1560.64

Det finns ett tredje sätt som vi visar i bilden nedan. Tryck igen på ALPHA [F4] och kopiera in Y1 till grundskärmen.



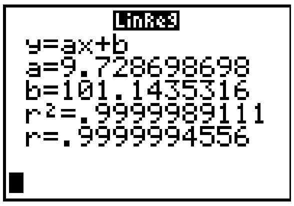
Till sist skulle vi beräkna vid vilket djup trycket var 300 kPa. Detta ger ekvationen 300 = 9,73x + 101. Denna ekvation kan förenklas till
9,73x = 199 som ger x = 199/9,73 och $x \approx 20{,}5$.
Svaret är alltså 20,5 m.

När vi fått fram en ekvation för en rät linje genom att göra linjär regressionsanalys, kanske vi vill veta *hur bra* vår modell är. Det kan ju vara så att den riktiga matematiska modellen inte alls är en linjär funktion.

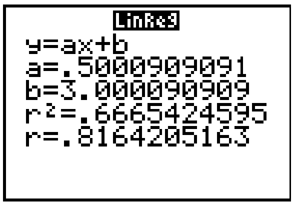
Fördjupning

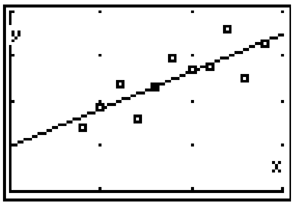
Nu ska vi att göra en undersökning över hur pass bra vår modell är. Tryck på inställningsknappen MODE igen och ställ in så att `STATDIAGNOSTICS` är i läget `ON`.

Vi gör om vår regressionsanalys igen och på resultatskärmen kommer nu två statistiska storheter, r som kallas korrelationskoefficient resp. r2 som kallas förklaringsgrad. För korrelationskoefficienten r gäller att $-1 < r < 1.$ Kort kan man säga att ett värde på r som ligger nära 1 eller – 1 uttrycker att starkt linjärt samband. Sambandet i detta fall är alltså starkt.

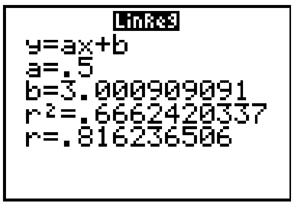


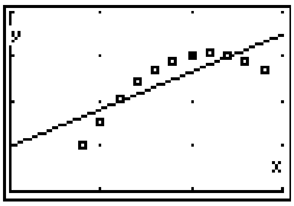
Man bör vara försiktig när man gör sådana här regressionsanalyser. Här är ett bra exempel. En datauppsättning med *x*- och *y*-värden gav följande resultat

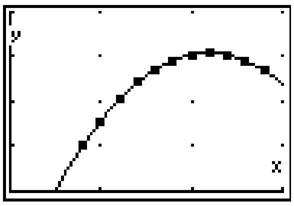




En ganska stark korrelation alltså. En annan datauppsättning gav resultat enligt nedan. Vi får nästan exakt samma resultat av analysen men datauppsättningen ser helt annorlunda ut. Datapunkterna i det nedre diagrammet visar att vi sannolikt har ett annat samband.







12 Exponentiella modeller och slumptal

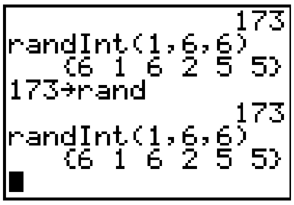
Tänk dig att du har 10 stycken mynt som du kastar krona och klave med. I första kastet får du kanske 4 krona. Du lägger då till 4 krona till dina tidigare 10 och kastar nästa gång 14 mynt. Nu får du 8 krona. Du lägger till dessa till dina tidigare 14 och kastar nästa gång 22 mynt.

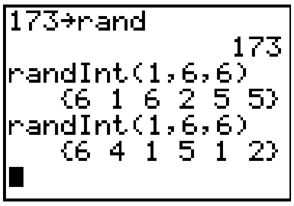
Så här håller du på och antecknar hur många mynt du kastar i första, andra, ... , kastet. Finn sedan en matematisk modell för sambandet mellan antalet försök och antalet mynt som man kastar.

Om vi nu inte har några mynt kan vi istället låta räknaren kasta mynt åt oss. Räknarens slumptalsfunktioner finner du om du först trycker [MATH] och sedan med [▸] flyttar dig till **PRB**. **PRB** står för probability som betyder sannolikhet. Då kommer du till en meny med sju stycken olika funktioner.

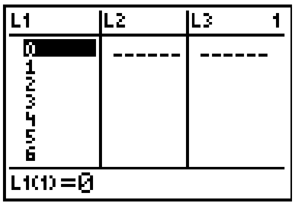
Räknaren kan egentligen inte generera riktiga slumptal. Den använder faktiskt en formel för att generera en sekvens av tal som verkar vara helt slumpmässiga. Varje tal i sekvensen beror på det föregående talet. Detta betyder då att hela sekvensen av tal beror på det första talet. Detta tal kallas för en *kärna*. Om du låter två räknare få samma kärna, t.ex. talet 173, så genereras samma sekvens. Det kan väl knappast kallas slumpen.

Normalt så behöver man inte tänka på detta eftersom räknaren hela tiden använder det sista slumptal som har alstrats som en ny kärna. I vänstra skärmbilden har vi två gånger lagrat talet 173 som kärna med kommandot **173** [STO▸] **rand**. Vi får samma sekvens av tal båda gångerna. I högra skärmbilden har vi lagrat talet 173 bara en gång och vi ser att vi får olika sekvenser av tal varje gång.



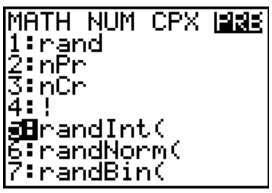


Vi börjar med att göra en lista för antalet försök. Tryck på [STAT] och sedan på [ENTER] när markören är vid **Edit**. Skriv sedan in listan 0, 1, 2, .. ,7. Vi tänker oss att vi gör vår slantsingling 7 gånger.

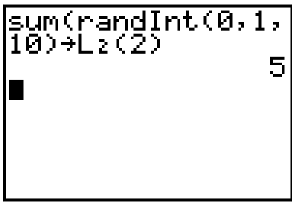


Skriv först in 10 i **L2(1)** eftersom vi utgår från 10 mynt Gå till grundfönstret (tryck [2nd] [QUIT]). Tryck sedan på [2nd] [LIST]. Gå till alternativet **MATH**. Då får du en meny med olika beräkningsverktyg. Tryck på 5 för att välja instruktionen **5:sum**. Denna instruktion kopieras då till grundfönstret.

För att nu skapa heltaliga slumptal ska vi trycka på [MATH] flytta markören till **PRB** och välja alternativet 5:**randInt(**.

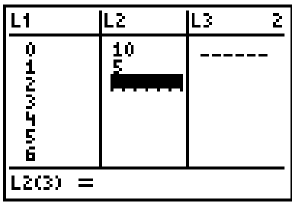


Om vi nu trycker [ENTER] kopieras instruktionen till grundfönstret. Vi fortsätter sedan att fylla i instruktionen enligt nedan. Därefter trycker vi på [ENTER]. Vi ser att det blev 5 stycken ”krona”.



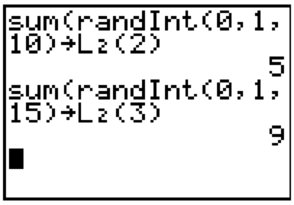
Vad betyder nu instruktionen ovan? Jo, det som står i parentesen betyder att vi ska alstra heltaliga slumptal, **0** eller **1**, och att det ska alstras 10 st sådana slumptal. Vi utgår ju från 10 stycken mynt. Vi ska sedan summera dessa 10 tal och resultatet ska sedan lagras i lista **L2** på rad 2. Det var allt!

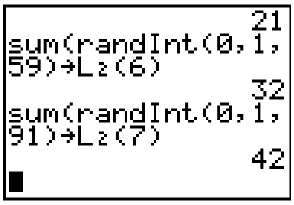
Så här ser nu skärmen ut:



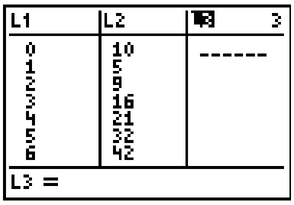
Vi fortsätter. I andra försöket ”kastar” vi nu 15 st mynt (10 + 5).

Gå tillbaka till grundfönstret genom att trycka på [2nd] [QUIT].
Nu trycker du på [2nd] [ENTRY] för att få tillbaka sista inmatningen. Ändra i den instruktionen (använd [◄] och [►]) så att det står som på skärmen nedan. Tryck sedan på [ENTER].



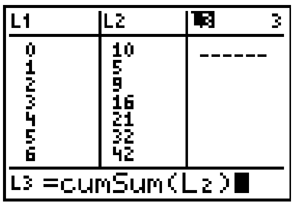


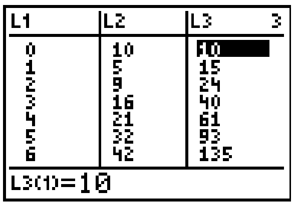
Upprepa nu detta förfarande. Lägg till det antal krona du får och lägg resultatet på nästa rad i lista **L2**. Till höger ovan har vi kommit till rad 7.



När vi är klara med listan kan det se ut som ovan. Du får naturligtvis andra siffror eftersom det är frågan om slumpförsök. Flytta markören till kolumnhuvudet i **L3** och tryck [2nd] [LIST]. Flytta markören till **OPS** med [►] och tryck **6:cumSum**. Då öppnas inmatningsfältet längst ner.

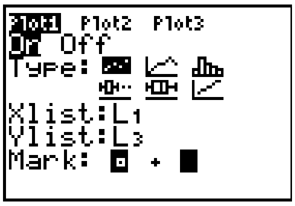
Skriv som på skärmbilden nedan till vänster och tryck på [ENTER]. Resultatet ser du till höger.





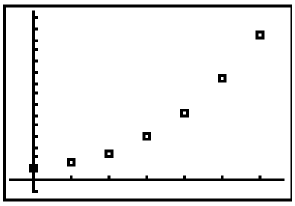
Vad har vi nu gjort? Jo, vi har summerat totala antalet krona efter 1, 2, 3, … 6 försök. Efter ett ”kast” fick vi 15 krona, efter två kast 24 krona osv.

Nu kan vi göra en analys på de data som vi har i **L1** och **L3**. Vi trycker på $\boxed{\text{2nd}}$ [STAT PLOT] och ställer in **Plot1** enligt följande:



Tryck sedan $\boxed{\text{ZOOM}}$ och väljer alternativ **9 ZoomStat**.

Efter ev. justeringar så får vi detta diagram:

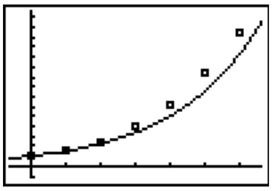


Om vi funderar en stund på försöket inser vi säkert att i modellen ska antalet mynt *fördubblas* efter varje försök. Det är alltså fråga om en *exponentiell modell*.

Den modellen är naturligtvis

$$y = 10 \cdot 1{,}5^x$$

Om vi ritar denna funktion i samma koordinatsystem så får vi följande:



I detta försök stämde utfallen väldigt bra med de teoretiska sannolikheterna och resultatet blev påfallande bra.

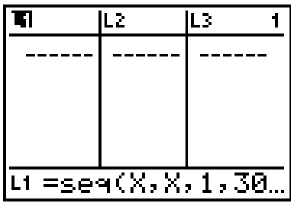
Vi började ju med 10 mynt och i modellen ska antalet mynt öka med 50 % efter varje försök.

Ju fler mynt vi kastar desto större är sannolikheten att den relativa frekvensen för antalet krona ligger nära 0,5 (50 %).

13 Mer om slumptal, frekvenstabeller och diagramritning

Skillnaden mellan ett verkligt försök med tärningskast och räknarens slumptalsgenerator är att räknaren ”vet om” att sannolikheten för att få ”sexa” är 1/6. Med en tärning *testar* man ju detta. Det här försöket tar inte mer än ett par minuter att göra. Vi ska utföra försöket att kasta tärning 300 gånger.

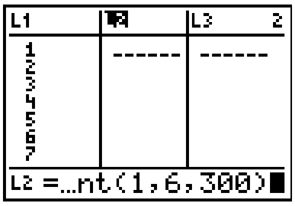
1 Först ska vi alstra en serie, talen 1 till 300, och lägga dessa i lista L1.
Tryck på STAT och välj sedan alternativet **EDIT**.
Se till att alla listor är tomma. Ett sätt att ta bort data från en lista är flytta markören till kolumnhuvudet och trycka på CLEAR följt av ENTER.
Från kolumnhuvudet i **L1** trycker du på ENTER. Tryck sedan 2nd [LIST]. Där väljer du alternativet **OPS** och sedan **5:seq(**. Vi trycker sedan på ENTER. Sedan skriver vi enligt skärmbilden nedan. Tryck på `Paste`. Då inkopieras uttrycket på inmatningsraden i editorn.

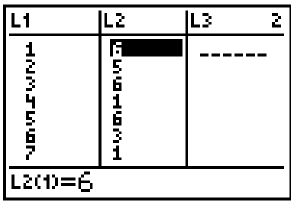


Tryck sedan på ENTER. **seq** står för en talföljd. Syntaxen för att skriva detta uttryck är (*uttryck*, *variabel*, *start*, *slut*). I räknarens statistikeditor finns nu en lista 1, 2, ... 299, 300 i lista **L1**.

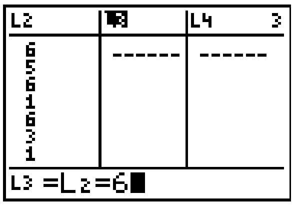
2 Vi alstrar nu en lista med slumptal från 1 till 6 i lista **L2**. Flytta då markören till kolumnhuvudet i **L2** och tryck på ENTER. Tryck sedan på MATH och väljalternativet **PRB** och sedan **5:randInt(**. Skriv sedan enligt skärmbilden. Längst ner i inmatningsfönstret syns inte hela inmatningen.

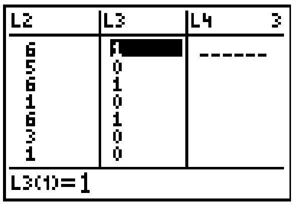
Nu alstras en lista med slumptal mellan 1 och 6 i lista **L2**.





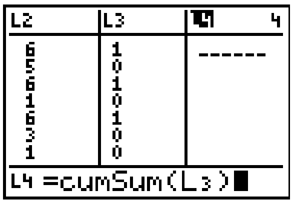
3 Nu ska vi göra något smart! Vi vill ta reda på hur många sexor vi fick i lista **L2**. Flytta markören till kolumnhuvudet i **L3** och tryck på ENTER. Skriv sedan enligt inmatningsfältet nedan. Tecknet ”=” når du genom att trycka på 2nd [TEST]. Tryck sedan på ENTER. Se resultatet i högra skärmbilden nedan.

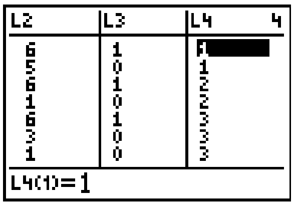




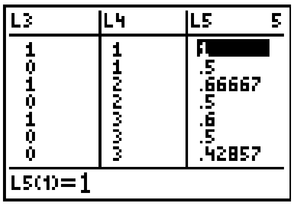
De gånger där vi fick en sexa så står det nu 1 i listan. I alla andra fall står det 0.

4 För att ta reda på hur många ”sexor” vi fick efter 1, 2, 3, …, 299, 300 kast alstrar vi nu en lista med de *kumulerade summorna* av elementen i **`L3`**. Instruktionen från kolumnhuvudet i **`L4`** (tryck på ENTER först) är **`cumSum(L3)`**. Den instruktionen kopieras in på inmatningsraden genom att trycka på 2nd [LIST], välja alternativ **`OPS`** och sedan infoga instruktionen **`6:cumSum)`**. I den högra bilden nedan ser du resultatet. Listan 1, 1, 2, 2, … i `L4` betyder att vi har fått en sexa efter 1 kast, 1 sexa efter 2 kast, 2 sexor efter 3 kast osv.

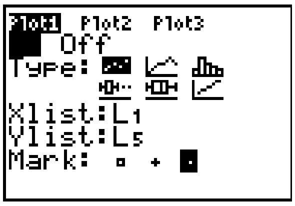


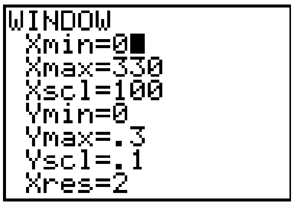


5 Till sist alstrar vi en lista L5, som rad för rad är kvoten av L4 och L1. Vi placerar markören i huvudet på lista **`L5`**, trycker på ENTER och skriver sedan in formeln **`L5=L4/L1`**. Vi får då den relativa frekvensen beräknad *rad för rad*. Om vi går till editorn ser den ut så här:



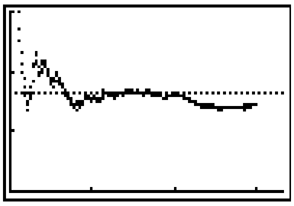
6 Nu ska vi rita ett diagram som visar hur den relativa frekvensen förändras när antalet kast ökar. Tryck på 2nd [STAT PLOT] och ställ in enligt följande:





Vi ska alltså rita ett linjediagram med L1 som *x*-lista och L5 som *y*-lista. Markeringar i diagrammet är de små prickarna. Med 300 data blir det alldeles för tjockt och grötigt annars! Ett bra fönster får vi enligt ovan. Tryck på WINDOW och ställ in.

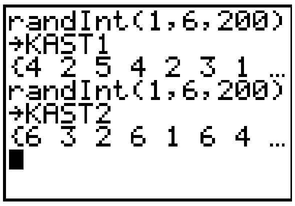
Nu kan vi trycka på GRAPH, äntligen. Som jämförelse har vi i diagrammet lagt in linjen Y1 = 1/6. Vi ser att den relativa frekvensen är lite ”hoppig” i början men efterhand så pendlar den relativa frekvensen allt närmare 1/6.



Här kommer ett annat exempel.

Vi tänker oss situationen att vi har två tärningar som vi kastar ett stort antal gånger. Vi räknar sammanlagda antalet prickar i varje försök. Beräkna med hjälp av räknaren sannolikheterna för utfallen 2 prickar, 3 prickar osv. Jämför sedan med de teoretiska sannolikheterna.

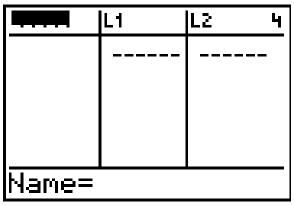
Vi genomför nu försöket med räknarens slumptalsfunktioner.

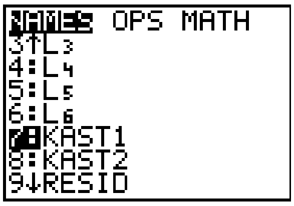


Ovan ser vi att vi har alstrat två kastserier med 200 kast i varje försök. Vi har sparat data från kastserierna under två nya variabelnamn, KAST1 resp. KAST2. Man behöver alltså inte lägga sina data i listor som heter L1, L2 osv. Du kan läsa mer om namn på listor i Handboken.

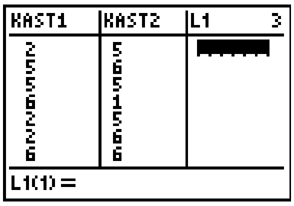
Vi trycker nu på STAT och trycker sedan på 1:Edit för att få fram statistikeditorn. Innan dess har vi tömt alla listor. Det gör man genom att ställa markören på rad 1 och sedan trycka ▲. Då ställer sig markören i listhuvudet. Sedan trycker man på CLEAR och sedan på ENTER. Då rensas listan på alla data.

Nu placerar vi återigen markören i första listans huvud och trycker sedan 2nd [INS]. Då inpassas en ny kolumn till vänster om den kolumn där markören finns. Längst ner ska vi kopiera in variabelnamnet KAST1.

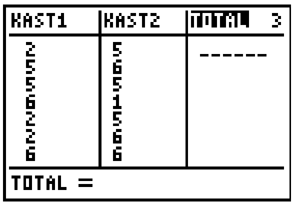




Om vi ska kopiera in namnet (vi antar alltså att du står i läge att skriva in variabelnamnet) trycker vi på 2nd [LIST). Då kommer en förteckning med alla sparade listor. Se högra bilden ovan. Vi väljer alternativ 7:KAST1 genom att trycka 2 och sedan ENTER. Då inkopieras namnet på raden `Name=`. Nu kan vi bekräfta genom att trycka på ENTER en gång till. Alla data kommer nu in i listan i editorn. Vi gör på samma sätt med listan KAST2. Se bilden nedan.



Nu ska vi skapa en ny lista, ”TOTAL”, där vi ska summera data i första och andra listan. Först skapar vi en lista ”TOTAL” genom att som förut placera markören i första listans huvud och trycka 2nd [INS]. Då inpassas en ny kolumn till vänster om den kolumn där markören finns. Sedan skriver man in namnet TOTAL och trycker på ENTER.



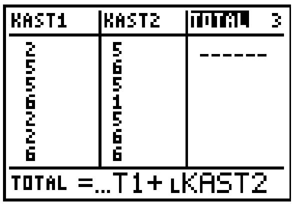
Nu kan vi skriva in formeln för att addera data i listorna KAST1 och KAST2. Då trycker vi först på 2nd [LIST]. Då får vi listan med alla sparade listor. Du se att namnet TOTAL redan finns i förteckningen.

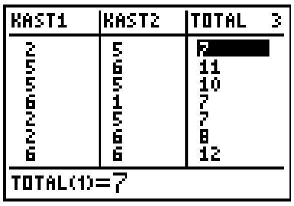
Med ▼ flyttar du nu markören till KAST1. Då inkopieras namnet KAST1 på raden längst ner. Namnet föregår av listnamnsymbolen L som visar att det är en lista vi kopierar in.

Tryck sedan 2nd [LIST]. Då kommer du till förteckningen med listnamn igen. Med ▼ flyttar du nu markören till KAST2 och trycker på ENTER. Då har vi formeln

”TOTAL =LKAST1+LKAST2”

i inmatningsfältet längst ner. Hela formeln får inte plats på raden. Se vänstra bilden nedan. Nu trycker vi på ENTER. Resultatet kommer snabbt i listan TOTAL.

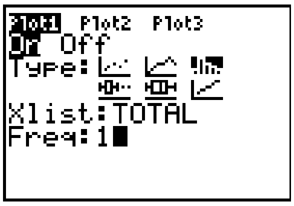




I listan TOTAL har vi då 200 utfall ”totalantalet prickar vid kast med två tärningar”.

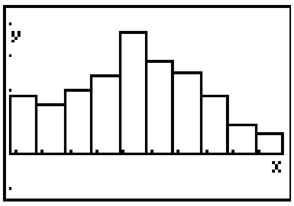
Nu ska vi rita ett diagram som visar hur många ”prickar” vi fick i de 200 försöken. Antalet prickar kan naturligtvis variera mellan 2 och 12.

Vi gör nu en inställning inför diagramritning genom att trycka 2nd [STAT PLOT]. Välj sedan Plot 1 och ställ in enligt bilden.

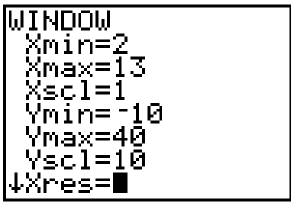


Under Type väljer vi histogram, . Xlist är naturligtvis data i listan TOTAL och Freq sätter vi till 1 eftersom vi har en lista med alla förekommande data, inte en frekvenstabell.

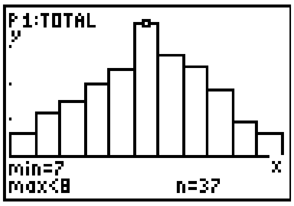
Nu trycker vi på ZOOM för att ställa in för ritning av statistiska data. Välj alternativ 9:ZoomStat och tryck ENTER.



Vi borde få ett diagram med 11 staplar (för värdena 2-12) men det får vi inte. Vad vi får beror lite på hur inställningen var i det sist ritade diagrammet. Vi får då gå in och ställa om vårt fönster. Vi trycker på WINDOW. Se vänstra bilden nedan. Vad vi måste ändra nu är skalningen på x-axeln. Eftersom varje stapel ska ha bredden 1 ska `Xscl` vara 1. Vi ändrar `Xscl` till 1.

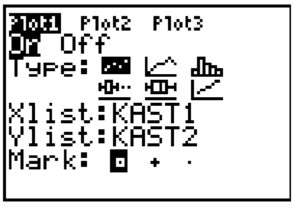


Nu ritar vi om diagrammet. Vi kan ”spåra” i diagrammet genom att trycka på TRACE.

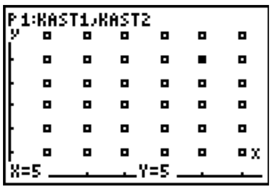


Om vi flyttar oss med [PIL HÖGER] till den högsta stapeln kan vi läsa av min 7, max < 8, n = 37. Det betyder i detta fall att vi har 37 st värden 7. Eftersom det är ett histogram svarar räknaren att det finns 37 st värden mellan 7 och 8 men här har vi ju data som bara kan anta heltalsvärden.

Vi ritar nu ett spridningsdiagram (*xy*-diagram med plottade data) på de data vi har i listorna KAST1 och KAST2. Vi gör en inställning för ritning av spridningsdiagrammet i Plot 1. Se bilden nedan.

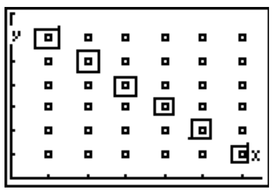


Nu upprepar vi samma procedur som förra gången: vi trycker på ZOOM och väljer alternativ 9:ZoomStat. Nu ritas ett ”mystiskt” diagram upp där vi inte ser några axlar. Vi går in i WINDOW och ändrar fönstret så att axlarna syns och så att vi får in text längst ner när vi spårar.



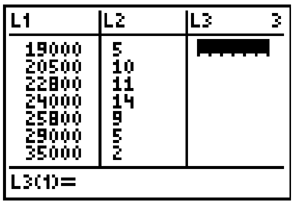
Vad vi ser är alltså ett diagram där varje försök - kast med två tärningar - är representerade. På x-axeln är resultatet ”antalet prickar på första tärningen” avsatt och på y-axeln ”antalet prickar på andra tärningen”. Vi ser att alla utfall förekommer. Det finns inget tomrum någonstans. I de flesta fall täcker också utfall som förekommer flera gånger, t ex utfallet (4, 3), varandra. Om vi trycker på TRACE och sedan på ▶ hoppar vi fram och tillbaka mellan de olika utfallen.

Om vi tittar på spridningsdiagrammet nedan, där utfallet sammanlagt 7 prickar är inritat, ser vi att det förekommer 6 gånger. Det totala antalet utfall är $6 \cdot 6 = 36$ och den teoretiska relativa frekvensen för 7 prickar blir då 6/36 ≈ 0,17. I simuleringen med räknaren fick vi den relativa frekvensen 37/200 ≈ 0,185.



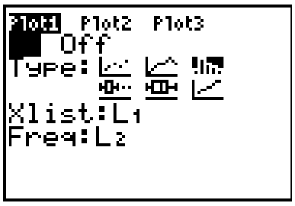
14 Räknaren som kalkylprogram

Vi tänker oss ett företag där de anställda har löner enligt tabellen nedan. Den första listan, L1, visar lönen och den andra, L2, antalet personer med denna lön. En frekvenstabell alltså.

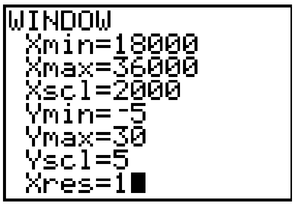


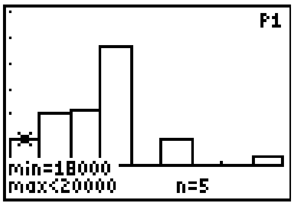
Rita först ett diagram som visar månadslönerna i företaget.
Ett lämpligt diagram i detta fall är ett histogram. Vi ska ställa in ett lämpligt fönster så att vi lätt kan göra avläsningar i diagrammet.

Tryck först på 2nd [STAT PLOT] för att göra diagraminställningar. Lönerna ligger i **L1** och frekvenserna i **L2**.

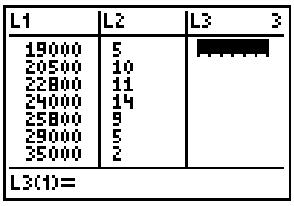


Nu ska vi göra inställningar i WINDOW. Om vi tittar på lönerna så är de spridda mellan 19 000 kr och 35 000 kr. Ett lämpligt intervall på *x*-axeln kan då vara från 18 000 till 36 000 med klassbredden 2 000. Om vi trycker på GRAPH får vi histogrammet till höger nedan. Med TRACE kan vi flytta oss över staplarna och se hur många individer (frekvensen) det finns i varje klass. I klassen 18000 till 20000 finns det 2 st. Observera att exakt 20 000 tillhör den andra klassen (min 18 000, max < 20 000).

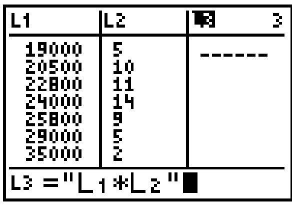


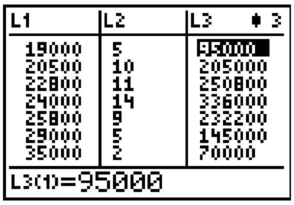


Nu har man kommit överens om att alla löner ska höjas med 5 %, beräknat på den totala lönesumman i företaget. Alla ska alltså få lika mycket i lönehöjning. Vi ska räkna ut de nya lönerna och presentera dessa i en tabell.



Vi börjar med att räkna ut den totala lönesumman för varje grupp. Då multiplicerar vi data i **L1** med data i **L2** och lägger dessa data i **L3**. När vi gör detta ser vi till att ”koppla” formeln för denna beräkning. Det betyder helt enkelt att ändringar i ingångsdata i **L1** och **L2** *uppdateras* i listor där data beror av data i ingångslistorna. För att göra detta skriver vi citationstecken omkring den formel vi ska använda.

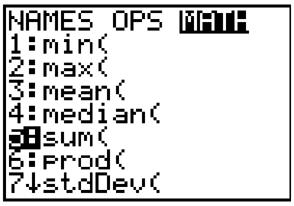




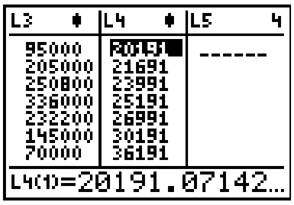
För att beräkna de nya lönerna får vi först ta listan **`L1`** och sedan lägga till summan av alla data i **`L3`** (totala lönesumman) dividerat med antalet anställda (**`sum L2`**) och sedan multiplicera med 0,05. Dessa data ska läggas i **`L4`**. Den formel vi ska använda då blir

`L4 = ”L1+sum(L3)/sum(L2)*0.05”`

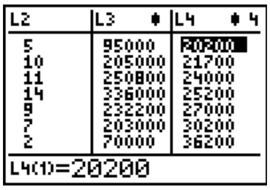
Funktionen **`sum`** kopieras in från List-menyn. Tryck [2nd] [LIST] och välj sedan alternativ **`MATH`**.

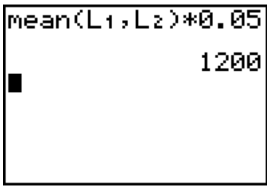


När vi matat in formeln och tryckt på [ENTER] kommer de nya lönerna i lista **`L4`**. Vi ser att hela formeln inte får plats i inmatningsfönstret. Höjningen blev 1191 kr för alla.



Nu kommer själva ”grejen”. Antag att företaget nyanställer 6 personer och att dessa också ska ingå vid beräkningarna av de nya lönerna. 4 st får en lön på 24 000 kr och 2 st en lön på 29 000 kr. Vi går då in och ändrar data i lista L2 så att det står 18 på fjärde raden i lista **`L2`** och 7 i den sjätte raden. Om vi tittar på de sista listorna ser vi de har *uppdaterats*. Nu blev lönehöjningen istället 1200 kr mot tidigare 1191 kr.

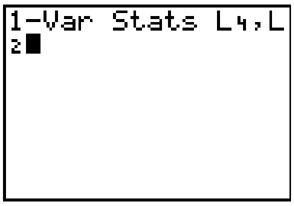




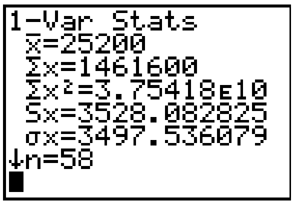
Det snabbast sätt att beräkna lönehöjningen är att direkt i grundfönstret mata in följande instruktion **`mean(L1,L2)*0.05`** och trycka på [ENTER]. Instruktionen **`mean`** inkopieras till grundfönstret om man trycker på [2nd] [LIST], flyttar markören till **`MATH`** och och väljer **`3:mean`**. Man skriver **`L1,L2`** eftersom man har löner i **`L1`** och frekvensen för respektive lön i **`L2`**.

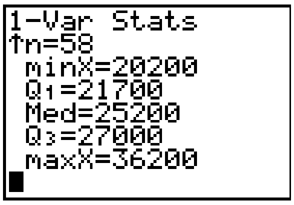
Trycker man på [STAT] och sedan väljer alternativet **`CALC`** får man en lista med en massa olika alternativ för statistiska beräkningar.

Tryck nu på **`1-Var Stats`** och skriv som i fönstret ovan och tryck sedan på [ENTER].



Nu får man en massa statistik om de nya lönerna.





Vi ser att den nya medellönen blev 25 200 kr. Medianlönen blev också 25 200 kr.

15 Normalfördelningen

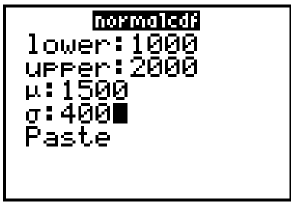
På räknaren finns också ett antal inbyggda funktioner för normalfördelningen.

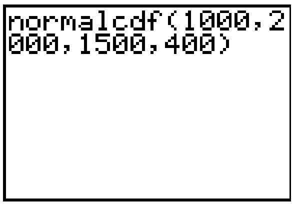
På ett företag används glödlampor, vilkas livslängd (vid normal användning) får anses normalfördelad med medelvärdet 1 500 timmar och standardavvikelsen 400 h.

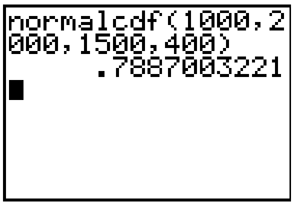
a) Hur många av glödlamporna har en livslängd mellan 1 000 och 2 000 timmar?

Det finns *två* sätt att lösa denna uppgift:

Från grundfönstret trycker du 2nd [DISTR] igen och väljer alternativ **`2:normalcdf`** genom att trycka på ENTER. Följ sedan det som står på skärmen till vänster nedan. Observera att vi har `STATWIZARDS` i läge ON. Man ställer in det under MODE. Det är därför vi får denna skärmbild som ska göra det lättare att mata in värden. Tryck nu på `Paste`. Då kommer nästa skärmbild fram. Där finns hela instruktionen för beräkningen. Tryck nu på ENTER igen. Då får vi resultatet.



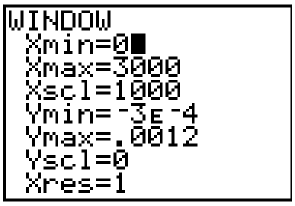


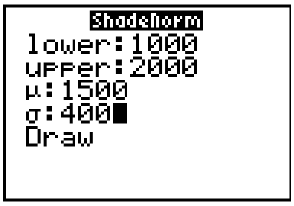


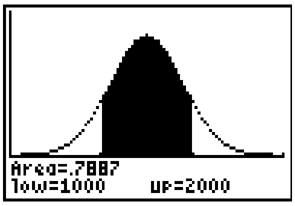
Denna funktion beräknar sannolikheten att livslängden ligger mellan *nedre gräns* och *övre gräns* vid ett givet *medelvärde* och en given *standardavvikelse*. Svaret blir alltså att ca 79 % av glödlamporna har en livslängd mellan 1 000 och 2 000 timmar.

Det finns ett annat sätt. Man trycker även denna gång 2nd[DISTR] men flyttar sedan markören till alternativet [DRAW]. Man väljer alternativ 1 och får då en skärm som du fyller i med samma värden som förut. Markera `Draw` och tryck på ENTER. Här är det viktigt att du har en bra fönsterinställning. Den syns i vänstra bilden nedan.

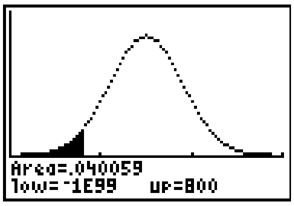
Sedan trycker man på ENTER och frekvenskurvan ritas upp och området mellan gränserna skuggas. Se skärmbilden nedan. Vi får samma resultat som förut men dessutom en bild som visar området i svart. Denna area är alltså ca 78 % av hela arean under kurvan.







b) Hur många glödlampor har en livslängd som är mindre än 800 timmar?

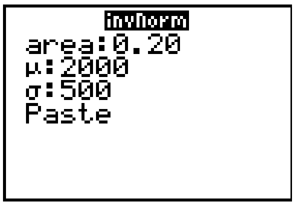


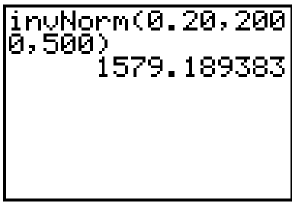
Vi använder nu den senare metoden med grafritning. Tryck först på 2nd [DRAW] och välj alternativ **`1:Clr Draw`** för att radera den ”gamla” kurvan.

Någon nedre gräns finns naturligtvis inte. Det minsta tal som vi kan representera med räknaren är – 10^{99}, som med räknaren skrivs **`–1E99`**. Svaret blir ca 4 % av glödlamporna. Se skärmbilden.

c) Vi tänker oss att nu att man byter till nya bättre glödlampor. Om vi antar att livslängden är normalfördelad, med en livslängd på 2 000 timmar med en standardavvikelse på 500 timmar, hur länge ska man då vänta med att byta alla glödlampor om man vill att högst var femte glödlampa ska hinna gå sönder?

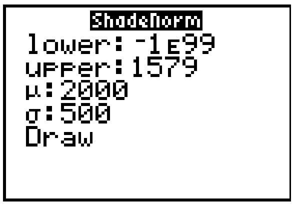
Här kan man använda en funktion som heter **`invNorm`** som beräknar den övre gränsen så att arean under kurvan blir 0,20 a.e. (1/5 motsvarar ju 20 % av lamporna.) Någon nedre gräns har vi inte i detta fall. I de tidigare deluppgifterna a) och b) har vi beräknat arean när vi kände den båda gränserna eller den övre gränsen.

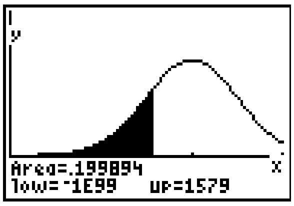




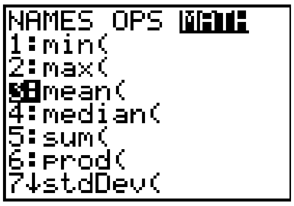
Svaret blir att man kan vänta högst 1580 timmar.

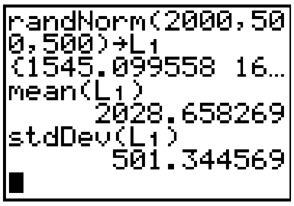
Nedan har vi sedan räknat åt andra hållet genom att mata in den beräknade övre gränsen. Vi ser att det stämmer. Arean blir 0,2 a.e.

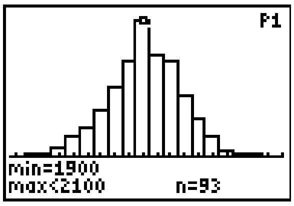




Vi avslutar med att göra ett *slumpmässigt* urval på 500 lampor med de uppgifter vi har i c)-uppgiften. Vi använder slumptalsfunktionen **`randNorm`**. Det tar en liten stund att alstra dessa värden. Vi har också beräknat medelvärdet och standardavvikelsen. Dessa funktioner kopieras till grundfönstret från menyn vi får om vi trycker 2nd LIST och sedan väljer alternativet `MATH`. Se vänstra skärmen nedan.



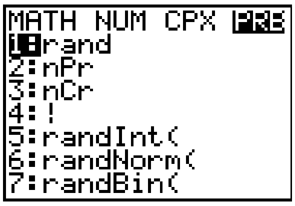




I den högra skärmbilden ovan har vi ritat ett histogram över den alstrade serien med slumptal. Varje stapel har en bredd på 200 timmar.

16 Kombinatorik och mer sannolikhetslära

På räknaren finns ett antal verktyg som har med sannolikhet att göra. Tryck på [MATH] och flytta sedan markören till **PRB**. Tryck nu på [ENTER]. Då kommer följande meny fram:



Instruktion `randInt` har vi redan använt. Den genererar heltaliga slumptal mellan två gränser.

Vi börjar med instruktionen 4:!. ! benämns i detta sammanhang fakultet och 3! är samma sak som $1 \cdot 2 \cdot 3$ och allmänt

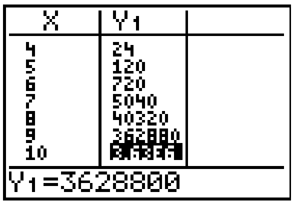
$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n.$$

Ett typexempel på användning av fakultet är följande problem:

På hur många sätt kan 10 böcker i en bokhylla placeras invid varandra?

Den första boken kan placeras på 10 sätt, den andra på nio sätt osv. Totalt blir det (se räknarbilden nedan) 3 628 800 olika sätt.

Om man skriver in Y1=X! i editorn för inmatning av funktioner ([Y=]-menyn) kan man genom att trycka [2nd] [TABLE] snabbt få en lista med framräknade fakulteter för olika x-värden. Se till att du har ställt in i [TBLSET] så att differensen mellan varje x-värde är 1.



I en skola ska man utse tre matematiklärare till styrelseledamöter i en förening. Man ska välja ordförande, sekreterare och kassör. Det finns 10 st matematiklärare. På hur många sätt kan man utse denna trepersonersgrupp?

Här kan man naturligtvis resonera sig fram till det rätta svaret. Den först utsedde läraren, som ska bli ordförande, kan väljas på 10 sätt, nästa lärare kan väljas på 9 sätt, och den tredje läraren på 8 sätt. Multiplikationsprincipen ger då att det finns sammanlagt

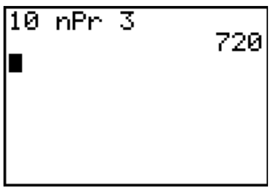
$$10 \cdot 9 \cdot 8 \text{ sätt}$$

att utse denna lärargrupp.

Problemet ovan visar en kategori av problem som är vanliga i kombinatorik: av *n* olika objekt ska man välja ut en delmängd av *k* objekt och dessa ska uppräknas i en viss ordningsföljd. En sådan här delmängd kallas för en permutation av k element ur n givna.

Antalet permutationer av *k* olika objekt ur *n* givna är

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$



På räknaren finns en inbyggd funktion **nPr** med vilken man kan beräkna antalet permutationer. Problemet ovan kan alltså direkt beräknas om man skriver som skärmbilden visar.

Först skriver man alltså 10, sedan trycker man på knappen MATH, flyttar markören med ▶ till alternativet **PRB** och trycker sedan på **2:nPr**. Då inkopieras instruktionen **nPr** till grundfönstret. Sedan avslutar man med att skriva 3 och trycker sedan på ENTER.

Om man *inte tar hänsyn till ordningen* använder man instruktionen **nCr** på räknaren. Att bland k givna välja ut n st kallar man välja ut en *kombination*.

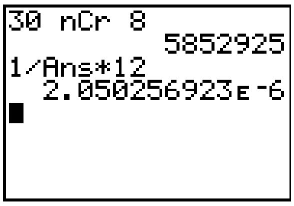
Antalet kombinationer av k olika objekt ur n givna är

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Man brukar skriva detta tal som $\binom{n}{k}$, som utläses ”n över k”.

På måltipset gäller det att bland 30 matcher välja ut de 8 målrikaste. Hur stor är sannolikheten att du får 8 rätt om du lämnar in 12 olika rader.

Vi beräknar här först antalet kombinationer. För att få sannolikheten tar vi 1/antalet kombinationer och sedan multiplicerar vi med 12 eftersom det lämnades in 12 olika rader. Beräkningarna finns på skärmbilden nedan.



Nu ska vi titta lite närmare på försök som man *upprepar*.
Vi kastar en tärning 10 gånger. Vad är sannolikheten av vi får exakt 2 sexor?

Detta är inte alldeles enkelt. I detta problem kommer antalet kombinationer in. Antalet olika kastserier där man får 2 sexor beräknas med uttrycket **10 nCr 2**. Räknar vi ut detta så får vi resultatet 45.

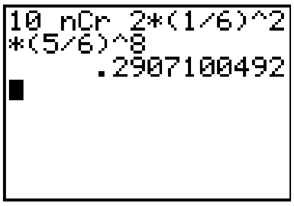
Vi ska inte närmare gå in på teorin för dessa upprepade försök. Allmänt gäller:

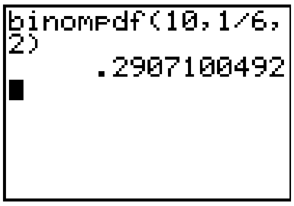
Antag att en händelse i ett slumpmässigt försök har sannolikheten p. Om man gör n oberoende försök är sannolikheten att händelsen inträffar *exakt* k gånger

$\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ Dessa sannolikheter kallas *binomialfördelningen*.

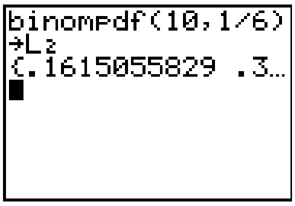
$\binom{n}{k}$ skrivs på räknaren **n nCr k**.

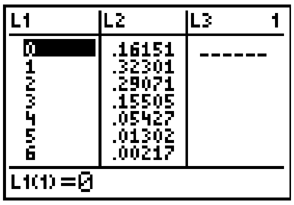
I vårt problem blir alltså beräkningarna enligt skärmbilden till vänster på nästa sida. Till höger visas resultatet med räknarens inbyggda funktion. Vi ser att vi innan det färdiga uttrycket kommer få en ”guide” (STATWIZARDS) som gör det lättare att fylla i värden. Man ställer in detta under MODE.



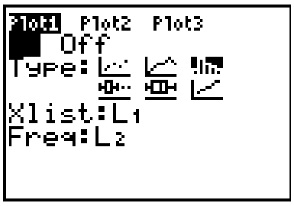


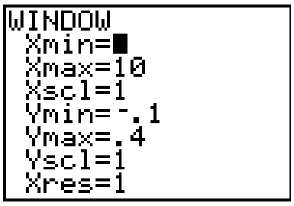
Du hittar funktionen **`binompdf`** genom att trycka [2nd] [DISTR]. I den lista som då kommer fram finns ett stort antal funktioner för att beräkna olika sannolikhetsfördelningar.
Ska man ha en lista med sannolikheterna för 0, 1, 2 … 9, 10 lyckade utfall kan man spara den i statistikeditorn. I **`L1`** har vi lagt listan 0, 1, 2 … 10 för antalet lyckade försök.



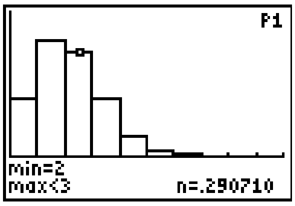


Om vi tittar på denna lista ser vi att där visas sannolikheten att lyckas få en sexa 0 gånger, 1 gång, två gånger, ... , 10 gånger. Ur denna lista kan man också lätt beräkna händelser som t.ex. ”få *minst* tre sexor” mm. Vi kan rita ett diagram på detta för att få överskådlighet. Inför diagramritningen fyller vi i enligt schemat nedan till vänster och till höger finns fönsterinställningen under [WINDOW].





Nu kan vi rita vårt diagram. Vi har spårat till stapeln för ”två lyckade försök”.



Det är även möjligt alstra slumptal enligt en bestämd binomialfördelning. Instruktionen heter **`randBin`** och du finner den under knappen [MATH] och alternativet **`PRB`**. Instruktionen

`randBin(10, 1/6, 200)` [STO▶] **`L3`**

alstrar t.ex. 200 slumptal enligt den aktuella binomialfördelningen och lagrar listan i **`L3`**.

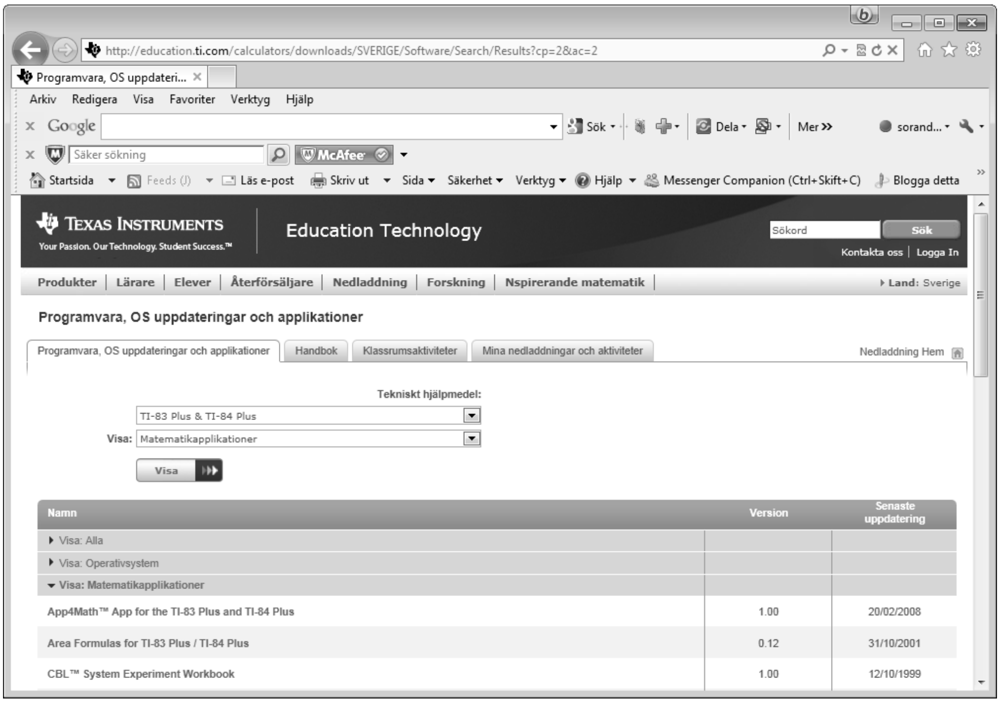
17 Programmet TI Connect och applikationer

På Texas Instruments webbplats finns idag ett stort antal applikationer tillgängliga. De flesta är gratis. På din TI-84 Plus är ett antal applikationer förinstallerade.

För att ladda ner andra applikationer, eller nya versioner av de applikationer du redan har, till din räknare bör du se till att du har det senaste operativsystemet (OS) till din räknare.

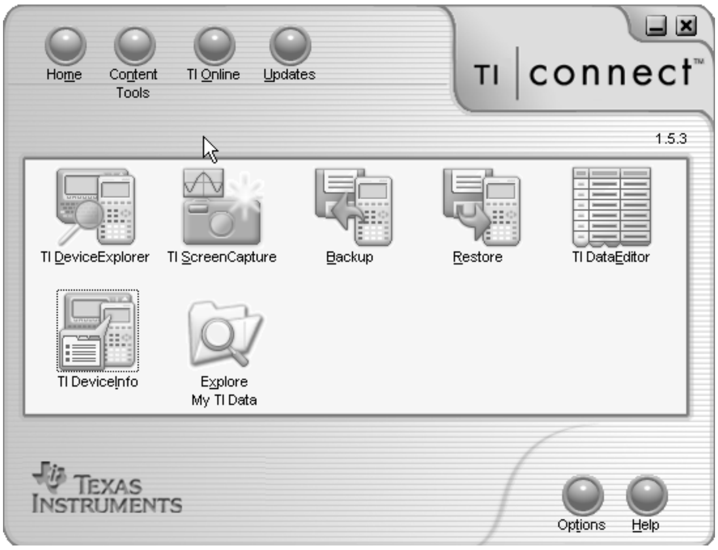
På TI:s webbplats kan du söka fram till applikationer och se vilket operativsystem som "gäller" just nu. För att ladda ner applikationer kan du först gå till adressen www.education.ti.com/sverige. Välj där nedladdning från menyn högst upp. Då kommer en ny sida upp där du till vänster väljer räknare och vad du vill ladda ner. Nedan syns en del av denna skärm. Välj sedan visa.

Du får nu en lista med alla tillgängliga applikationer. Med programmet **TI Connect** laddar du sedan ner applikationen till din räknare. Det finns också korta handledningar i pdf-format till alla applikationer.



Introduktion till programmet TI ConnectTM

Programmet TI Connect gör det enkelt och smidigt att utväxla information mellan din TI-enhet och din dator. Du kan använda programmet TI Connect för att överföra, säkerhets-kopiera, uppdatera, skapa och få tillgång till innehåll på TI-enheten.
Programmet TI Connect innehåller ett antal olika verktyg och det finns också symboler som länkar dig till andra TI-verktyg som redan finns installerade i datorn. Det fullständiga paketet med alla verktyg hjälper dig att använda din TI-enhet tillsammans med din dator på ett effektivt sätt.



Programverktygen i TI Connect™:
TI DeviceExplorer – Överför enhetsfiler mellan TI-enheter och datorer.
TI ScreenCapture – Fångar och redigerar skärmbilder från TI-enheter.
Backup – Gör säkerhetskopior av filer på TI-enheter.
Restore – Återställer filer till TI-enheter som säkerhetskopierats.
TI DataEditor – Skapar och redigerar datavariabler, t.ex. listor
TI DeviceInformation (TI DeviceInfo) – Ger information om anslutna TI-enheter.
Explore My TI Data – Öppnar Windows® Utforskare för att arbeta med enhets- och gruppfiler.

Programmet TI Connect™ finns på den skiva som du fick med din räknare men eftersom program uppdateras då och då råder vi dig att alltid se till att du har den sista versionen installerad. Gå till TI:s hemsida www.education.ti.com och sök på TI Connect™. Programvaran är gratis.

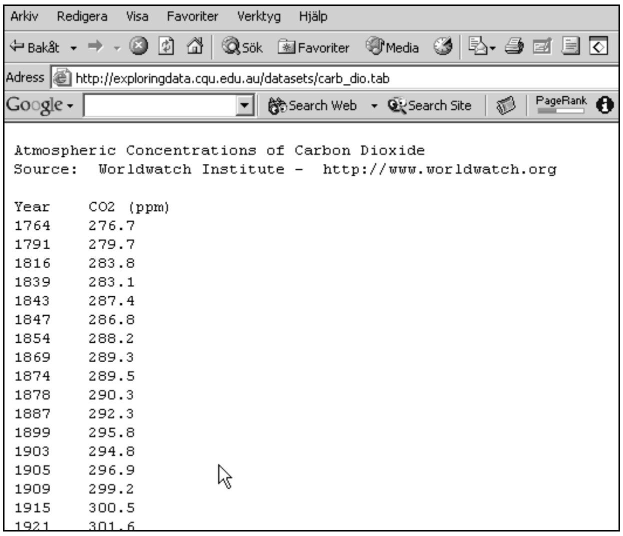
Vi rekommenderar att du till att börja med trycker på hjälpknappen längst ner till höger för att få närmare information om programmets olika verktyg. Till alla verktyg finns det mycket bra hjälpmenyer.

För att ansluta din räknare till datorn kan du välja mellan två kablar som medföljer din räknare. Den ena kabeln är en USB/USB-kabel och den andra har i ena ändan en anslutning som pluggas in i räknarens I/O-port längst uppe till vänster på räknaren. I båda fallen ska man alltså ansluta kabeln till någon av datorns USB-portar.

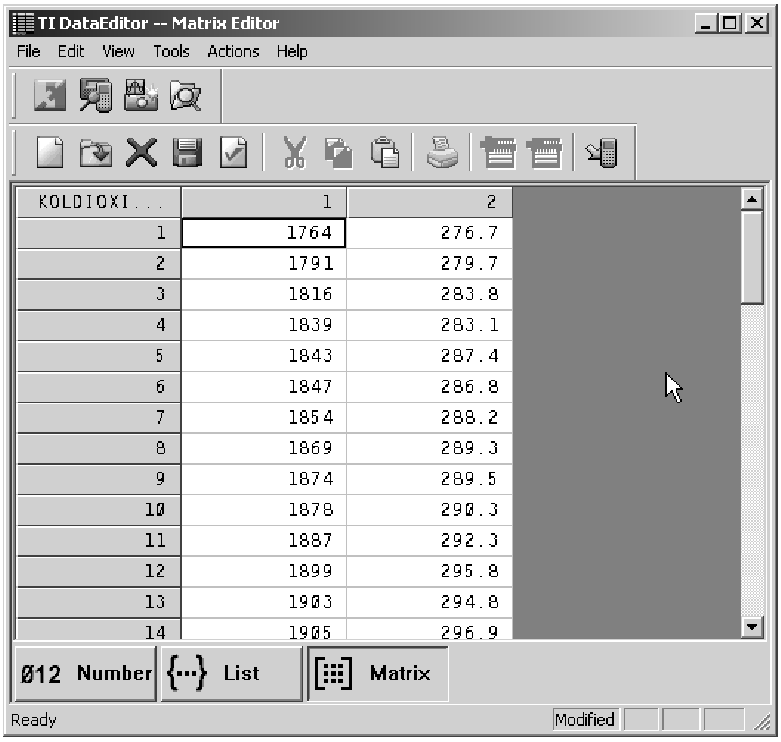
För att kontrollera att kommunikationen fungerar med din räknare, klicka på **TI Device Explorer**. Om allt fungerar så öppnas ett fönster och du ser en slags katalog över innehållet på räknaren.

Från detta verktyg kan du bl.a. kopiera och flytta filer till din dator. Med verktyget **Explore My TI Data** kan du skicka filer till räknaren från datorn. I menyn till Windows® Utforskare, som öppnas i den katalog du ställt in i programmet, markerar du räknarfiler som ska skickas till räknaren och sedan kan du via ett val i arkivmenyn skicka filer till räknaren.

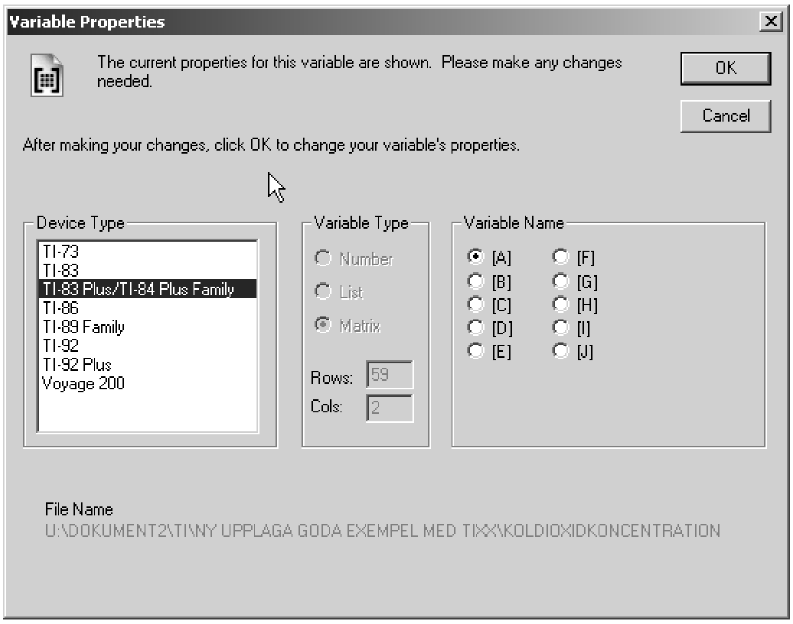
Vi ska nu visa ett bra exempel där du hämtar data från nätet och så småningom har dem i din räknare för att göra en närmare analys. Våra data består av två kolumner, årtal i den vänstra och atmosfärens koncentration av koldioxid i ppm i den högra. I detta fall är våra data i kolumnerna från början åtskilda med tabbtecken. Det fungerar också med ett kommatecken för att skilja kolumnerna åt. Decimaltecken måste alltid anges med punkt. Om data inte är åtskilda på detta sätt så kan man lätt fixa det i sin ordbehandlare genom att kopiera data. Se sedan till att du sparar texten, t.ex. i Microsoft Word, i rent textformat. Det finns några andra format som också fungerar.



Vi kopierar nu våra data från raden som börjar med 1764 och nedåt till år 2000. I bilden ovan ser vi inte hela datamängden. Den består av ca 60 rader. Öppna nu verktyget **TI Dataeditor**, gå till **File** och sedan **Import** i menyn. Leta upp den folder där du har sparat din textfil klicka sedan på filen. Se först till att du har ställt in din dataeditor i formatet Matris i fältet längst ner Så här ser resultatet ut.

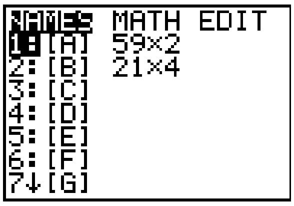


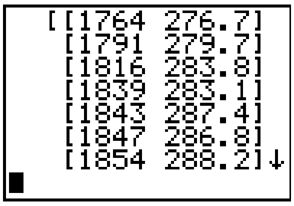
Klicka sedan på **Action** och välj verktyget **Send Matrix.** Du får då upp en dialogruta som säger att namnet koldioxid inte är ett tillåtet namn. Klicka på OK. Då kommer rutan nedan upp. De tillåtna namnen för matriser är A till J. Klicka t.ex. på [A] och tryck på OK



En ruta öppnas på skärmen, som visar att överföringen är på gång. Efter en kort stund försvinner rutan. På räknaren trycker du nu 2nd [MATRIX]. Då öppnas det fönster där du hanterar matriser. Vi sparade ju våra data i matrisen **[A]**, så du trycker bara på ENTER två gånger. Då dyker våra data upp på skärmen. Se skärmbilden till höger på nästa sida

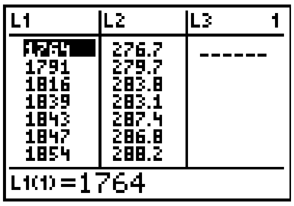
.





För att vi ska kunna få våra data i statistikeditorn måste vi göra om matrisen, som är data i flera kolumner, till listor. Gå till räknarens grundfönster och skriv instruktionen som i fönstret nedan. Du hittar instruktionen under MATH i matrismenyn. [A] kopierar du in från matrismenyn och L1 och L2 får du direkt från knapparna (tryck 2nd L1 resp. 2nd L2.

Nu finns dina data i statistikeditorn och du kan arbeta vidare, t.ex. rita ett diagram.



Exempel på några applikationer

Om du trycker på knapen APPS får du tillgång till ett antal applikationer som är installerade från början på räknaren. Applikationen Finance är speciell eftersom den är inbyggd i räknarens kod och den kan inte tas bort. På education.ti.com kan du ladda ner fler applikationer.

Finance

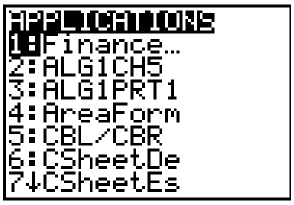
Tidigare har vi löst en del problem som handlar om pengar och ränta med upprepade beräkningar med räknarens *ANS-funktion* och med *ekvationslösaren*. Räknaren har en *applikation* för ekonomiska/finansiella beräkningar. Man kan säga att den del som man kommer till när man väljer applikationen **`FINANCE`** är en verkstad som är *specialdesignad* för att lösa problem som innehåller variabler som nuvarande värde, framtida värde, ränta, kapitaliseringsperiod för räntan (år, månad...) och tid. Ekvationerna ligger nu ”gömda” i räknaren.

På det utrymme som finns i denna handledning kan vi bara ta upp några av de många funktioner som finns till denna applikation. Du kan läsa mer i Handboken. Nu till vårt problem.

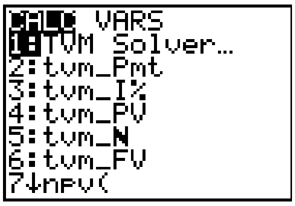
Du och din familj vill köpa ett sommarhus där ni behöver låna 400 000 kr. Ni kan högst ha en räntekostnad för lånet på 2 500 kr per månad. Vilken räntesats gör att ni kan avbetala ett lån på 400 000 kr på 20 år? Vi ska inte i beräkningarna ta hänsyn till den skattereduktion man kan göra på ränteutgifter. Sådana beräkningar görs efter kalkyleringen av den ”uthärdliga” räntan.

Till att börja med ser vi till att ställa in räknaren så att bara 2 decimaler visas. Då visas resultat av en del beräkningar som kronor och ören. Det blir lite lättare att läsa då.

För att komma applikationen trycker du alltså på den röda knappen märkt APPS. Applikationen **`FINANCE`** är placerad först i listan över applikationer.



Tryck på ENTER när räknaren när markören befinner sig vid **`1:TVM`**.



Pilen vid alternativ 7 visar att det finns fler funktioner. Det finns faktiskt 9 st till.

Vi ska nu använda alternativ **`1 TVM Solver`**, en *ekvationslösare* för ekonomiska beräkningar, där variablerna som vi arbetar med är

antalet betalningsperioder	*N*
räntesats (årlig)	*I*
nuvarande värde	*PV*
betalningsbelopp	*PMT*
framtida värde	*FV*

Idén med ekvationslösaren är att man ska fylla i fyra variabler för att beräkna den femte. På skärmbilden på nästa sida har vi fyllt i värden för de variabler vi känner till i vårt problem.

```
N=240.00
I%=■
PV=400000.00
PMT=-2500.00
FV=0.00
P/Y=12.00
C/Y=1.00
PMT:END BEGIN
```

Förklaringar:

- **N** är antalet betalningsperioder. Skriv in 20*12. Räknaren räknar ut resultatet när ni trycker på [ENTER].
- **I** är räntesatsen. Det är ju den vi ska räkna ut så vi går vidare och låter 0 stå kvar.
- **PV** är nuvarande värde (på lånet). Fyll i 400 000.
- **PMT** är betalningsbelopp varje period. Fyll i – 2 500. Observera att vi måste ha ett *minustecken*. Det står för ett utflöde (*cash outflow*).
- **FV** är framtida värde (på *lånet*). Fyll i 0.
- Längst ner ska man också fylla i **P/Y** som betyder antalet betalningsperioder per år. Fyll i 12.
  C/Y är antalet kapitaliseringar per år. Fyll i 1 där också. Banken räknar med ränta på årsbasis. 1 % månadsränta är inte samma sak som 12 % årsränta.
- Till slut ska ni fylla i om inbetalning ska ske i början eller slutet av varje år. Fyll i **END**.

Vi placerar markören vid rad 2 (**I%**) och trycker sedan på [ALPHA] [SOLVE]. Se skärmbilden till vänster på nästa sida. Resultatet blir att den uthärdliga räntesatsen är 4,45 %.
Vi antar nu att man istället betalar *en gång per år* istället. Hur stor kan då räntan vara? Vi fyller i vår tabell. 2 500 kr per månad blir istället 30 000 kr per år och antalet betalningsperioder blir 20. Fyll också i **P/Y** till 1.

Resultatet blir

```
N=240.00
▪I%=4.45■
PV=400000.00
PMT=-2500.00
FV=0.00
P/Y=12.00
C/Y=1.00
PMT:END BEGIN
```

```
N=20.00
▪I%=4.22■
PV=400000.00
PMT=-30000.00
FV=0.00
P/Y=1.00
C/Y=1.00
PMT:END BEGIN
```

Vi ser att räntesatsen blir något lägre, 4,22 %. Å andra sidan kan man anta att man får lite ränta om man är sparsam och varje månad sätter undan pengar.

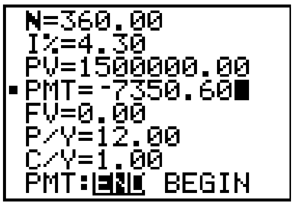
Ränteläget blir bättre och man får nu stället ett 30-årigt lån till 3,90 % ränta. Samma sommarhus, 400 000 kr som lån. Hur stort *månatligt* belopp ska man då betala? Ekvationslösaren ger svaret 1871 kr.

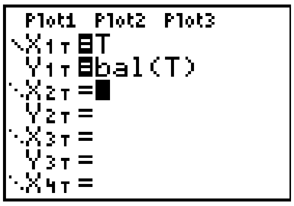
```
N=360.00
I%=3.90
PV=400000.00
▪PMT=-1871.12■
FV=0.00
P/Y=12.00
C/Y=1.00
PMT:END BEGIN
```

Nu ska vi göra en ”balansräkning” för ett lån som löper på 30 år.

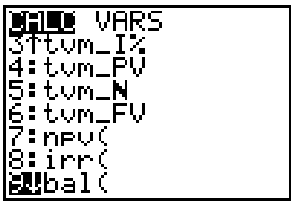
Du ska köpa ett hus som finansieras med ett 30-årigt lån med 4,30 % ränta. Huset kostar 1800 000 kr och du betalar 300 000 kr kontant. Hur mycket ska du betala i ränta och amortering för lånet per månad? Gör sedan en balansräkning för ditt lån månad för månad.

Först räknar vi ut hur mycket vi ska betala per månad. Se skärmbilden till vänster på nästa sida.





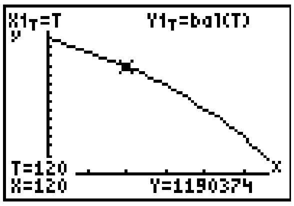
Ställ in räknaren på ritning av kurvor i *parameterform*. I menyn för inskrivning av parameterekvationer (tryck [Y=] när du först ställt in läget **PAR** under [MODE]) skriver du in enligt högra fönstret ovan.



Funktionen **Bal**, som du kopierar in från finansmenyn, beräknar balansen för en amorteringsplan och använder de värden som är lagrade i variablerna **I%**, **PV** och **PMT**.

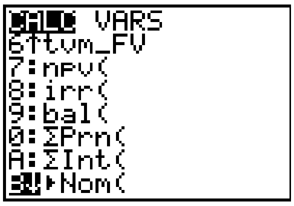
Ställ nu in räknarens fönster enligt följande:
Tmin =0, **Tmax = 360**, **Tstep = 12**
Xmin = -60, **Xmax = 360**, **Xscl = 60**,
Ymin = –200000, **Ymax = 1800000** och **Yscl = 100000**.

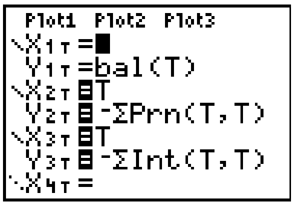
Tryck sedan på [GRAPH]. Se skärmbilden nedan.



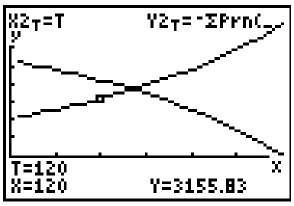
Med funktionen [TRACE] kan vi nu följa balansen, dvs. återstående skuld, år för år. Observera att tidsaxeln är indelad i betalningsperioder och att vi går 12 steg framåt, dvs. 1 år, när vi trycker på [▸]. Efter 120 perioder, dvs. 10 år, är den återstående skulden 1 190 374 kr.

Du kan också månad för månad beräkna hur mycket du ska betala i amortering resp. ränta. Då använder man funktionerna **ΣPrn** resp. **ΣInt.** Vi har här avmarkerat funktionen bal. Man placerar då markören ovanför likhetstecknet och trycker på [ENTER]. Funktionerna inkopieras från finansmenyn nedan.

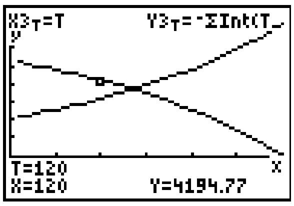




Om du ställer in ett bra fönster kan du nu rita kurvor som visar hur amorteringsdel, resp. räntedel ökar resp. sjunker under hela lånetiden. Summan är hela tiden konstant, 7350,60 kr.



amortering efter 120 månader



ränta efter 120 månader

Cabri®Jr

Cabri® Jr är ett s.k. interaktivt geometriprogram där du kan bl.a. arbeta med geometriska konstruktioner. Att programmet har Jr i namnet beror på att det finns ett motsvarande program, Cabri Geometry™ för Windows®. Programmet arbetar med fem menyer som man når genom att trycka på någon av räknarens grafknappar ([Y=] t.o.m. [GRAPH]) som finns precis under skärmen:

Arkiv: Denna meny använder när du sparar och hämtar filer

Skapa: Här finns verktyg för att skapa punkter, linjer, cirklar, trianglar mm.

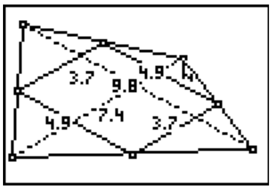
Konstruera: Här kan man konstruera vinkelräta och parallella linjer, bisektriser, mittpunkter, mittpunktsnormaler mm.

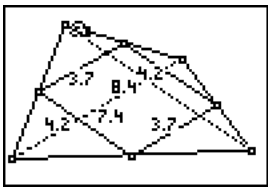
Transformera: Här kan man transformera olika geometriska objekt, t.ex. genom spegling, rotation mm.

Utseende mm: Med verktyg här kan du gömma objekt och visa objekt med heldragna eller prickade linjer. Du kan också göra mätningar av längd, omkrets, area och vinkelstorlek. Här kan du också lägga in koordinatsystem och arbeta med linjers ekvationer.

Vi visar nu några exempel på vad man kan göra i applikationen. I det första exemplet har vi konstruerat en fyrhörning och sedan gjort en ny fyrhörning där hörnen ligger på mittpunkterna i den stora fyrhörningen.

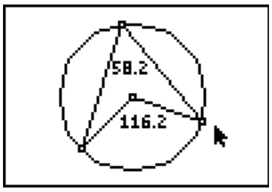
Vi har också mätt längderna på den lilla fyrhörningens sidor och diagonalerna i den stora fyrhörningen. Genom att flytta en rörlig pekare och markera ett av hörnen kan vi sedan flytta detta hörn. Se den högra figuren nedan. Man ser en liten hand i det övre vänstra hörnet.

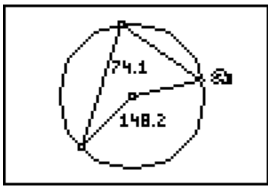




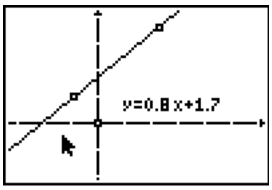
Mittpunkterna ligger kvar även om två sidor förändras och motstående sidor i den lilla fyrhörningen är fortfarande lika långa. Diagonalerna verkar vara parallella med och dubbelt så långa som sidor i den lilla fyrhörningen.

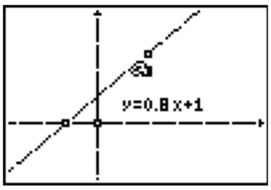
I nästa exempel har vi ritat en cirkel och dragit två vinkelben till samma båge. Vi ser att medelpunktsvinkeln fortfarande är dubbelt så stor som periferivinkeln även om vi drar i någon av de tre punkterna på cirkeln och därmed förändrar vinklarna.





I det sista exemplet har vi lagt in en rät linje i ett koordinatsystem och sedan flyttat linjen. Linjens ekvation förändras.





Ovan har vi parallellförflyttat själva linjen Man kan också dra i och flytta punkterna. Cabri® Jr är ett fantastiskt program som ger din räknare stora plusvärden.

Register