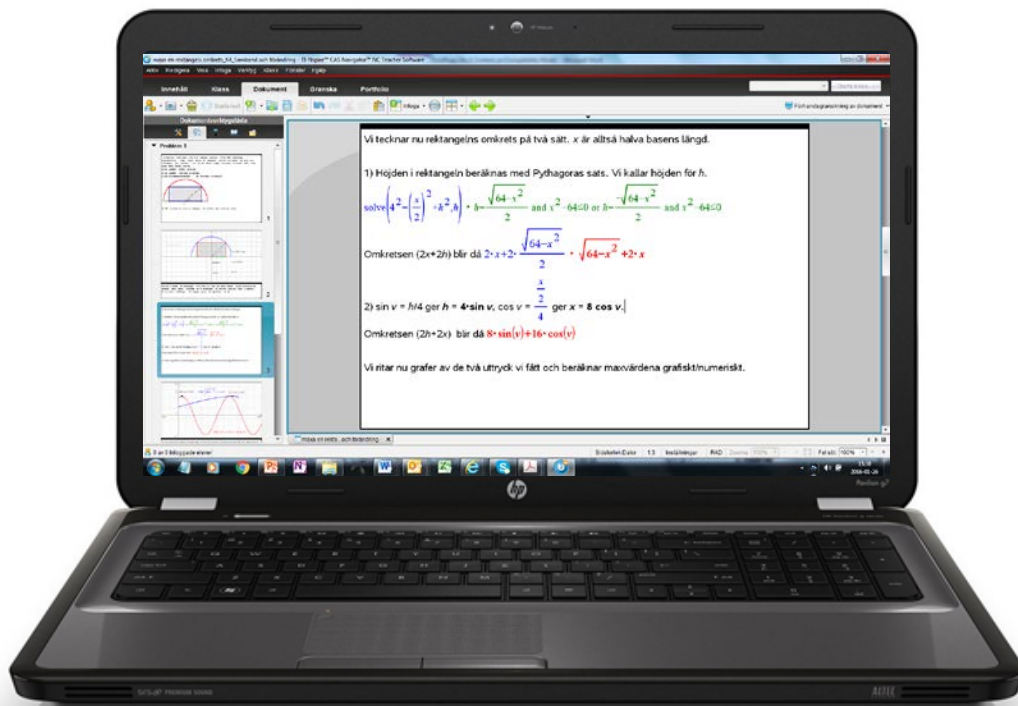
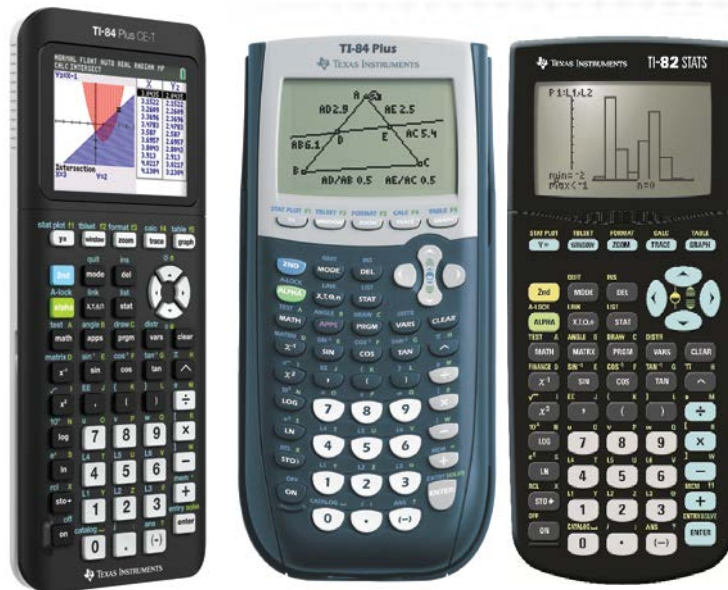


Matematik 4

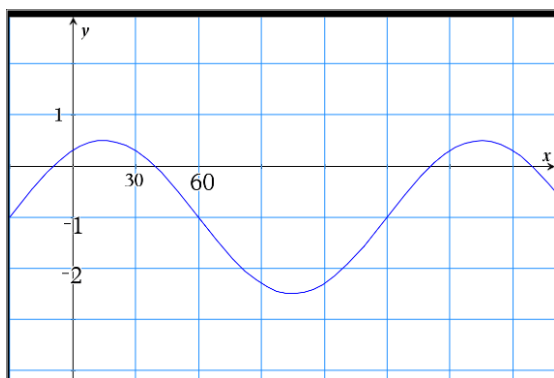
Övningar med TI-82 Stats, TI-84 Plus och TI-Nspire™ CAS



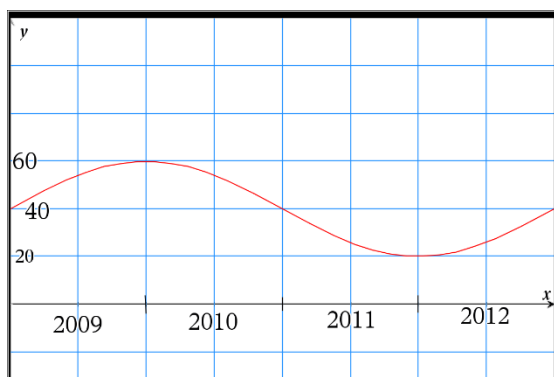
Matematik 4 – övningar med TI-82 Stat, TI-84 Plus och TI Nspire™ CAS

Vi ger här korta instruktioner där man med fördel kan använda antingen TI-82 Stat, TI-84 Plus eller programmet TI Nspire™ CX CAS inom viktiga avsnitt i kursen. Vi hoppas att detta kan öka begreppsförståelsen genom att man kan göra bilder av matematiken eller helt enkelt genom att göra snabba beräkningar. Nedan ser ni lite typiska uppgifter i Ma 4 som vi går igenom på de efterföljande sidorna. Spalten till vänster är för räknarna TI-82 Stat och TI-84 Plus. Spalten till höger är för dataprogrammet TI Nspire CAS.

1. Bestäm det exakta värdet av $\sin(A+B)$ om $\sin A = \frac{3}{5}$ $90^\circ < A < 180^\circ$ och $\sin B = -\frac{5}{13}$ $180^\circ < B < 270^\circ$.
2. Lös ekvationen $\cos(0,5x+33,3^\circ) = 0,740$ fullständigt. Svara med en decimal.
3. Har ekvationen $\cos(0,4x + 10^\circ) = 0,4$ någon lösning i intervallet $800^\circ < x < 1000^\circ$?
4. Lös ekvationen $\sin 5x = \sin 4x$.
5. För vilka värden på a saknar ekvationen $2\cos 3x = 3a$ lösningar?
6. Bestäm en funktion av typen $y = a \cdot \sin b(x+v) + d$ som ger grafen nedan.



7. Lös ekvationen $\sin x - 3 \cdot \cos x = 0$ och svara med en decimal.
8. Bestäm det exakta värdet av $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ om $f(x) = \frac{\sin x}{2} - \frac{\cos x}{3}$.
9. Bestäm för vilka x -värden kurvan $f(x) = 0,3x + \cos x$ har en extrempunkt.
10. Bestäm ekvationen för tangenten till kurvan $y = 3 \sin 2x - \cos 2x$ då $x = \frac{3\pi}{4}$.
11. En biolog har under en lång tid studerat antal lodjur inom ett område. Hennes resultat visas i diagrammet.
 - a) Ställ upp en funktion som modell för hur antalet lodjur har varierat.
 - b) Hur många lodjur finns det i slutet av år 2015 om antalet fortsätter att variera enligt modellen.



12. Undersök grafiskt och visa med en enkel skiss om det finns några v så att $2 \cdot \sin(v+12^\circ) = \cos(v+23^\circ)$.

13. Låt $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ och bestäm $f'(e)$.

14. Antalet bakterier y i en näringslösning ökar enligt differentialekvationen $\frac{dy}{dt} = 0,15y$ där t är tiden i timmar.

Antalet bakterier från början är 10 000 st.

a) Bestäm k så att $y = 10\,000 \cdot e^{kt}$ är en lösning till differentialekvationen.

b) Hur många bakterier finns det efter 8 timmar.

15. Kurvan $y = 5 - x^2$ begränsar tillsammans med linjerna $y = 4x$ och $y = 0,5x$ ett område i första kvadranten. Bestäm arean av området.

16. En effekt varierar enligt tabellen.

Uppskatta energiåtgången för $t=5$ till $t=25$ genom att

t (s)	5	10	15	20	25
P (W)	48	52	55	46	52

a) rita figur och uppskatta integralens värde

b) anpassa lämplig kurva till tabellen och beräkna en integral.

17. Livslängden x år för en radioaktiv isotop med sönderfallskonstanten $\lambda = 0,023$ beskrivs av en exponentialfördelning med $f(x) = 0,023 \cdot e^{-0,023x}$.

a) Beräkna sannolikheten $P(<20 \text{ år})$

b) Beräkna sannolikheten $P(>30 \text{ år})$

c) Ställ upp en funktion som ger $P(<\alpha)$

18. Kurvan $y = 9 - x^2$ roterar kring x -axeln. Bestäm volymen av den ändliga kropp som då uppkommer. Svara exakt.

19. Förenkla det komplexa talet z och ange $\operatorname{Re} z$ och $\operatorname{Im} z$ då $z = (1+2i) - (2+i)$.

20. Bestäm konjugatet $\bar{z}$ och absolutbeloppet $|z|$ då $z = 4+i$.

21. Lös ekvationen $z^3 = 27$, svara i polär form och skissa lösningarna i ett komplext talplan.

22. Ekvationen $z^4 = w$ har en lösning $z_1 = 1+i$. Vilka är de andra lösningarna?

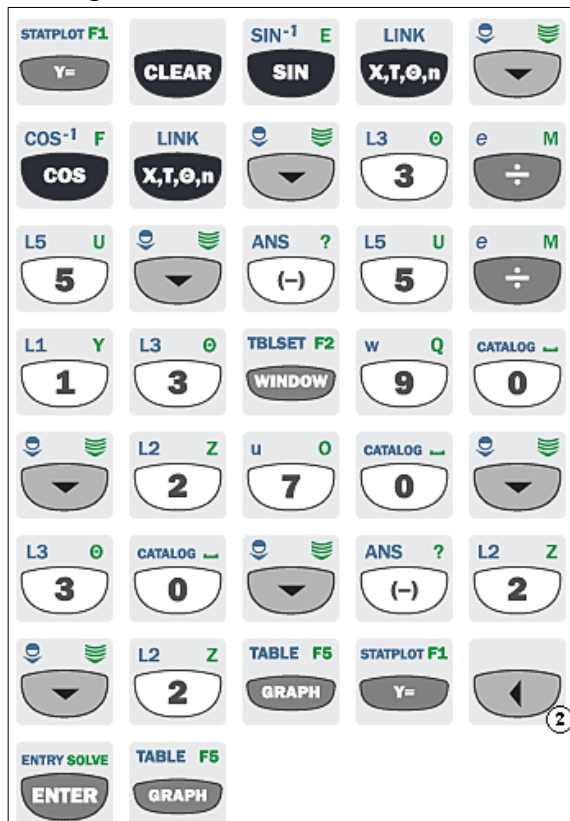
23. Bestäm på formen $a+bi$ alla sjättepotenser ur -64 .

24. En maskin fyller chipspåsar. Chipspåsarnas vikt är normalfördelade med medelvikten 198 g och standardavvikelsen 4,5 g. Till en butik levereras 200 påsar från denna maskin. Hur många av dessa påsar kan förväntas väga mer än 200 g?

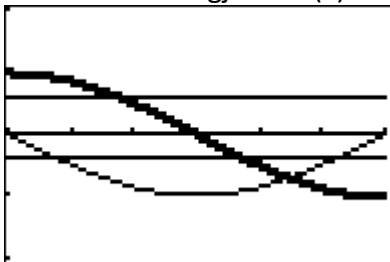
1. Bestäm det exakta värdet av $\sin(A+B)$ om $\sin A = \frac{3}{5}$ $90^\circ < A < 180^\circ$ och $\sin B = -\frac{5}{13}$
 $180^\circ < B < 270^\circ$

TI84Plus/TI82Stat

Först får man rita upp graferna $\sin(x)$ och $\cos(x)$ i intervallet 90° upp till 270° . Det betyder att man får ha grad istället för rad under Mode.

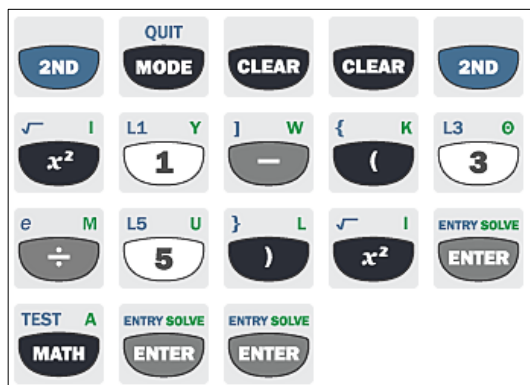


Här har vi även gjort $\sin(x)$ -kurvan lite tjockare



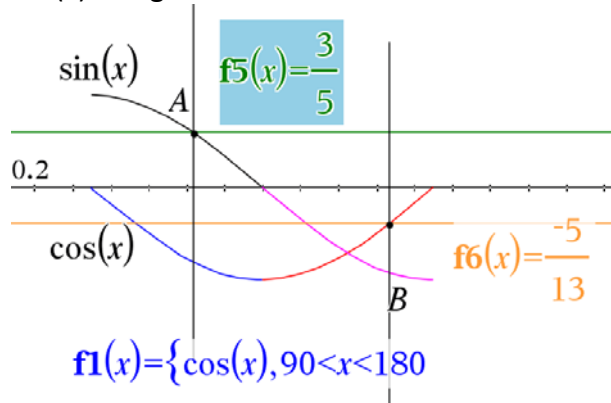
Vi gör om $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$

"Trig-ettan" ger ekvationen $\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2(\alpha) = 1$



TI Nspire™ CAS

Först får man rita upp kurvorna $\sin(x)$ och $\cos(x)$ i de givna intervallen.



Här får man göra om $\sin(a+b)$ till $\sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$

Men vi vet inte $\cos(a)$ och $\cos(b)$. Men "trigonometriska 1" hjälper oss

$$\text{solve}\left(\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2(a) = 1, \cos(a)\right)$$

$$\rightarrow \cos(a) = -\frac{4}{5} \text{ or } \cos(a) = \frac{4}{5}$$

Vilket svar ska vi använda?

Kontroll med kurvan $y = \cos(x)$ vid $90^\circ < x < 180^\circ$ ger att $\cos$ måste vara negativ

$$\text{Alltså } \cos(a) = -\frac{4}{5}$$

$$\text{solve}\left(\left(\frac{-5}{13}\right)^2 + \cos^2(b) = 1, \cos(b)\right)$$

$$\rightarrow \cos(b) = -\frac{12}{13} \text{ or } \cos(b) = \frac{12}{13}$$

Vilket svar ska vi använda?

Kontroll med $y = \cos(x)$ vid $180^\circ < x < 270^\circ$ ger att $\cos$ måste vara negativ.

$$\text{Alltså } \cos(b) = -\frac{12}{13}$$

Exakta värdet för $\sin(a+b)$ blir då

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{-12}{13} + \frac{-4}{5} \cdot \frac{-5}{13} = \frac{-16}{65}$$

Svaret blir $-\frac{16}{65}$.

$$\sqrt{1 - (3/5)^2} = .8$$

$$\text{Ans} \rightarrow \text{Frac} = \frac{4}{5}$$

Här får man två svar: $\pm \frac{4}{5}$. Genom att titta på

kurvan $\cos(x)$ då $\sin(x) = 3/5$ ser vi att $\cos$ måste vara negativ vid den vinkeln. $\cos(a)$ blir

alltså $-\frac{4}{5}$.

På samma sätt får vi värdet på $\cos(b)$.

$$\sqrt{1 - (5/13)^2} = .9230769231$$

$$\text{Ans} \rightarrow \text{Frac} = \frac{12}{13}$$

Även här måste vi få två svar, ett positivt och ett negativt. Genom att titta på kurvan $\cos(x)$ då $\sin(x) = -5/13$ ser vi att $\cos$ måste vara negativ vid den vinkeln.

$\cos(b)$ blir alltså $-\frac{12}{13}$.

Nu kan vi räkna ut det exakta värdet:

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{-12}{13} + \frac{-4}{5} \cdot \frac{-5}{13}$$

$$(3/5) * (-12/13) + (-4/5) * (-5/13) = -.2461538462$$

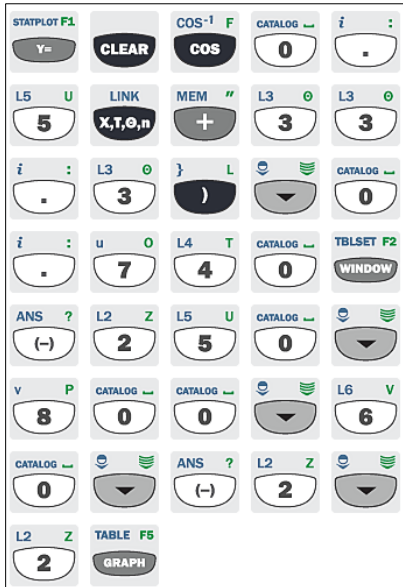
$$\text{Ans} \rightarrow \text{Frac} = -\frac{16}{65}$$

2. Lös ekvationen $\cos(0,5x+33,3^\circ) = 0,740$ fullständigt. Svara med en decimal

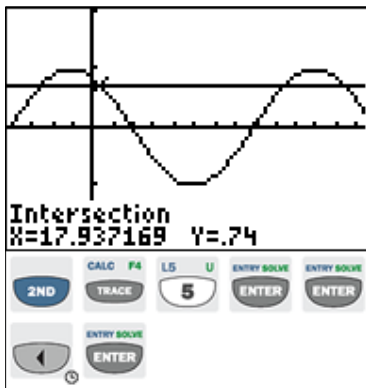
T184Plus/T182Stat

Grafiskt: Här skriver man in funktionerna $f_1(x)=\cos(0,5x+33,3)$ och $f_2(x)=0,740$.

Nu kan vi undersöka skärningarna.



Vi söker skärningen på ett ställe mellan kurvorna



På samma sätt hittar man den andra skärningen.

Eftersom vi har $0,5x$ i $\cos(0,5x+33.3^\circ)$ måste perioden vara 720° . Svaren blir då $-151,1+n\cdot 720$ eller $17,9+n\cdot 720$.

Lösning med ekvationslösaren: Pröva med 3 och 200 för att få fram de båda svaren.

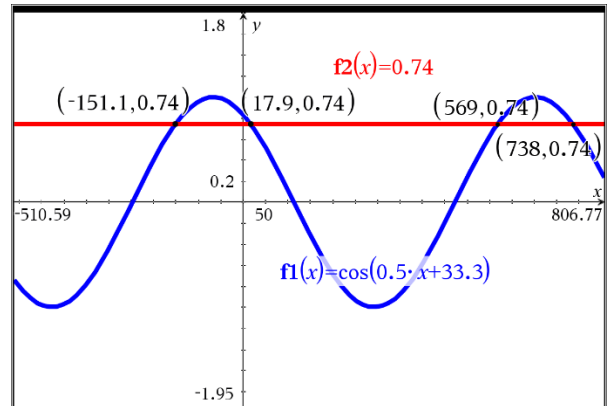


TI Nspire™ CAS

Grafiskt: Här skriver man in funktionerna $f(x)=\cos(0,5x+33,3)$ och $g(x)=0,740$ och undersöker skärningen av kurvorna.

Välj *Infoga, Graf*. Skriv in funktionerna och kom ihåg att ha punkt som decimaltecken.

Man måste också ställa om vinkelinställningen till grader. Välj då Verktyg, Inställningar, Inställningar och välj vinkel Grader



Genom att beräkna skärningarna mellan kurvorna ser man svaren.

Välj Verktyg, 8 Geometri, 1 Punkter och Linjer,
3 Skärningspunkter. Vi ser nu svaren.

$$x = -151,1 + n \cdot 720 \text{ eller } 17,9 + n \cdot 720.$$

Man kan också lösa det med en ekvation:

Infoga appen *Anteckningar*. Även här måste man ställa om till grader. Inställningar hittar du i fliken längst ner på sidan. Klicka på fliken och ställ om.

Tryck Ctrl M för att infoga en ruta för matematikberäkningar.

$$\text{solve}(\cos(0.5 \cdot x + 33.3) = 0.74, x)$$

► $x = 720 \cdot (nI - 0.209913)$ or

$$x=720. \cdot (nI+0.024913)$$
$$\text{expand}(720 \cdot (nI - 0.209913))$$

► $720 \cdot n1 - 151.137$

$$\text{expand}(720 \cdot (nI + 0.024913))$$

► $720 \cdot n1 + 17.9374$

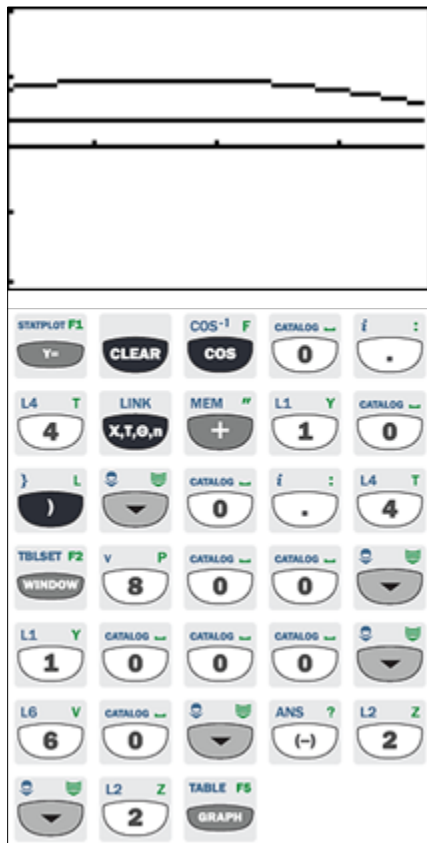
Svaret blir då

$$-151.1^\circ + n \cdot 720^\circ \text{ eller } 17.9^\circ + n \cdot 720^\circ$$

3. Har ekvationen $\cos(0,4x + 10^\circ) = 0,4$ någon lösning i intervallet $800^\circ < x < 1000^\circ$?

TI84Plus/TI82Stat

Grafiskt: Här skriver man in funktionerna $f(x)=\cos(0,4x+10)$ och $g(x)=0,4$ och undersöker skärningen av kurvorna.



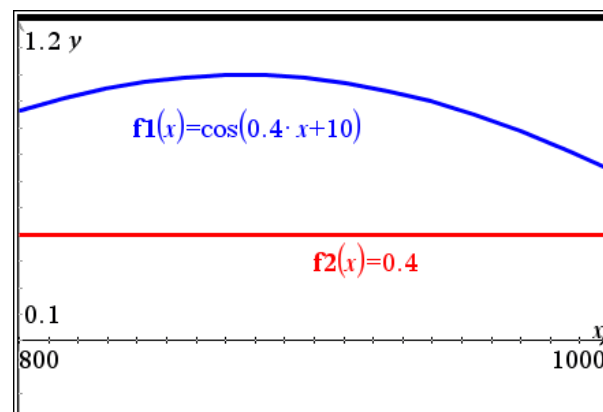
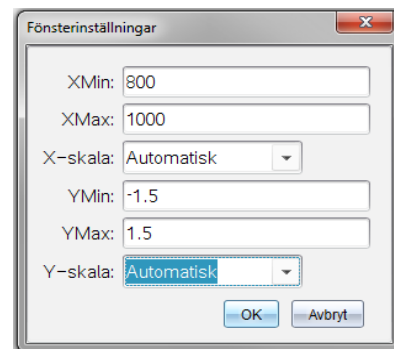
Ingen skärning betyder att det inte finns någon lösning av ekvationen i det intervallet.

TI Nspire™ CAS

I grafappen skriver man in funktionerna $f(x)=\cos(0,4x+10)$ och $g(x)=0,4$ och undersöker skärningen av kurvorna.

Välj *Infoga, Graf*. Skriv in funktionerna och kom ihåg att ha punkt som decimaltecken. Vi väljer även att se kurvorna mellan 800° och 1000° .

Verktyg, Fönster/Zoom, Fönsterinställningar

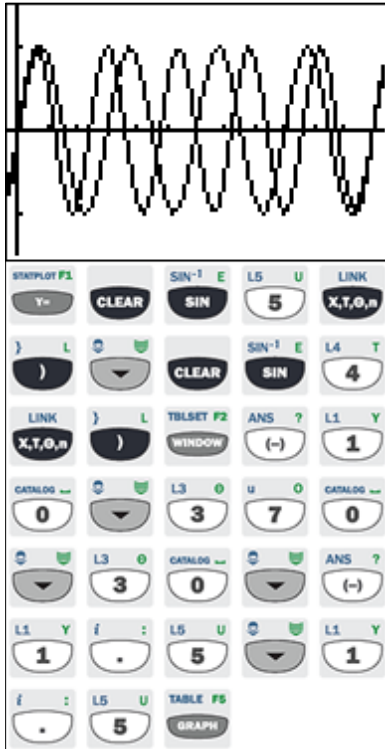


Här ser vi att kurvorna inte skär varandra. Det finns alltså ej någon lösning i det intervallet.

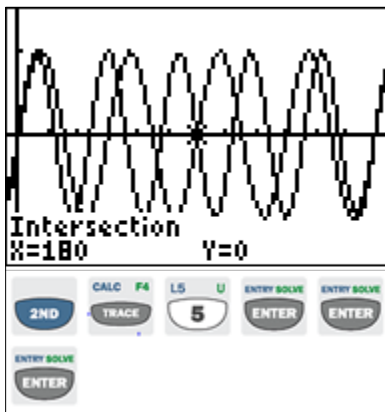
4. Lös ekvationen $\sin 5x = \sin 4x$

TI84Plus/TI82Stat

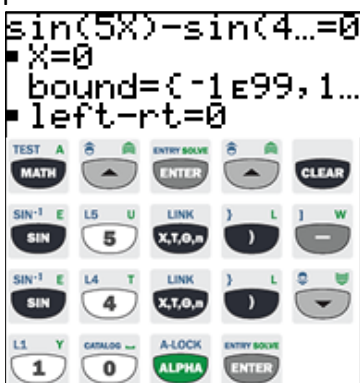
Vi ritar upp de två kurvorna för att se var de skär varandra.



Genom att se skärningen vid en punkt kan man sedan gå igenom alla 10 st skärningar.

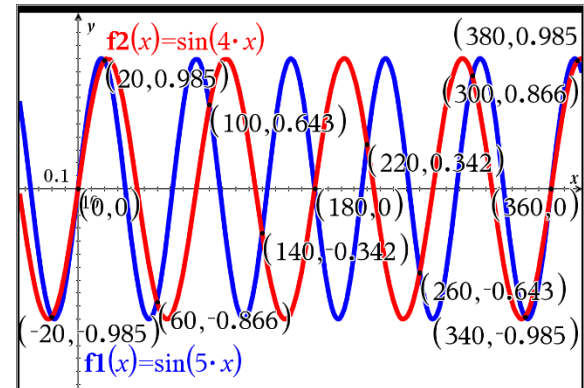


Ekvationslösaren kan man också hitta de 10 lösningarna i intervallet $0-360^\circ$. Man får gissa på större och större tal för att hitta alla.



TI Nspire™ CAS

Genom *Infoga*, *Grafer* och skriva in funktionerna kan man se graferna $f1(x)=\sin(5x)$ och $f2(x)=\sin(4x)$.



Här ser man att det finns 10 st lösningar i intervallet $0-360^\circ$.

Man kan även lösa ekvationen direkt genom: *Infoga Anteckningar* och sedan *Ctrl M* för att få en matematikruta.

Beräkningar, *Algebra*, *Solve* ger ekvationslösaren och man skriver sedan in ekvationen. Glöm ej att ange för vilken variabel ekvationen ska lösas. Vi har också skrivit in villkoret att vi ska lösa ekvationen i intervallet $0 \leq x \leq 360$.

Här kommer lösningarna:

$0+n \cdot 360$, $20+n \cdot 360$, $60+n \cdot 360$, $100+n \cdot 360$, $140+n \cdot 360$, $180+n \cdot 360$, $220+n \cdot 360$, $260+n \cdot 360$, $300+n \cdot 360$, $340+n \cdot 360$

`solve(sin(5·x)=sin(4·x),x)|0≤x≤360`

► $x=0$. or $x=20$. or $x=60$. or $x=100$. or $x=140$. or $x=180$. or $x=220$. or $x=260$. or $x=300$. or $x=340$. or $x=360$. ⚠

5. För vilka värden på a saknar ekvationen $2\cos 3x = 3a$ lösningar?

TI84Plus/TI82Stat

Vi kan skriva om ekvationen på detta sätt

$$\frac{2}{3}\cos(3 \cdot x) = a$$



Här ser man att om $a > 0,667$ eller $a < -0,667$ saknas lösningar.

Exakt svar $a > 2/3$ eller $a < -2/3$

TI Nspire™ CAS

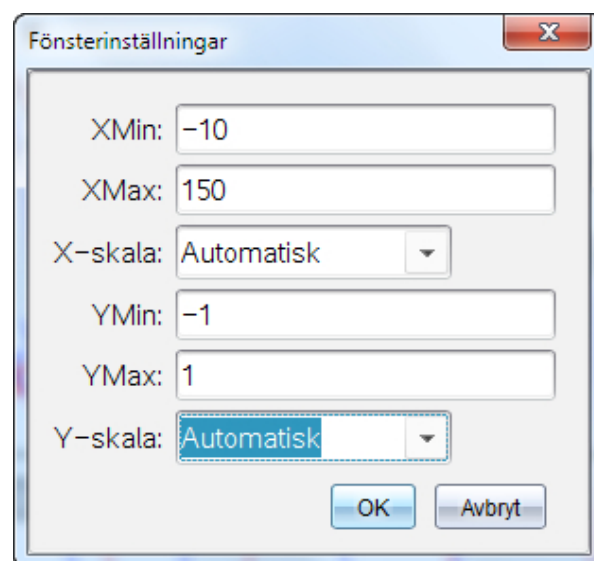
Vi kan skriva om ekvationen på detta sätt

$$\frac{2}{3}\cos(3 \cdot x) = a$$

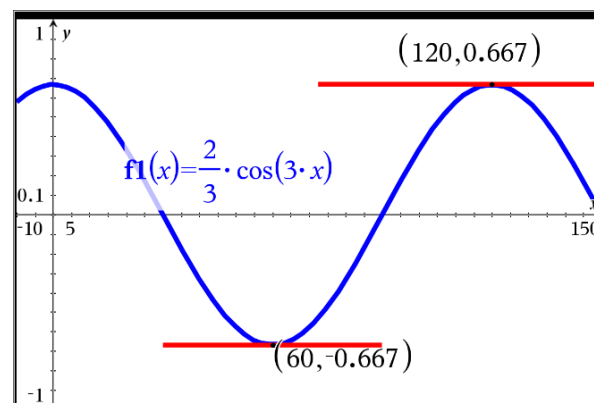
Vi skriver nu in vänsterledet som en funktion och ser vilka värden a kan anta.

Infoga grafappen och gör sedan sedan fönsterinställningarna med

Verktøy, fönster/zoom, fönsterinställningar



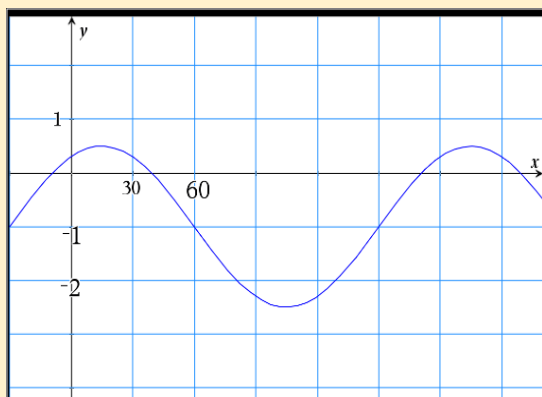
Genom Verktøy, Geometri, Konstruktion, Parallell kan man klicka på x-axeln och sedan en punkt på kurvan. Den punkten kan man högerklicka på och välja koordinater. Flyttar man sedan punkten ser man vilka värden a kan anta.



Här ser man att om a är $> 0,667$ eller $a < -0,667$ saknas lösningar.

Exakt svar: $a > 2/3$ eller $a < -2/3$

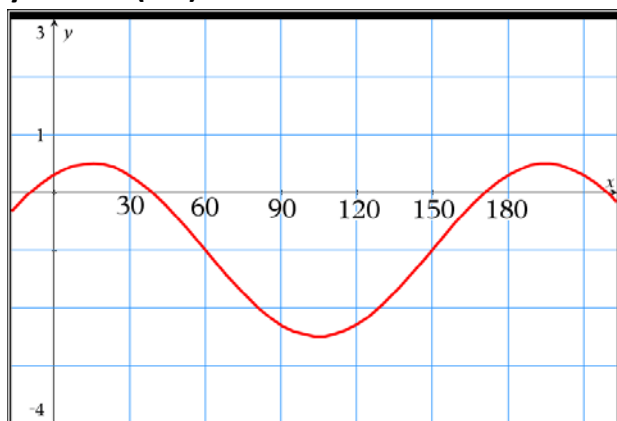
6. Bestäm en funktion av typen $y=a\cdot\sin b(x+v)+d$ som ger grafen nedan.



TI84Plus/TI82Stat

Vi får försöka att analysera grafen i fyra steg:

$$y=a \sin b(x-v)+d$$



a Amplituden a är halva avståndet mellan max- och minvärdet i y -led. Här är amplituden $a=(0,5-(-2,5))/2=1,5$.

b Här får man se hur lång perioden är på kurvan, dvs avståndet mellan två maxvärden i x -led. Här är det 180° som ger $b=360/180=2$

c Eftersom kurvan är förskjuten åt vänster till det negativa hållet måste v vara negativ. Vi ser att den förskjutits 30° . Det ser man genom att sinuskurvan "startar" då $v=-30$.

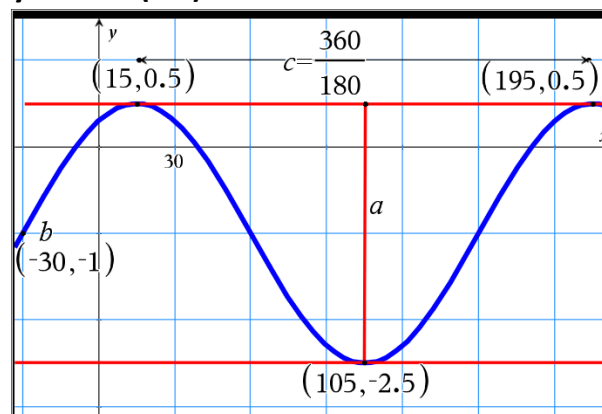
d Här letar vi efter linjen som går mitt i sinuskurvan. Det blir medelvärdet av topp- och bottenvärdena. $d=(0,5+(-2,5))/2=-1$

Svar: $1.5 \sin 2(x+30)-1$

TI Nspire™ CAS

Vi får försöka att analysera grafen i fyra steg:

$$y=a \sin b(x-v)+d$$



a Amplituden är halva avståndet mellan max- och minvärdet i y -led, amplitud. Här är amplituden $a=(0,5-(-2,5))/2=1.5$.

b Här får man se hur lång perioden är på kurvan, dvs avståndet mellan två maxvärden i x -led. Här är det 180° som ger $b=360/180=2$

c Eftersom kurvan är förskjuten åt vänster till det negativa hållet måste v vara negativ. Vi ser att den förskjutits 30° . Det ser man genom att sinuskurvan "startar" då $v=-30$

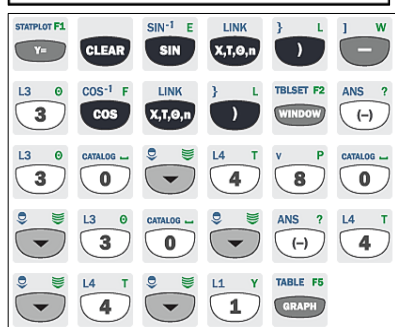
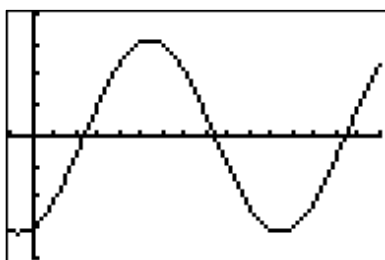
d Här letar vi efter linjen som går mitt i sinuskurvan. Det blir medelvärdet av topp- och bottenvärdena. $d=(0,5+(-2,5))/2=-1$

Svar: $1.5 \sin 2(x+30)-1$

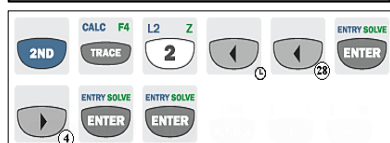
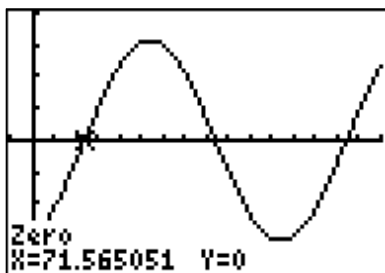
7. Lös ekvationen $\sin x - 3 \cdot \cos x = 0$ och svara med en decimal.

TI84Plus/TI82Stat

Här skriver vi först in funktionen och tittar på grafen.



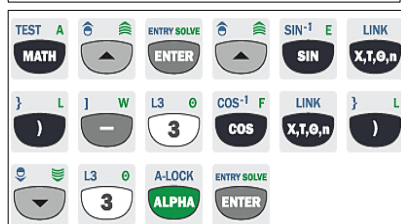
Vi beräknar alla skärningar (nollställen) med x-axeln.



Svar: $71,6^\circ + n \cdot 360^\circ$, $251,6^\circ + n \cdot 360^\circ$,

Man kan även använda *ekvationslösaren* och ta rötterna, en i taget. Man får gissa på högre och högre värden för att hitta alla.

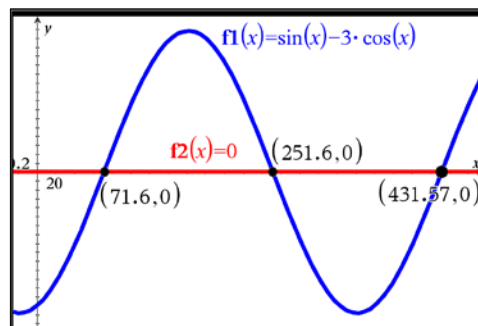
```
sin(X)-3cos(X)=0
X=71.565051177...
bound={-1E99,1...
left-rt=0
```



TI Nspire™ CAS

I grafappen skriver vi in funktionen $f1(x)=\sin(x)-3\cos(x)$ samt även $f2(x)=0$. Se till att inställningen är grader: Välj *Verktyg, Inställningar, Grader*.

För att se grafen bra så ta tag i ett skalstreck på x-axeln och dra det mot origo och håll samtidigt in Shift-tangenten. Upprepa tills du är nöjd.



Här har man beräknat kurvans skärningar med $f2(x)=0$. *Verktyg, Geometri, Punkter och linjer, Skärningar* och välj sedan de två kurvorna för skärningarna.

Svar: $71,6^\circ + n \cdot 180^\circ$ (71,6; 251,6; 431,6 ...)

Man kan även lösa det direkt med en ekvation. Här måste man se att $\sin(x)$ och $\cos(x)$ betyder att perioden för kurvan är 360.

```
solve(sin(x)-3*cos(x)=0,x)|0<x<360
x=71.5651 or x=251.565
```

Lodräta strecket bakom parenteserna betyder "under förutsättning att" och man hittar det under symbolen "Boken", *Beteckningar* och markerar sedan strecket | och klickar på *Enter*.

Man får ett *exakt* svar. Men vill man ha ett ungefärligt svar håller man Ctrl-knappen intryckt när man trycker på Enter.

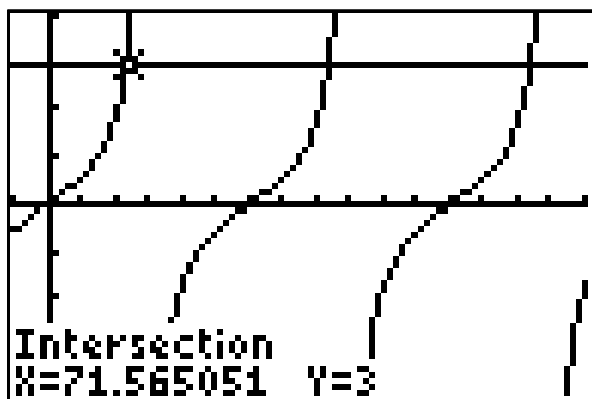
Skriver man *Expand* (Utveckla) före alltihop får man följande svar:

```
solve(sin(x)-3*cos(x)=0,x)|0<x<360
x=71.5651 or x=251.565
expand(solve(sin(x)-3*cos(x)=0,x))
x=180.*n+71.5651
```

TI84Plus/TI82Stat

Eftersom $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ kan man istället

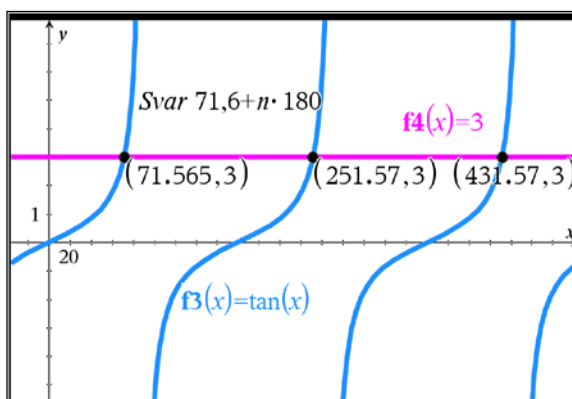
skriva om ekvationen som $\tan(x) = 3$ och titta på skärningarna mellan $\tan(x)$ -grafens och linjen $y=3$.



TI Nspire™ CAS

Eftersom $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ kan man istället

skriva om ekvationen som $\tan(x) = 3$ och titta på skärningarna mellan $\tan(x)$ -grafens och linjen $y=3$.

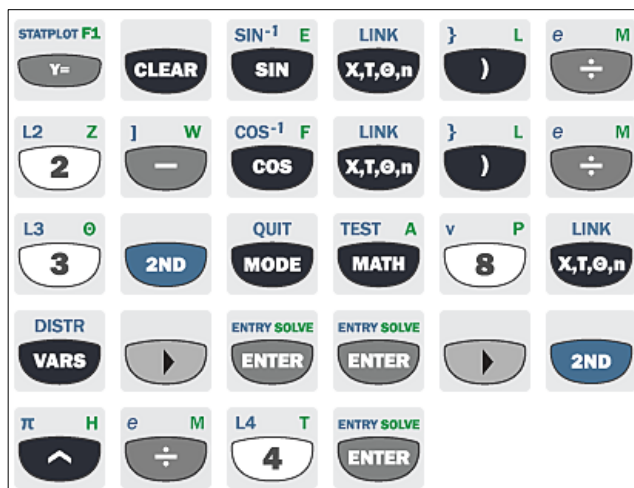


8. Bestäm det exakta värdet av $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ om $f(x) = \frac{\sin x}{2} - \frac{\cos x}{3}$

TI84Plus/TI82Stat

Det går inte med denna enhet att få ett exakt värde men ett ungefärligt värde går det bra att beräkna.

Kontrollera i Mode att vinkelinställningen är radianer.



$$\frac{d}{dx}(Y_1) \Big|_{x=\pi/4} = .5892555528$$

TI Nspire™ CAS

Infoga *appen Anteckningar* och tryck *Ctrl M* och definiera funktionen. *Verktyg, Åtgärder, Definiera* och skriv in funktionen.

Kontrollera att radianer är inställt. Klicka då på fliken *Inställningar* längst ner på skärmen välj *radianer* i dialogrutan.

Derivatamallen hittar man i verktygslådan under *"boken"*. Välj *Matematikmallar*, välj rätt mall och tryck Enter.

Lodräta strecket bakom derivatan betyder "under förutsättning att" och du hittar den under *"Boken", Beteckningar och "|"*. Klicka på Enter för att infoga symbolen.

The image shows the TI Nspire CAS screen. The calculation is as follows:

- Define $f1(x) = \frac{\sin(x)}{2} - \frac{\cos(x)}{3}$ Done
- $\frac{d}{dx}(f1(x)) \rightarrow \frac{\cos(x)}{2} + \frac{\sin(x)}{3}$
- $\frac{d}{dx}(f1(x)) \Big|_{x=\frac{\pi}{4}} \rightarrow \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{12}$

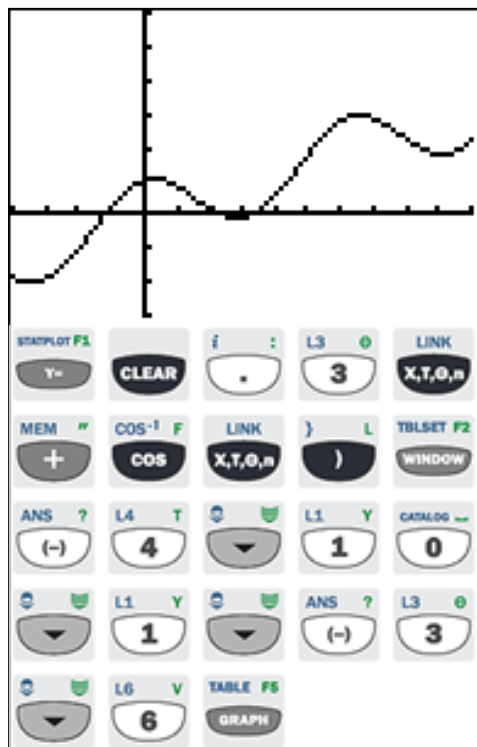
Talet π kan man skriva som "pi" med bokstäver eller hämta från *"boken"* i verktygslådan. Välj *Beteckningar* och sedan π . Infoga med *Enter*.

Svar: $\frac{5\sqrt{2}}{12}$

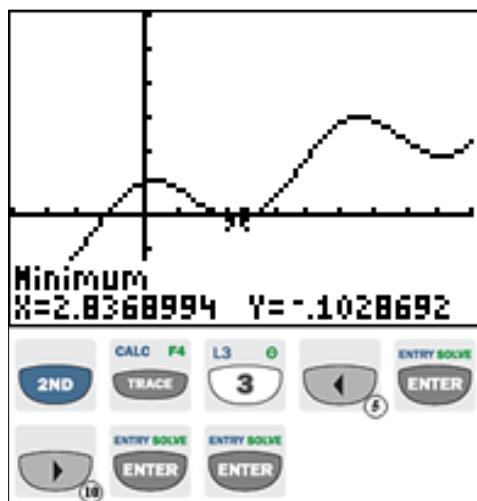
9. Bestäm för vilka x -värden kurvan $f(x)=0,3x+\cos x$ har en extrempunkt.

TI84Plus/TI82Stat

Här måste man rita upp grafen.



Genom att hitta olika max och min kan man hitta extrempunkterna.



Detta får man upprepa för minimum och sedan upptäcka att nya extrempunkter kommer 2π senare.

Svar: $x=0,305+n\cdot 2\pi$ eller $x= 2,837+ n\cdot 2\pi$

TI Nspire™ CAS

Här kan man med fördel använda appen Anteckningar. Tänk på att trycka *Ctrl M* för att infoga en matematikruta när du definierar funktionen och löser ekvationen.

Här kan man undersöka när derivatan är 0.

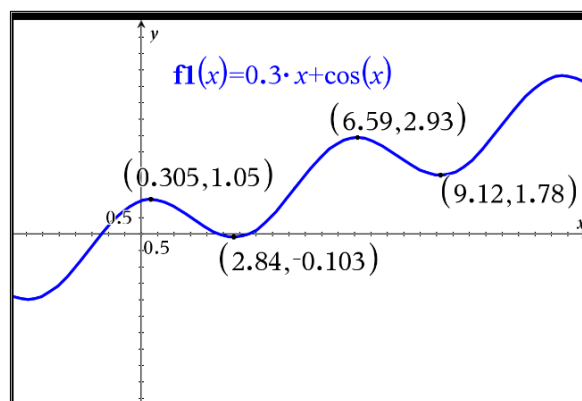
Define $f1(x)=0.3\cdot x+\cos(x)$ ▶ Done

solve($\frac{d}{dx}(f1(x))=0,x$)

▶ $x=6.28319\cdot n2+0.304693$ or
 $x=6.28319\cdot n2+2.8369$

Extrempunkter på kurvan inträffar när $x=0,305+n\cdot 2\pi$ eller $x= 2,837+ n\cdot 2\pi$.

Man kan se extrempunkterna i en graf med *Verktyg, Spåra, Spåra graf* och när man sedan kommer på ett maximum/minimum trycker man Enter och vandrar vidare. Koordinaterna för extrempunkterna visas då på skärmen.



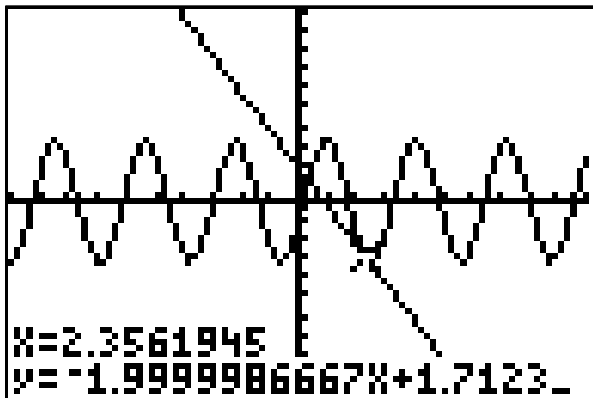
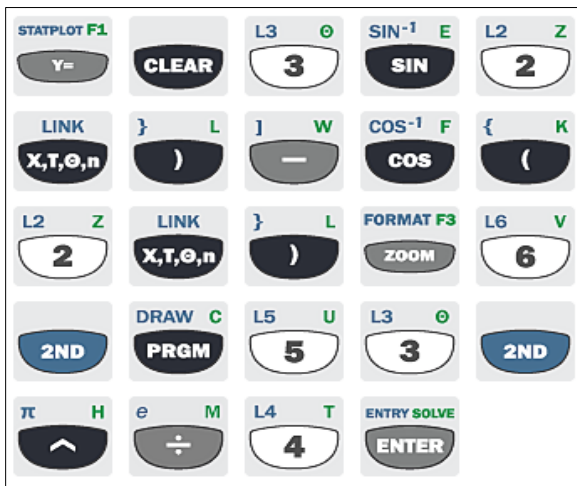
Man kan naturligtvis använda verktyget *Analysera graf*. Då får man ange undre och övre gräns i sökningen och ta min- respektive maxpunkter för sig.

10. Bestäm ekvationen för tangenten till kurvan $y=3 \sin 2x - \cos 2x$ då $x = \frac{3\pi}{4}$

TI84Plus/TI82Stat

Här kan man inte lösa uppgiften exakt.

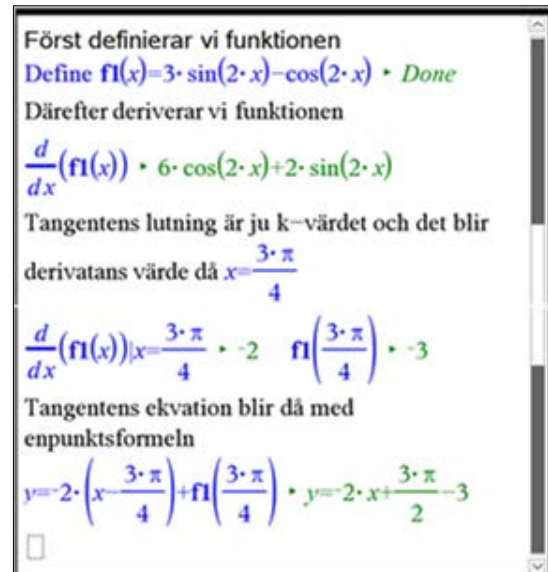
Först skriver vi in funktionen och ritar en graf. Därefter drar vi en tangent just i den efterfrågade punkten. För att rita tangenten trycker man på $\boxed{2\text{nd}}$ $\boxed{\text{DRAW}}$ och väljer alternativ 5 *Tangent*. Sedan skriver man direkt $3\pi/4$. Tangenten ritas nu upp och längst ner på skärmen får vi tangentens ekvation utskrivet.



Svaret blir $y=-2,0x+1,71$

TI Nspire™ CAS

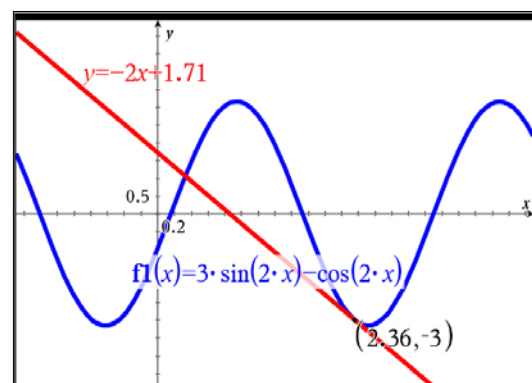
Tryck först på *Ctrl M* för att infoga en matematikruta. Först definierar vi funktionen och därefter beräknar vi derivatan. Derivatan hittar man i verktygslådan under "Boken", *Matematikmallar* och sedan markerar man derivatamallen och klickar på Enter.



Vill man göra underökningen grafiskt går det bra också. Infoga appen Grafer och Skriv in funktionen.

Först får man sätta ut en punkt på grafen. Välj *Verktøy, Geometri, Punkter och linjer, Punkt*. Dubbelklicka på x-koordinaten och skriv $3\pi/4$ och tryck på Enter. Då får man en punkt på kurvan då x-värdet är $\frac{3\pi}{4}$. Med

Verktøy, Geometri, Punkter och linjer, Tangent kan man dra en tangent. Klicka på punkten. Ekvationen för linjen skrivs ut.

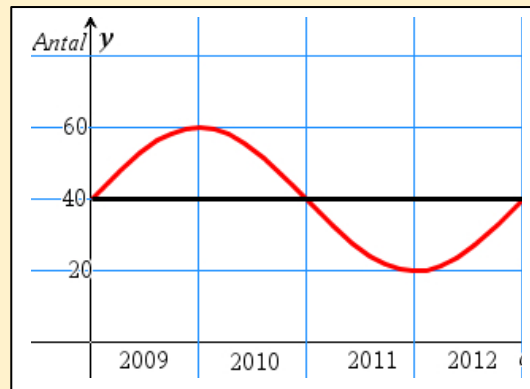


Svar: $y=-2x + \frac{3\pi}{2} - 3$

11. En biolog har under en lång tid studerat antal lodjur inom ett område. Hennes resultat visas i diagrammet.

a) Ställ upp en funktion som modell för hur antalet lodjur har varierat.

b) Hur många lodjur finns det i slutet av år 2015 om antalet fortsätter att variera enligt modellen.



TI84Plus/TI82Stat

Modellen: $y = a \cdot \sin(b \cdot (x - c)) + d$

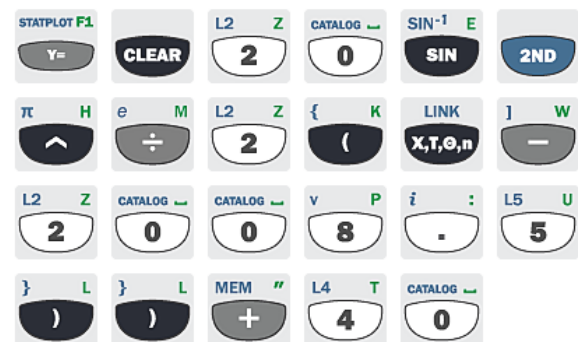
a Detta är halva avståndet mellan topparna i y-led, *amplitud*. Här är avståndet $a = (60 - 20) / 2 = 20$.

b Här granskar man hur lång perioden är för kurvan. Vi startar med $x = 0$ (= 1 jan 2008) och ser att kurvans utseende upprepas efter 4 år. Alltså är perioden $b = 2\pi / 4 = \pi / 2$.

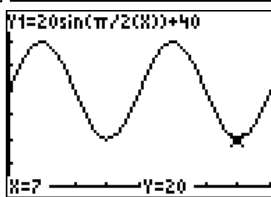
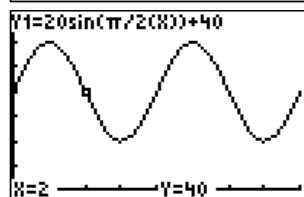
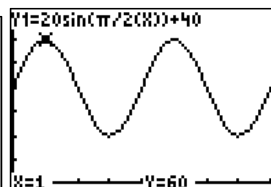
c Eftersom sinuskurvan startar vid $x = 0$ är inte kurvan förskjuten alls. Det betyder att $c = 0$.

d Här letar vi efter linjen som går mitt i sinuskurvan. Det blir toppvärdet minus amplituden, dvs $d = 60 - 20 = 40$. Kan också beräknas som medelvärdet av topp- och bottenvärdena.

Kom ihåg inställning Radianer under Mode.



WINDOW
Xmin=0
Xmax=8
Xscl=1
Ymin=-2
Ymax=72
Yscl=10
Xres=1



I slutet av 2015 ($x = 7$) bör det finnas 20 lodjur.

TI Nspire™ CAS

Modellen: $y = a \cdot \sin(b \cdot (x - c)) + d$

a Detta är halva avståndet mellan topparna i y-led, *amplitud*. Här är avståndet $a = (60 - 20) / 2 = 20$.

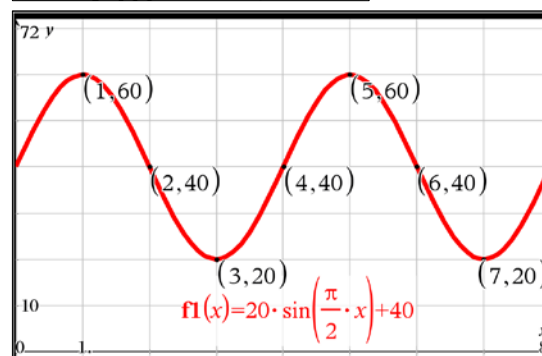
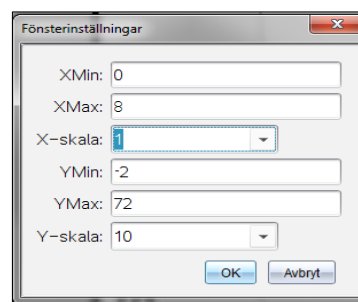
b Här granskar man hur lång perioden är för kurvan. Vi startar med $x = 0$ (= 1 jan 2008) och ser att kurvans utseende upprepas efter 4 år. Alltså är perioden $b = 2\pi / 4 = \pi / 2$.

c Eftersom sinuskurvan startar vid $x = 0$ är inte kurvan förskjuten alls. Det betyder att $c = 0$.

d Här letar vi efter linjen som går mitt i sinuskurvan. Det blir toppvärdet minus amplituden, dvs $d = 60 - 20 = 40$. Kan också beräknas som medelvärdet av topp- och bottenvärdena.

Infoga grafappen och skriv in funktionen. Välj radianer under *Verktyg, Inställningar, inställningar* och se till att det är radianer på graf vinklar.

Ställ in ett bra fönster under *Verktyg, Fönster, Fönsterinställningar* och skriv in dessa värden:

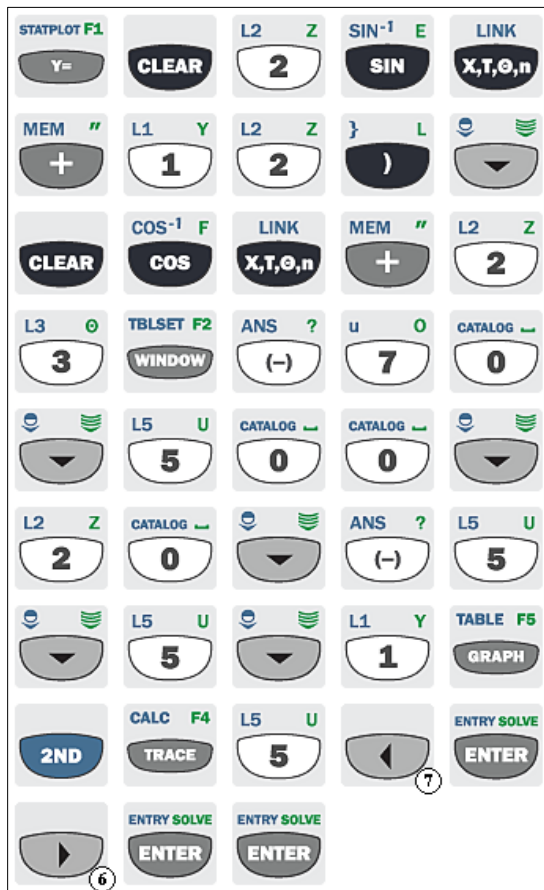


I slutet av 2015 ($x = 7$) bör det finnas 20 lodjur.

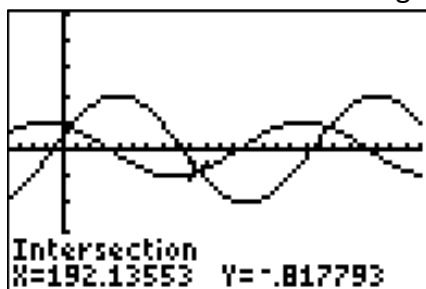
12. Undersök grafiskt och visa med en enkel skiss om det finns några v så att $2 \sin(v+12^\circ) = \cos(v+23^\circ)$.

TI84Plus/TI82Stat

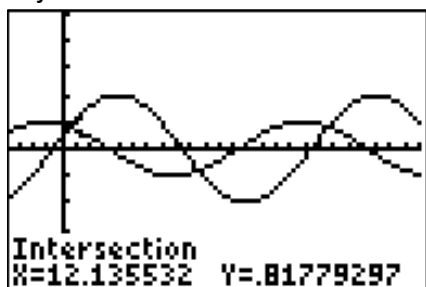
Först får man kontrollera om man har Grader inställda med Mode



Här har vi beräknat en skärning mellan kurvorna:



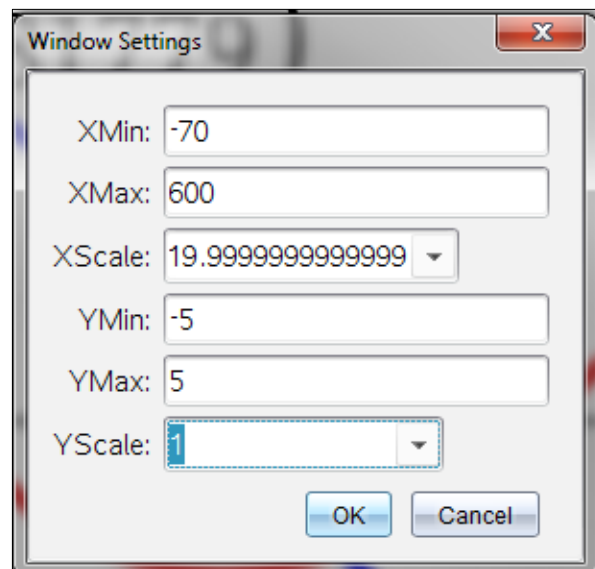
Kontrollerar man den andra skärningen får man följande bild:



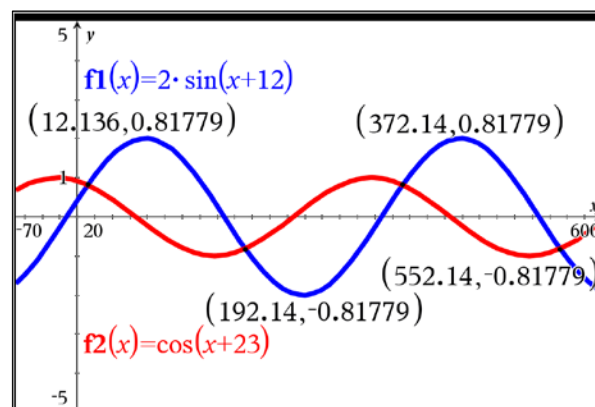
Vid $v=12,1^\circ$ och $v=192,14^\circ$ i ett 360 graders-intervall ser man skärningarna.

TI Nspire™ CAS

Infoga grafappen och skriv in funktionerna $f_1(x)=2\cdot\sin(x+12)$ och $f_2(x)=\cos(x+23)$. Ställ in grader genom *Verktyg, Inställningar. Inställningar* och välj sedan *Grader*. Välj sedan ett lämpligt stort graffönster. *Verktyg, Fönster/Zoom, Fönsterinställningar*



Här ser man de båda graferna:



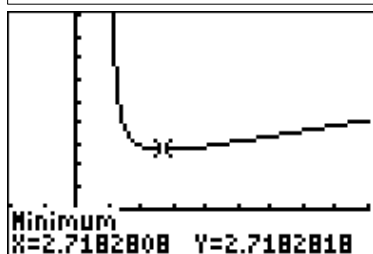
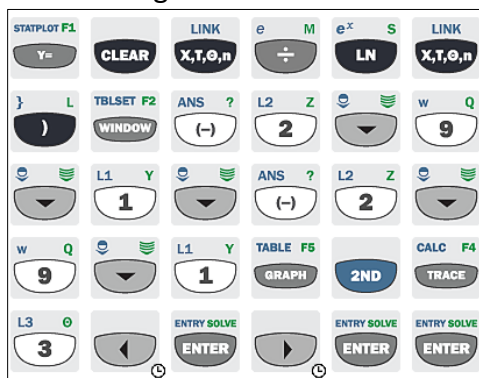
Med *Verktyg, Geometri, Punkter och linjer, skärningspunkter* får man fram skärningspunkterna

Vid graderna $v=12,1^\circ$ och $v=192,14^\circ$ i ett 360 graders-intervall ser man skärningarna.

13. Låt $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ och bestäm $f'(e)$.

TI84Plus/TI82Stat

Tanken med denna uppgift är att man algebraiskt ska beräkna derivatan av en kvot. En bra start är dock att börja med att undersöka funktionen grafiskt.



Vi ser då att funktionen har ett *minimum* för $x = 2.718208$, som är ett närmevärde till e . Där är ju derivatan lika med noll. Detta ger då att $f'(e) = 0$.

Om man numeriskt ska beräkna derivatan i punkten är det praktiskt att först definiera en funktion Y1, om man inte redan har gjort det. Sedan gör man en numerisk derivering av Y1 i punkten e . Beräkningen ger ett *ungefärligt* svar.



$$\frac{d}{dx}(Y1)|_{x=e} = -1.1275E-7$$

Det beräknade värdet är ju approximativt lika med 0.

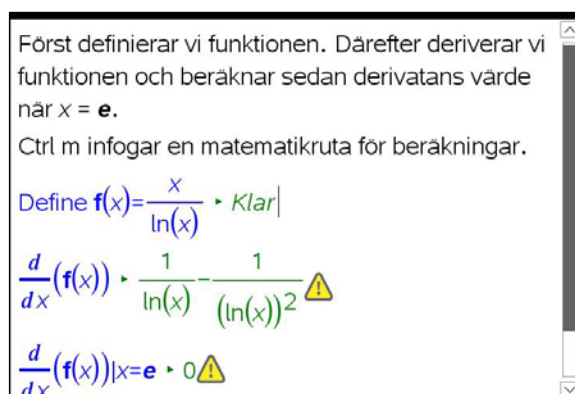
Svar: $f'(e) = 0$.

TI Nspire™ CAS

Om man bara vill ha svaret kan man göra följande:

Infoga, Anteckningar och sedan Ctrl M som ger en Matematikruta där man kan göra beräkningar.

Ctrl M, Verktyg, Beräkningar, Definiera variabler, Definiera. Enklare är dock att bara skriva Define i matematikrutan.



I verktygslådan: Gå till "Boken", Matematikmallar. Välj derivatamallen och sedan Enter.

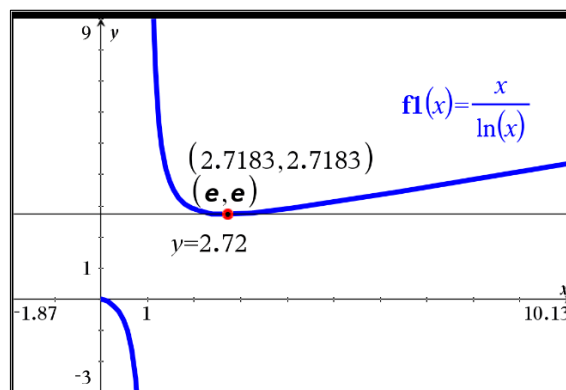
Här ser vi derivatan och vi får en varning att det finns värden där uttrycket inte existerar.

Vill man sätta in värdet e i derivatauttrycket kan man skriva ett lodrätt sträck som betyder "Under förutsättning att". Man hittar symbolen | under "Boken" och sedan Beteckningar. Markera symbolen och tryck sedan Enter.

Även symbolen e hämtas från samma sida. Man kan inte bara skriva bokstaven e .

Svar: $f'(e) = 0$.

Man kan ju även se på kurvan att tangenten i punkten $x=e$ inte har någon lutning. Det är ju funktionens minimipunkt.



14. Antalet bakterier y i en näringslösning ökar enligt differentialekvationen

$\frac{dy}{dt} = 0.15y$ där t är tiden i timmar. Antalet bakterier från början är 10 000 st.

- Bestäm k så att $y = 10000 \cdot e^{k \cdot t}$ är en lösning till differentialekvationen.
- Hur många bakterier finns det efter 8 timmar.

TI84Plus/TI82Stat

Med denna enhet kan man inte lösa differentialekvationer numeriskt eller se riktningsfält. Men man kan ladda ner olika program som kan visa riktningsfält. Därefter använder man programmet TI Connect för att föra över det till räknaren.

Här är ett program från ticalc.org som gör riktningsfält och plottar lösningskurvor. Det kan hämta om du [klickar här](#).

Det heter Slopefield 83p.zip och själva programmet för TI84 heter SLOPEFL3.8xp och kan då användas av TI84Plus.

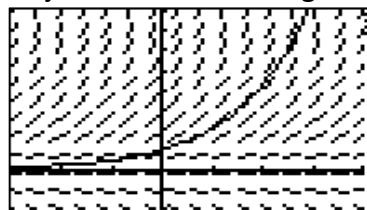
Klicka på PRGM och välj SLOPEFL3. Du kommer till menyn nedan. Välj först 4: Window för fönsterinställningar. När du gjort ett val kommer du med Enter tillbaka till menyn.

Slope Field v1.3	WINDOW
1:Draw Field	Xmin=-18
2:Euler's Method	Xmax=20
3:Enter dy/dx	Xscl=1
4:Window	Ymin=-10000
5:Lattices	Ymax=60000
6:Clear Draw	Yscl=10000
7:Exit	↓Xres=1

Välj alt. 3 och skriv in $0.15Y$ följt av Enter. Välj sedan alt.1. Riktningsfältet/kurvan ritas ut. Därefter Enter och alt. 2. Skriv in startvärdet (0, 10000) och steglängd 0.5 genom att trycka Enter efter varje värde.

Current dy/dx:
X/ln(X)
dy/dx = 0.15Y
X=0
Y=10000
ΔX=0.5

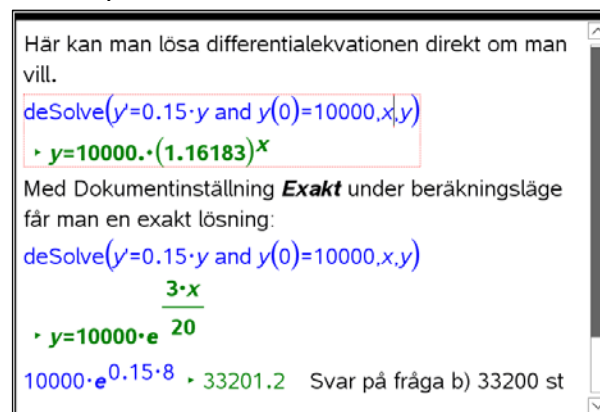
Välj alt.1 och se riktningsfältet med kurvan inuti.



Svaret på fråga b är $10000 \cdot e^{0.15 \cdot 8} = 33201$ st bakterier.

TI Nspire™ CAS

Välj *Infoga, Anteckningar*. Tryck *Ctrl m* och du får en matematikruta. Skriv sedan *desolve* (som betyder differentialequationsolver) följt av ekvationen, begynnelsevillkor och avsluta med x, y . Se nedan.



Konstanten e får man hämta från "Boken", *Beteckningar*.

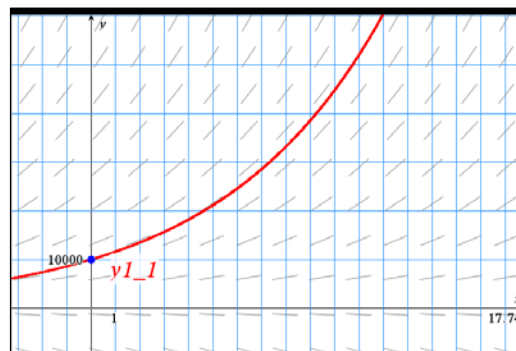
Man kan även skapa en lösningskurva i ett riktningsfält. Infoga en grafapp, välj från Verktygslådan *Grafinmatning/Redigera och sedan Diff.ekvationer*.

Skriv in att $y1' = 0.15y1$. Viktigt att man skriver $y1$ och inte y . Här får man på den undre raden även skriva in startvärdet (0, 10000) och sedan klicka på Enter.

Bra fönsterinställningar är följande:

XMin= -3, XMax= 20, YMin= -10000, YMax=60000.

Man kan också *spåra* längs lösningskurvan och se värdet för $x=8$.

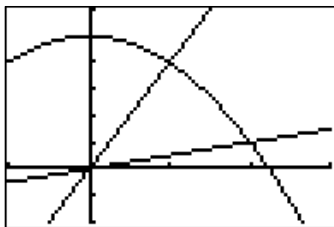


Flytta på den blå startpunkten och se vad som händer!

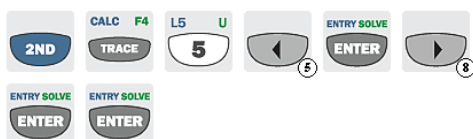
15. Kurvan $y = 5 - x^2$ begränsar tillsammans med linjerna $y = 4x$ och $y = 0,5x$ ett område i första kvadranten. Bestäm arean av området.

TI84Plus/TI82Stat

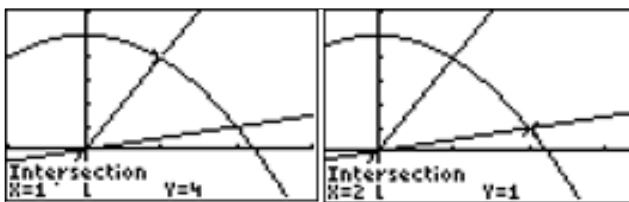
Vi skriver in funktionerna och ser på grafen.



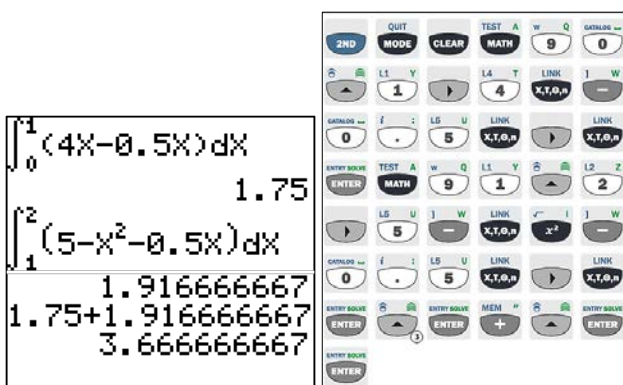
Vi bestämmer nu skärningspunkterna med verktyget *Skärning*. Vi börjar med den första.



Sedan samma sak med den andra skärningspunkten.



Nu kan vi beräkna arean.



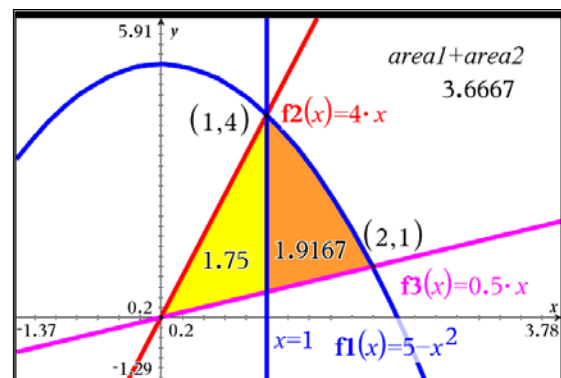
TI Nspire™ CAS

Infoga grafappen och rita vi upp ett bra område med fönsterinställningar enligt nedan: Xmin=-1,5, Xmax=4, Ymin=-1, Ymax=6.

Man kan också tag i ett skalstreck och ändra skalorna. Håll Shift-tangenten intryckt så ändras enbart en axel.

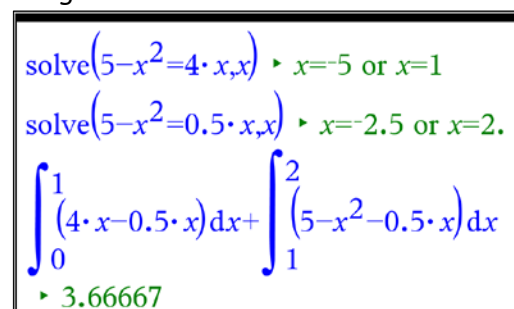
Skriv nu först in de tre funktionerna. Välj sedan från verktygslådan *Geometri, Punkter och linjer* och till sist *Skärningspunkter*. Markera mellan vilka funktioner du ska beräkna skärningspunkten och tryck Enter.

Gå sedan till *Analysera graf* och därefter *Avgränsat område*. Markera mellan vilka grafer du ska beräkna integralen och skriv från tangentbordet sedan in värdena för undre och övre gräns.



Man kan ju även lösa detta direkt med beräkningar. Infoga appen *Anteckningar*, tryck Ctrl m och skriv in instruktionerna för att lösa ekvationerna och därigenom beräkna skärningspunkterna.

Beräkna sedan areorna mellan funktionerna. Integraltecknet hittar man i verktygslådan under "Boken", *Matematikmallar*. Välj *integralmallen* med Enter.



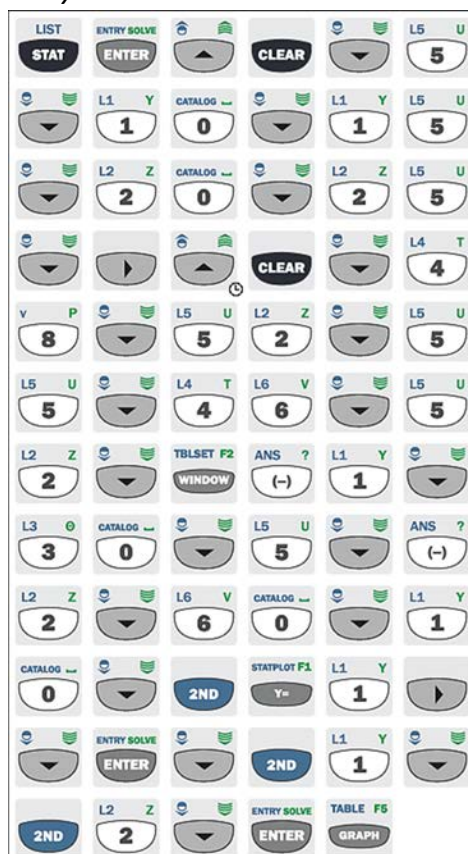
Svar: 3,67 areaenheter

16. En effekt varierar enligt tabellen. Uppskatta energiåtgången för $t=5$ till $t=25$ genom att a) rita figur och uppskatta integralens värde
b) anpassa lämplig kurva till tabellen och beräkna en integral.

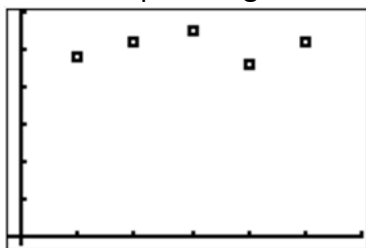
t (s)	5	10	15	20	25
P (W)	48	52	55	46	52

TI84Plus/TI82Stat

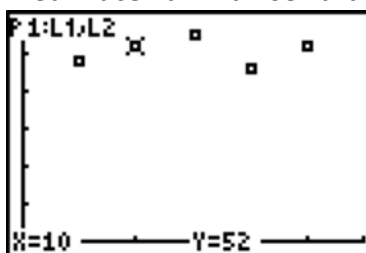
Vi börjar med att mata in två listor och plottar datapunkterna. Därefter gör vi en *regressionsanalys*.



Så här blir plottningen:



Med *Trace* kan man se värdena.



Här ser man att effekten P är *ungefär* 50W under 20 s. Integralen=Arean under kurvan=Energin= $20 \cdot 50 \text{ J} = 1000 \text{ J}$

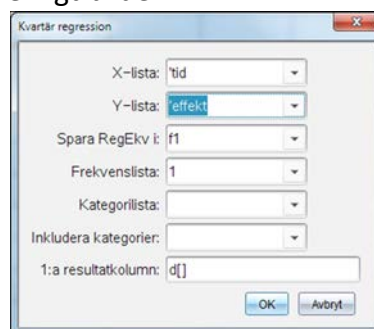
TI Nspire™ CAS

Vi ska nu fylla två listor med våra data.

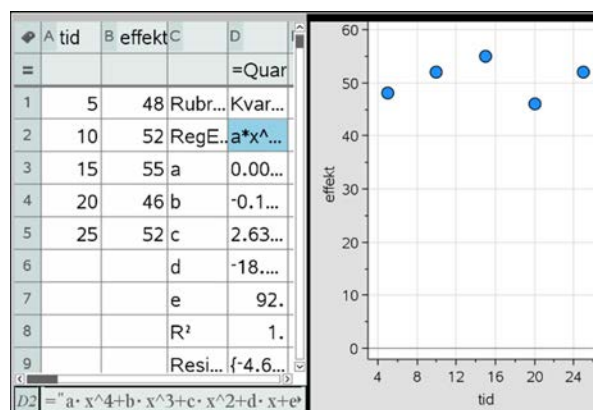
Infoga appen *Listor och Kalkylblad* och skriv in värdena. Namnge kolumnerna överst i varje kolumn till *tid* respektive *effekt*.

Placera sedan markören i cell C1. Därifrån gör vi en *regressionsanalys*. Från verktygslådan väljer du *Statistik, Statistikberäkningar, Kvartär regression*.

Klickar på pilarna och ställ in beräkningen enligt bilden.



Nu har vi ett fjärdegradspolynom som anpassar sig till punkterna. Vi kan snabbt se punkterna genom *Infoga , Data och Statistik*. Klicka mitt på x-axeln och välj "tid". Mitt på y-axeln väljer du "effekt". Ta tag i y-axelns skala och dra i den så att den börjar på 0. Gå tillbaka till *Listor och Kalkylblad* och tryck Ctrl 4. Då får du båda apparna på samma sida.

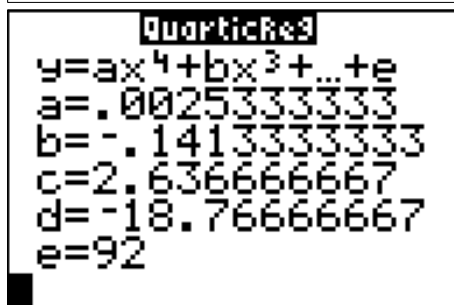
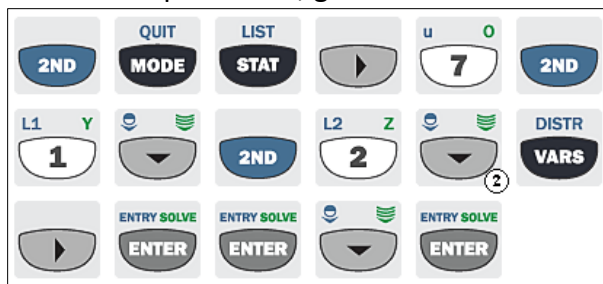


Här ser man att det är ungefär 50 W under 20 s. Detta program kan räkna ut även enheterna genom att framför enheten skriva ett understreck.

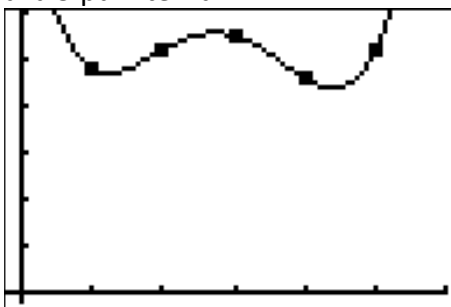
$$20 \cdot \underline{s} \cdot 50 \cdot \underline{W} = 1000 \cdot \underline{J}$$

TI84Plus/TI82Stat

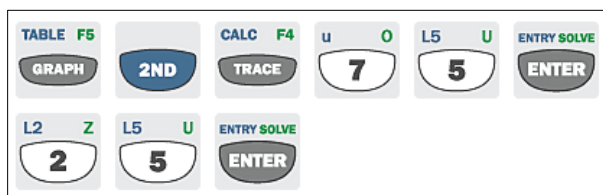
För att göra en regressionsanalys, dvs anpassa en kurva till punkterna, går man till



Klicka på Graph och se kurvan som går genom alla 5 punkterna.



Genom att använda Calc kan man beräkna arean under kurvan.



Integralen= Energin = 1000 J

TI Nspire™ CAS

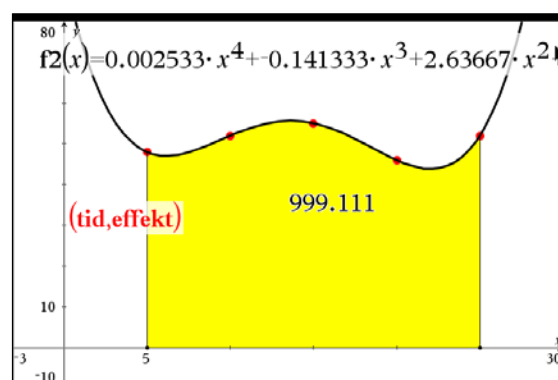
För att göra en integralberäkning av regressionskurvan måste vi införa en grafsida.

Infoga Grafappen och välj *Verktyg, Grafinmatning/Redigera, Spridningsdiagram*

För x-koordinaten klickar man på *Var* och väljer *tid*.

För y-koordinaten klickar man på *Var* och väljer *effekt*.

Nu plottas de 5 punkterna. Om du inte ser dem så ta tag i ett skalstreck och dra mot origo så att du ser punkterna. Med Shift intryckt kan man dra enbart på en axel.



För att se vår regressionskurva måste man ta fram den genom *Verktyg, Grafinmatning/Redigera, Funktioner* och sedan *pil upp*. Därefter trycker du på *Enter*.

Nu ser man att kurvan anpassar sig snyggt genom alla punkter. För att nu beräkna integralen (arean under kurvan=Energin) så välj från Verktygslådan, *Analysera Graf, Integral*

Flytta den nedre gränsen till första punkten ($x=5$) och den övre till sista punkten ($x=25$). Nu får man värdet 999.111.

Svar: Energin är 1000 J

17. Livslängden x år för en radioaktiv isotop med sönderfallskonstanten

$\lambda = 0,023$ beskrivs av en exponentialfördelning med $f(x) = 0,023 \cdot e^{-0,023x}$.

a) Beräkna sannolikheten $P(<20 \text{ år})$. b) Beräkna sannolikheten $P(>30 \text{ år})$.

c) Ställ upp en funktion som ger $P(<a)$.

TI84Plus/TI82Stat

Denna räknare klarar inte av att räkna ut integraler direkt utan enbart via grafer. Därför måste vi rita upp grafen först.



18. Kurvan $y = 9 - x^2$ roterar kring x-axeln. Bestäm volymen av den ändliga kropp som då uppkommer. Svara exakt.

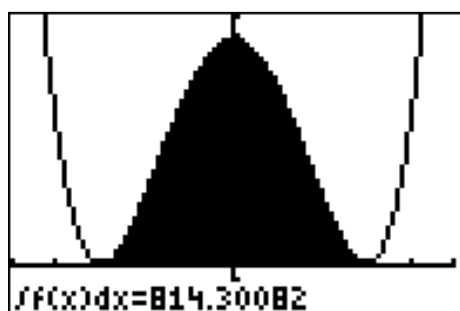
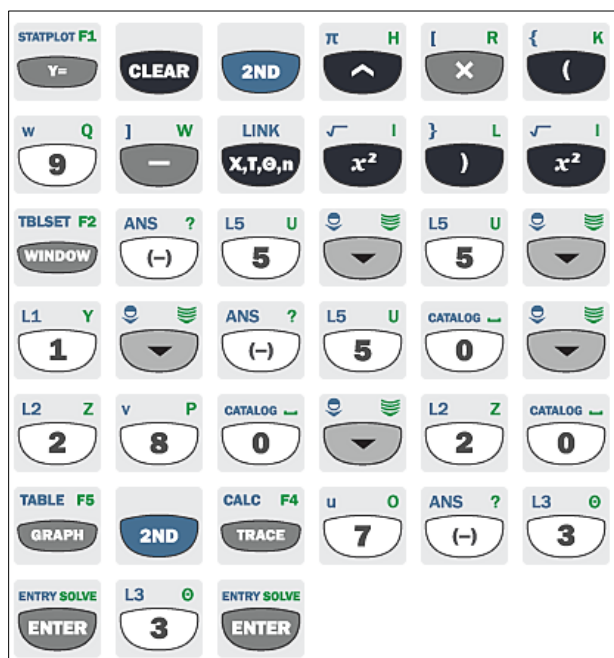
TI84Plus/TI82Stat

Med denna räknare kan man inte räkna ut en integral exakt. Men man kan ju ta fram ett ungefärligt värde via en graf.

Kurvan $y = 9 - x^2$ har två nollställena, $x = -3$ och $x = 3$. Det ger en tunn skiva som man får "summera" från -3 till 3.

Skivans volym blir $\int_{-3}^3 \pi \cdot (9 - x^2)^2 \cdot dx$

Vi ritat upp den kurvan och beräknar arean under densamma.

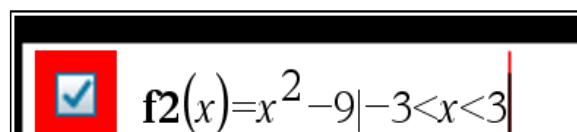


Ungefärligt svar är 814,3

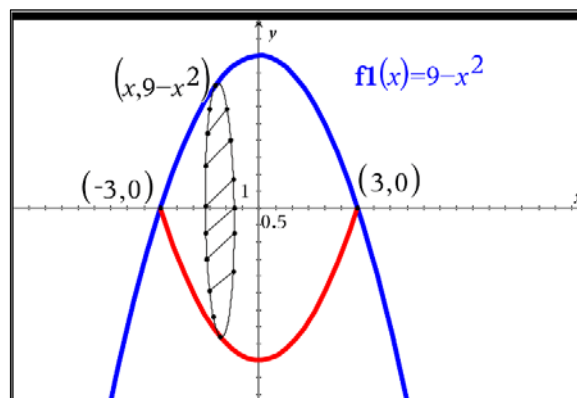
TI Nspire™ CAS

Infoga grafer. Skriv in funktionen $f1(x) = 9 - x^2$. Rita också gärna in spegelkurvan i x-axeln.

Det lodräta strecket | i funktionsinmatningen betyder "under förutsättning att" och hittas från verktygslådan under "Boken", *Beteckningar*. Markera strecket och tryck sedan Enter.



Här kan man hitta skärningen mellan dessa kurvor eller nollställena eller spåra *Verktøy*, *Spåra*, *Spåra graf* och vandra sedan till skärning med x-axeln. Väl där tryck Enter.



Skivan som finns i rotationskroppen är gjord med *Verktøy*, *Geometri*, *Former*, *Kägelsnitt med fem punkter*. Dessutom finns det lite dragda segment.

Att beräkna volymen exakt blir sedan inte så svårt.

Infoga appen *Anteckningar*, tryck *Ctrl M* för att få en matematikruta och skriv sedan in beräkningsuttrycket.

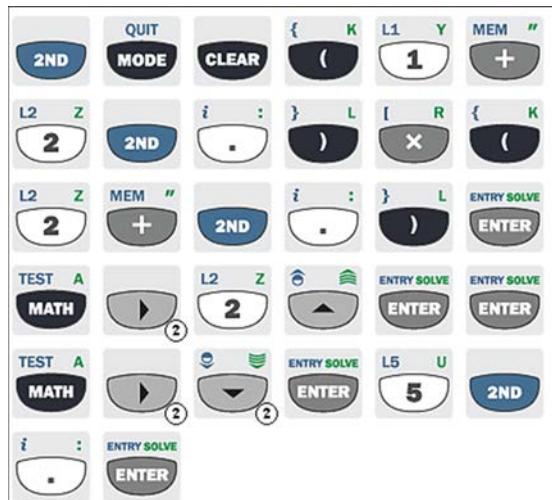
För att skriva in en integral går man från verktygsfältet till "Boken", *Matematikmallar*, markera integralen och tryck sedan Enter.

$$\int_{-3}^3 \left(\pi \cdot (9 - x^2)^2 \right) dx = \frac{1296 \cdot \pi}{5}$$

Här ser man det exakta svaret.

19. Förenkla det komplexa talet $z=(1+2i) \cdot (2+i)$ och ange Re z och Im z .

TI84Plus/TI82Stat



```
(1+2i)*(2+i)      5i
real(5i)           0
imag(5i)           5
```

TI Nspire™ CAS

Infoga appen *Anteckningar*. Tryck sedan *Ctrl M* för att infoga en matematikruta.

Från verktygslådan: *Beräkningar*, *Definiera variabler*, *Define* eller så skriver man *define* från tangentbordet. Imaginära enheten i finns under *Beteckningar* i verktygslådan.

För att beräkna realdelen och imaginärdelen: *Verktøy*, *Beräkningar*, *Tal*, *Verktøy för komplexa tal*, *Realdelen/Imaginärdelen*

Define $z=(1+2 \cdot i) \cdot (2+i)$ ▶ *Klar*

Skriver man nu enbart z utvärderas uttrycket:

$z \rightarrow 5 \cdot i$

Beräkning av realdel och imaginärdel från den definierade funktionen z :

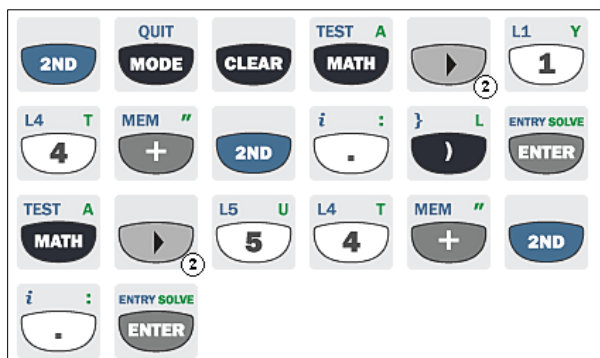
$\text{real}(z) \rightarrow 0$

$\text{imag}(z) \rightarrow 5$

20. Bestäm konjugatet $\bar{z}$ och absolutbeloppet $|z|$ då $z = 4+i$.

TI84Plus/TI82Stat

Här får man inga exakta resultat.



```
conj(4+i)          4-i
|4+i|              4.123105626
```

TI Nspire™ CAS

Vi infogar en anteckningssida. *Infoga*, *Anteckningar*. *Ctrl M* öppnar en matematikruta.

Verktøy, *Beräkningar*, *Tal*, *Verktøy för komplexa tal*, *Komplexkonjugat* ger konjugatet. Imaginära enheten i hittar man under *"Boken"*, *Beteckningar*. Markera och tryck sedan *Enter*.

Absolutbelopp hittar man i *"Boken"*, *Matematikmallar*. Markera och tryck sedan *Enter*.

Här kan man direkt skriva in konjugat respektive absolutbelopp av ett komplext tal

$\text{conj}(4+i) \rightarrow 4-i$

$|4+i| \rightarrow \sqrt{17}$

21. Lös ekvationen $z^3 = 27$. Svara i polär form och skissa lösningarna i ett komplext talplan.

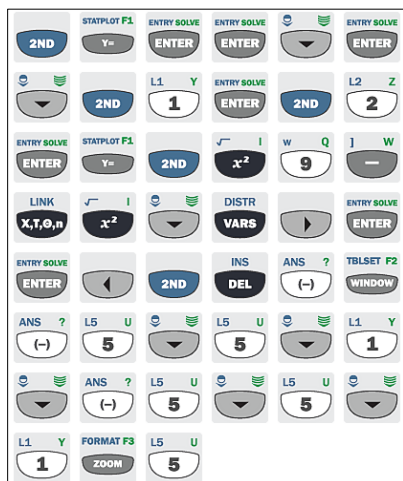
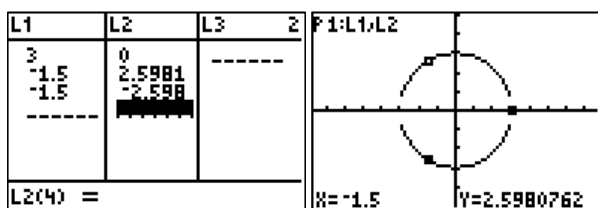
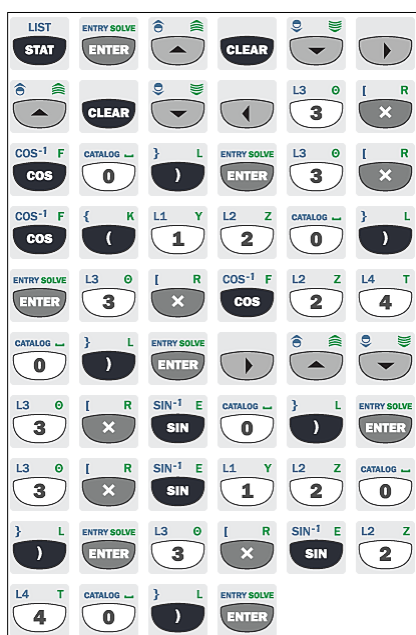
TI84Plus/TI82Stat

Först får man ta tredje roten ur 27 som är 3.

Eftersom vi har z^3 så blir det tre rötter. Ett helt varv är 360. 360 delat med 3 ger 120 grader mellan punkterna, som ligger på en cirkel med radien 3. Vi får tre lösningar:

$(3 \cdot \cos(0), 3 \cdot \sin(0))$, $(3 \cdot \cos(120), 3 \cdot \sin(120))$ och $(3 \cdot \cos(240), 3 \cdot \sin(240))$.

Vi lägger in dem i listor och ser punkterna på cirkeln.



TI Nspire™ CAS

Infoga appen *Anteckningar*. *Ctrl M* öppnar en matematikruta. Från verktygslådan väljer du *Beräkningar*, *Algebra*, *Komplext*, *Lös* för att få en komplex ekvationslösare.

$$\text{cSolve}(z^3=27,z)$$

$$\rightarrow z = \frac{-3}{2} + \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot i \text{ or } z = \frac{-3}{2} - \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot i \text{ or } z = 3$$

$$\text{cSolve}(z^3=27,z)$$

$$\rightarrow z = -1.5 + 2.59808 \cdot i \text{ or } z = -1.5 - 2.59808 \cdot i \text{ or } z = 3$$

Vi får tre lösningar. De ska ligga på samma avstånd till origo (3) och vinkeln mellan dem är $\frac{360}{3} = 120$

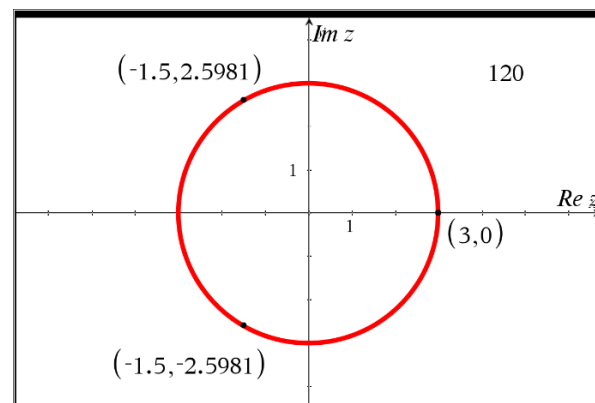
Infoga grafappen. Från verktygslådan väljer du *Geometri*, *Former*, *Cirkel*. Sätt medelpunkten i origo och dra sedan så att radien blir 3.

Från verktygslådan väljer du *Geometri*, *Punkter och linjer*, *Punkt på* och placerar punkten i (3, 0) som är första roten.

För att vrida den punkten 120° så högerklicka och välj *Text* och skriv 120.

Välj nu *Verktøy*, *Geometri*, *Transformation*, *Rotation*. Peka på vridningspunkten i origo peka därefter på punkten (3, 0) och sedan klickar du på 120. Du får en punkt i andra kvadranten. Upprepa samma förfarande för denna punkt.

Högerklicka på punkterna och välj *Koordinater* och *ekvationer*.

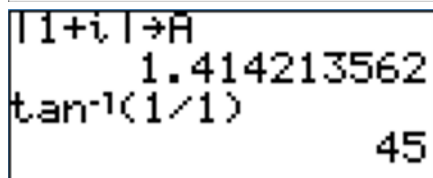
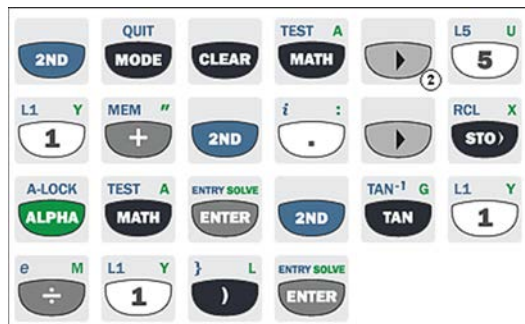


22. Ekvationen $z^4 = w$ har en lösning $z_1 = 1+i$. Vilka är de andra lösningarna?

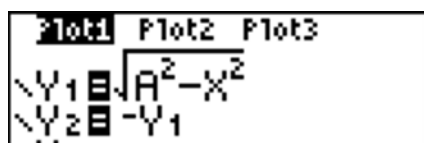
TI84Plus/TI82Stat

$360/4=90$. Det är alltså 90 grader mellan varje rot i det komplexa talplanet.

Först måste vi ta reda på avståndet till origo och vilken vinkel det är till första roten.



Första roten blir då



Det ger cirkeln med radien A.

Nu får vi skriva in rötterna i listor i statistik-editorn och få ut ett punktdiagram på cirkeln. Varje rot har ju en vinkel som är 90° större än föregående och alla har samma avstånd till origo.

TI Nspire™ CAS

Infoga en *Anteckningssida* och tryck *Ctrl M* för att skapa en matematikruta.

Absolutbelopp hittar man under "Boken", *Matematikmallar*. Markera symbolen och tryck på *Enter*.

$360/4 = 90$. Det är alltså 90 grader mellan varje rot.

Radien på cirkeln där det komplexa talet ligger är $|1+i| = \sqrt{2}$

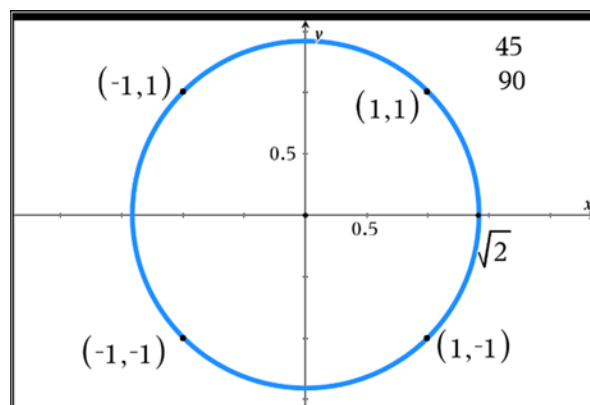
Vinkeln till första roten blir då $\tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = 45$

Nu vill vi rita upp lösningarna i det komplexa talplanet. Infoga appen Grafer.

Högerklicka någonstans och välj *Text*. Skriv sedan 45. Gör om samma sak och skriv 90.

Den sista gången skriver man

Välj *Verktyg, Geometri, Former, Cirkel*. Klicka på origo och sedan på $\sqrt{2}$. Nu får man en cirkel med radien

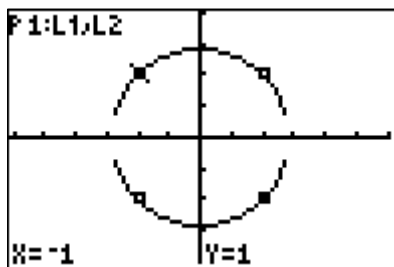
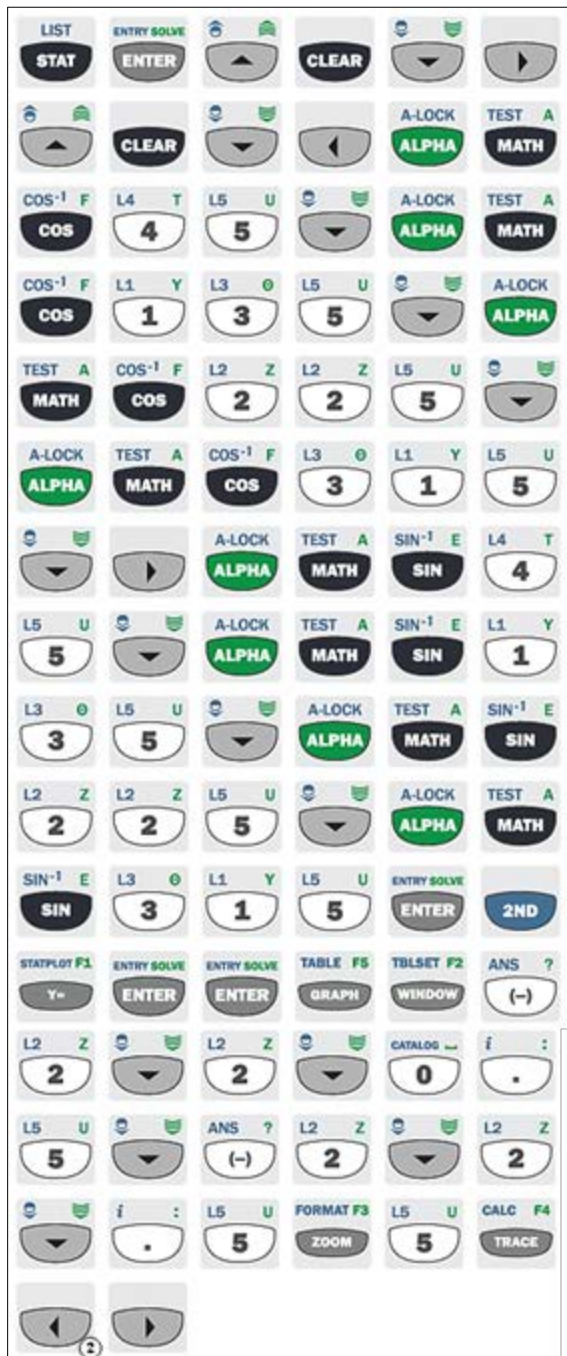


Verktyg, Geometri, Punkter och linjer, Skärningspunkt. Klicka på cirkeln och sedan på x-axeln. Nu ska vi vrida den punkten 45° till första roten

Välj *Verktyg, Geometri, Transformation, Rotation*. Klicka sedan på vridningspunkten origo, därefter på punkten vi ska vrida och klicka sedan på 45. Nu har vi första roten. Upprepa mönstret men klicka på 90 tre gånger så får vi alla 4 rötterna.

Högerklicka på punkterna och välj *Koordinater och ekvationer*.

T184Plus/T182Stat



Lösningarna blir alltså:

$$z_1 = 1+i \quad z_2 = -1+i \quad z_3 = -1-i \quad z_4 = 1-i$$

TI Nspire™ CAS

De andra lösningarna blir alltså

$$z_1 = 1+i \quad z_2 = -1+i \quad z_3 = -1-i \quad z_4 = 1-i$$

En snabbare lösning är följande rad

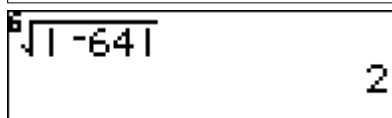
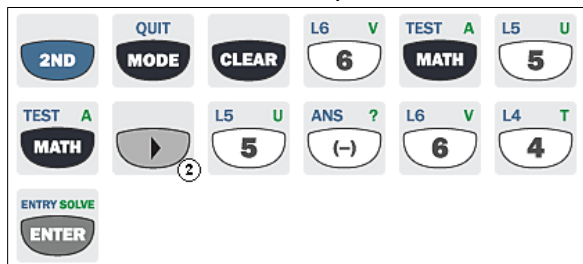
$$\text{cSolve}(z^4=(1+i)^4,z)$$

► $z=1+i$ or $z=1-i$ or $z=-1+i$ or $z=-1-i$

23 Bestäm på formen $a+bi$ alla sjätte rötter ur -64.

TI84Plus/TI82Stat

Här får man först ta reda på avståndet till origo.

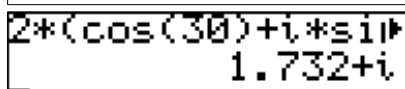
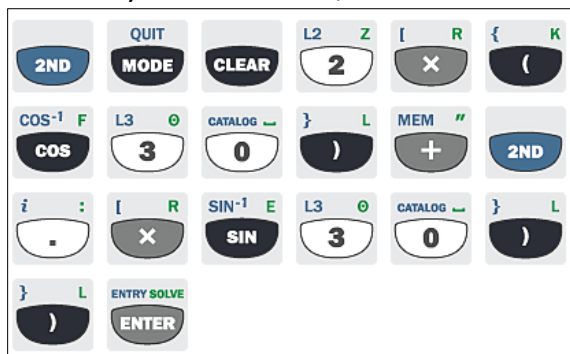


$360/6 = 60$ betyder att vi har 6st svar med vinkeln 60° mellan varje svar. de Moivres formel ger

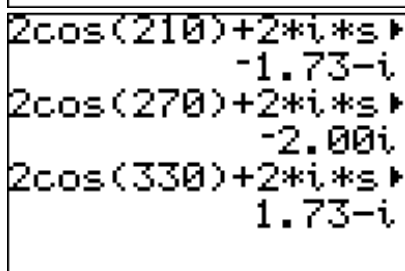
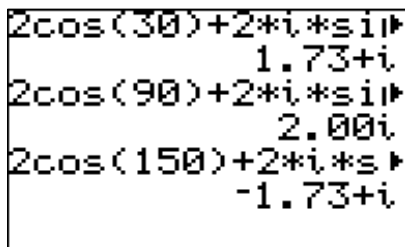
$$z^6 = 2^6 (\cos(6v) + i \cdot \sin(6v))$$

$$-64 = 2^6 (\cos(6v) + i \cdot \sin(6v))$$

Här måste ju $\cos(6v)$ vara -1 och $\sin(6v)$ vara 0, vilket betyder att $6v = 180$, dvs $v = 30 + n \cdot 60$.



Sedan kan man lägga till 60 och ta fram alla rötterna. Svaren blir approximativa, inga exakta värden alltså.



TI Nspire™ CAS

Uppgiften kan man lösa direkt:

Infoga appen *Anteckningar* och tryck *Ctrl M* för att skapa en Matematikruta. Välj sedan *Verktyg, Beräkningar, Algebra, Komplex, Lös*.

Här löser man direkt den komplexa ekvationen

$$\text{cSolve}(z^6 = -64, z)$$

► $z = -\sqrt{3} + i$ or $z = -\sqrt{3} - i$ or $z = \sqrt{3} + i$ or $z = \sqrt{3} - i$ or $z = 2 \cdot i$ or $z = -2 \cdot i$

Här är de Moivres formel för sjätte roten ur -64:

$$-64 = 2^6 \cdot (\cos(6 \cdot v) + i \cdot \sin(6 \cdot v))$$

$$\text{solve}(\cos(6 \cdot v) = -1, v) \quad v = 30 \cdot (2 \cdot n - 1)$$

$$\text{solve}(\cos(6 \cdot v) = -1, v) \mid 0 \leq v \leq 360$$

► $v = 30$ or $v = 90$ or $v = 150$ or $v = 210$ or $v = 270$ or $v = 330$

dvs $v = 30^\circ + n \cdot 60^\circ$. Då kan man ju också svara på detta sätt: $2 \cdot e^{(30+n \cdot 60) \cdot i}$

Svaren blir:

$$2 \cdot \cos(30) + 2 \cdot i \cdot \sin(30) \rightarrow \sqrt{3} + i$$

$$2 \cdot \cos(90) + 2 \cdot i \cdot \sin(90) \rightarrow 2 \cdot i$$

$$2 \cdot \cos(150) + 2 \cdot i \cdot \sin(150) \rightarrow -\sqrt{3} + i$$

$$2 \cdot \cos(210) + 2 \cdot i \cdot \sin(210) \rightarrow -\sqrt{3} - i$$

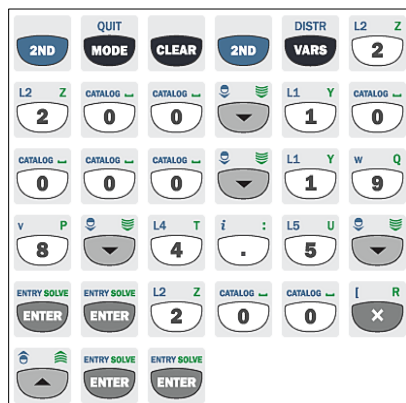
$$2 \cdot \cos(270) + 2 \cdot i \cdot \sin(270) \rightarrow -2 \cdot i$$

$$2 \cdot \cos(330) + 2 \cdot i \cdot \sin(330) \rightarrow \sqrt{3} - i$$

24. En maskin fyller chipspåsar. Chipspåsarnas vikt är normalfördelade med medelvikten 198 g och standardavvikelsen 4,5 g. Till en butik levereras 200 påsar från denna maskin. Hur många av dessa påsar kan förväntas väga mer än 200 g?

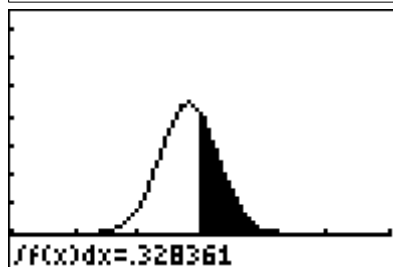
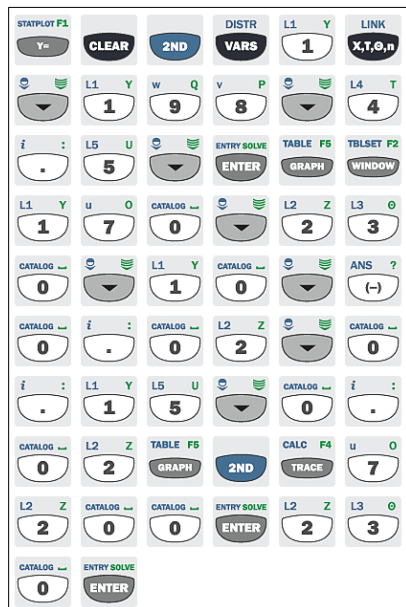
T184Plus/T182Stat

Här kan man undra hur mycket arean är under normalfördelningskurvan med värden större än 200.



```
normalcdf(200,1000,200,1000)
.328361
200*.328361
65.672200
```

Man kan även rita upp grafen och ta reda på arean under.



Svar: $200 \cdot 0,32836 \approx 65$ st påsar.

TI Nspire™ CAS

Infoga *appen* Anteckningar. Tryck *Ctrl M* så skapas en matematikruta där du kan göra beräkningar.

Man kan undra hur stor arean är under normalfördelningskurvan för värden större än 200.

I nedanstående utförs beräkningarna:

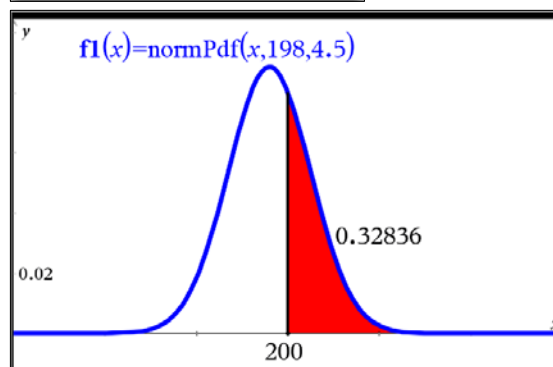
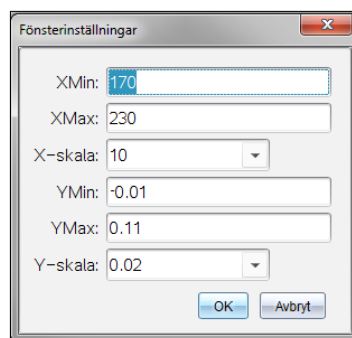
```
normCdf(200,∞,198,4.5) ▶ 0.328361
```

$$200 \cdot 0.328361 \rightarrow 65.6722$$

Svar: man kan förvänta sig att ca 65 påsar väger mer än 200 g.

Infoga appen Grafer. Man kan infoga normalfördelningskurvan genom "*Boken*", *Katalog*, vandra ner till *normPdf* (och sedan *Enter*). Skriv in variabeln *x*, väntevärdet 198 och standardavvikelsen 4,5.

Använd följande fönsterinställningar. *Verktyg, Fönster/Zooma, Fönsterinställningar*



Integralens värde får man genom *Verktyg*, *Analysera graf*, *Integral*. Därefter skriver man 200 Enter och sedan 230 Enter.

Svar: $200 \cdot 0,32836 \approx 65$ st påsar

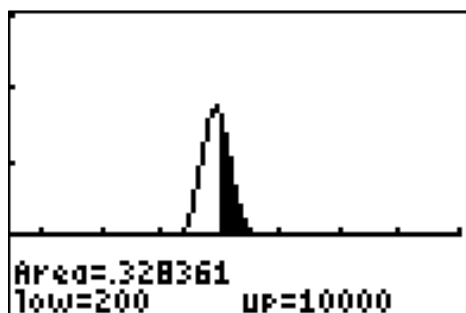
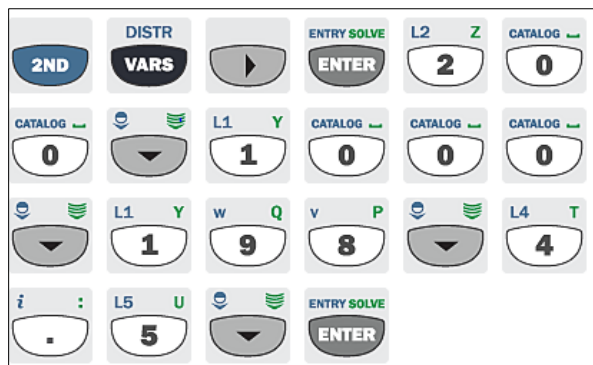
TI84Plus/TI82Stat

Man kan även använda $\boxed{2\text{nd}}$ $\boxed{\text{DISTR}}$ och där rita upp normalfördelningskurvan. Men man måste först ställa in ett bra fönster enligt nedan:

```

WINDOW
Xmin=130
Xmax=280
Xscl=20
Ymin=-.05
Ymax=.15
Yscl=.05
↓Xres=1
    
```

Därefter ritas man kurvan



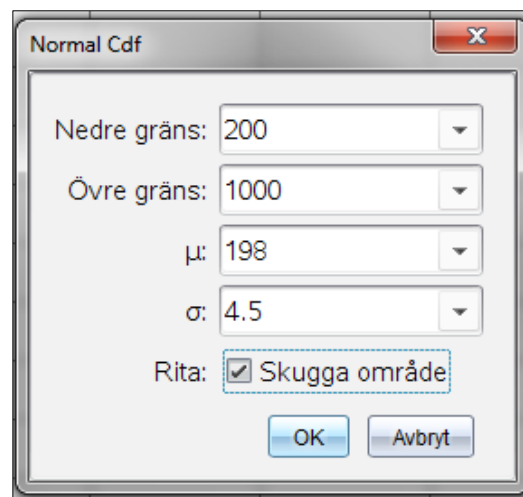
Svar: $200 \cdot 0,32836 \approx 65$ st påsar

TI Nspire™ CAS

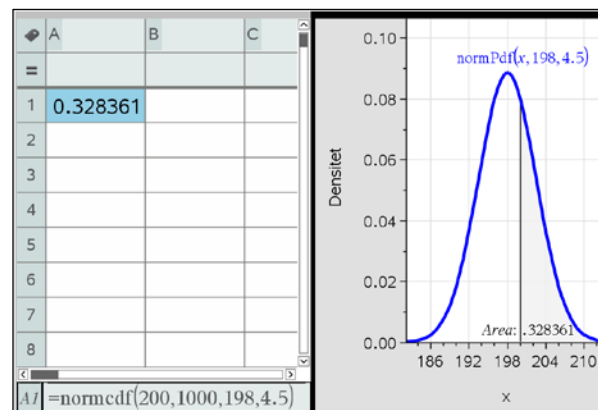
Även här finns en annan metod där man låter programmet ställa in fönstret.

Infoga appen *Listor & Kalkylblad*. När du står i A1 med markören går du till verktygslådan och väljer *Statistik, Fördelningar, Normal Cdf*.

Då kommer det upp en dialogruta där man fyller i sina värden:



I och med att man kryssat i *Rita* så öppnas Data & Statistik-fönstret när man trycker på Enter och kurvan ritas upp. Dessutom blir det bra fönsterinställningar automatiskt.



I cell A1 skrivs den beräknade arean ut. ut.

Svar: $200 \cdot 0,32836 \approx 65$ st påsar