



EXAME FINAL NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Prova 635/2.ª Fase

Critérios de Classificação

11 Páginas

2015

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

A ausência de indicação inequívoca da versão da prova implica a classificação com zero pontos das respostas aos itens de escolha múltipla.

As respostas ilegíveis são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

Itens de seleção

Nos itens de escolha múltipla, a cotação do item só é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a opção correta. Todas as outras respostas são classificadas com zero pontos.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, a transcrição do texto da opção escolhida é considerada equivalente à indicação da letra correspondente.

Itens de construção

Nos itens de resposta restrita e de resposta extensa, os critérios de classificação apresentam-se organizados por níveis de desempenho ou por etapas. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por níveis de desempenho resulta da pontuação do nível de desempenho em que forem enquadradas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

Nas respostas classificadas por níveis de desempenho, se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração.

É classificada com zero pontos qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho.

A classificação das respostas aos itens que envolvam a produção de um texto tem em conta a organização dos conteúdos e a utilização da linguagem científica adequada.

As respostas que não apresentem exatamente os mesmos termos ou expressões constantes dos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso obrigatório das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação, num referencial, do gráfico da função ou dos gráficos das funções visualizados, devidamente identificados.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de resposta restrita e de resposta extensa que envolvam a realização de cálculos.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelo programa da disciplina (ver nota 1). O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplos: «sem recorrer à calculadora gráfica», «recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando é pedida a apresentação de cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado, que não altere o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

Situação	Classificação
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma decimal].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa, bem como a cada uma das etapas subsequentes que dela dependam, é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade onde, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

Nota 1 – A título de exemplo, faz-se notar que não são aceites processos de resolução que envolvam a aplicação da regra de Cauchy, da regra de L'Hôpital ou de resultados da teoria de matrizes.

Nota 2 – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

GRUPO I

1. a 8. (8 × 5 pontos)..... **40 pontos**

Itens	1	2	3	4	5	6	7	8
Versão 1	B	B	D	A	C	D	B	C
Versão 2	C	C	A	B	D	C	D	B

GRUPO II

1. **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Escrever $-1 + i$ na forma trigonométrica 3 pontos

Indicar o módulo 1 ponto

Indicar um argumento 2 pontos

Escrever z_1 na forma trigonométrica 3 pontos

Obter o módulo 1 ponto

Obter um argumento 2 pontos

Obter \bar{z}_1 na forma trigonométrica 2 pontos

Escrever $z = \text{cis} \frac{\theta + 2k\pi}{4}$ (com $k \in \{0, 1, 2, 3\}$), sendo θ um argumento de \bar{z}_1 3 pontos

Obter as soluções da equação $\left(\text{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right), \text{cis}\frac{\pi}{3}, \text{cis}\frac{5\pi}{6}, \text{cis}\frac{4\pi}{3} \right)$.. (1+1+1+1) ... 4 pontos

2.º Processo

Determinar $\sqrt{2} \text{cis}\left(\frac{\pi}{12}\right)$ na forma algébrica 2 pontos

Multiplicar ambos os termos da fração pelo conjugado do denominador 1 ponto

Determinar z_1 na forma algébrica 2 pontos

Escrever \bar{z}_1 na forma algébrica 1 ponto

Escrever \bar{z}_1 na forma trigonométrica 2 pontos

Escrever $z = \text{cis} \frac{\theta + 2k\pi}{4}$ (com $k \in \{0, 1, 2, 3\}$), sendo θ um argumento de \bar{z}_1 3 pontos

Obter as soluções da equação $\left(\text{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right), \text{cis}\frac{\pi}{3}, \text{cis}\frac{5\pi}{6}, \text{cis}\frac{4\pi}{3} \right)$.. (1+1+1+1) ... 4 pontos

2.1. 10 pontos

- Determinar $d(0)$ 1 ponto
- Equacionar o problema $(d(t) = d(0))$ 2 pontos
- Obter a expressão geral das soluções da equação $d(t) = d(0)$ 3 pontos
- Determinar as soluções da equação $d(t) = d(0)$ pertencentes ao intervalo $]0, 3]$ 3 pontos
- Responder ao problema $(\frac{2}{3}s, 2s$ e $\frac{8}{3}s)$ 1 ponto

2.2. 15 pontos

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

- Referir que a função d é contínua em $[3, 4]$ (**ver notas 1 e 2**) 2 pontos
- Calcular $d(3)$ (**ver nota 3**) 4 pontos
- Calcular $d(4)$ (**ver nota 4**) 4 pontos
- Escrever $d(3) < 1,1 < d(4)$ (ou equivalente) 4 pontos
- Concluir o pretendido 1 ponto

2.º Processo

- Referir que $d(t) = 1,1$ é equivalente a $d(t) - 1,1 = 0$ 1 ponto
- Referir que a função f , definida por $f(t) = d(t) - 1,1$, é contínua em $[3, 4]$ (**ver notas 1 e 2**) 2 pontos
- Calcular $f(3)$ (**ver nota 3**) 4 pontos
- Calcular $f(4)$ (**ver nota 4**) 4 pontos
- Referir que $f(3)$ e $f(4)$ têm sinais contrários (ou equivalente) 2 pontos
- Concluir que a função f tem, pelo menos, um zero em $]3, 4[$ 1 ponto
- Concluir o pretendido 1 ponto

Notas:

1. Se apenas for referido que a função é contínua, esta etapa deve ser considerada como cumprida.
2. Se for referido que a função é contínua em $]3, 4[$, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.
3. Se não for apresentada a substituição de $\text{sen}(3\pi + \frac{\pi}{6})$ por $-\text{sen}(\frac{\pi}{6})$ ou por $-\frac{1}{2}$, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.
4. Se não for apresentada a substituição de $\text{sen}(4\pi + \frac{\pi}{6})$ por $\text{sen}(\frac{\pi}{6})$ ou por $\frac{1}{2}$, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

3.1. **15 pontos**

- Determinar $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ 8 pontos
- Escrever $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + xe^x)$ 1 ponto
- Escrever $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + xe^x) = 1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x)$ 1 ponto
- Escrever $1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x) = 1 + \lim_{y=-x} (-ye^{-y})$ (**ver nota**)... 2 pontos
- Escrever $1 + \lim_{y \rightarrow +\infty} (-ye^{-y}) = 1 + \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{-y}{e^y}$ 1 ponto
- Escrever $1 + \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{-y}{e^y} = 1 - \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^y}{y}}$ 1 ponto
- Reconhecer o limite notável $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ 1 ponto
- Obter $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ (1) 1 ponto
- Concluir que a reta de equação $y = 1$ é assíntota horizontal do gráfico da função f , quando $x \rightarrow -\infty$ 1 ponto
- Determinar $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 5 pontos
- Escrever $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x-3) - \ln(x))$ 1 ponto
- Escrever $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x-3) - \ln(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln \frac{x-3}{x} \right)$ 2 pontos
- Escrever $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln \frac{x-3}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln \left(1 - \frac{3}{x} \right) \right)$ 1 ponto
- Obter $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ (0) 1 ponto
- Concluir que a reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal do gráfico da função f , quando $x \rightarrow +\infty$ 1 ponto

Nota – Se for referido que $x \rightarrow -\infty$ é equivalente a $-x \rightarrow +\infty$, esta etapa deve ser considerada como cumprida.

3.2. **15 pontos**

- Escrever $f(x) - 2x > 1 \Leftrightarrow 1 + xe^x - 2x > 1$ 1 ponto
- Escrever $1 + xe^x - 2x > 1 \Leftrightarrow xe^x - 2x > 0$ 1 ponto
- Escrever $xe^x - 2x > 0 \Leftrightarrow x(e^x - 2) > 0$ (**ver nota 1**) 3 pontos
- Apresentar um quadro de sinais (ou equivalente) (**ver notas 2 e 3**) 6 pontos
- Apresentar o conjunto solução $(]-\infty, 0[\cup]\ln 2, 3])$ (**ver notas 4 e 5**) 4 pontos

Notas:

1. Se a resposta apresentar $xe^x > 2x \Leftrightarrow e^x > 2$, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.
2. A apresentação de um quadro de sinais com $x \in]-\infty, +\infty[$ não implica qualquer desvalorização nesta etapa.
3. Se a resposta apresentar apenas a resolução da inequação $e^x > 2$, a pontuação máxima a atribuir nesta etapa é de 2 pontos.
4. Se não for considerada a condição $x \in]-\infty, 3]$, a pontuação a atribuir nesta etapa deve ser desvalorizada em 2 pontos.
5. Se o conjunto solução apresentado resultar da resolução da inequação $e^x > 2$, em vez de resultar da resolução da inequação $x(e^x - 2) > 0$, a pontuação máxima a atribuir nesta etapa é de 2 pontos.

3.3. 15 pontos

Nota prévia – Se for utilizada a expressão $1 + x e^x$, a classificação máxima a atribuir à resposta é de 5 pontos.

- Identificar o declive da reta pedida com $f'(4)$ (**ver nota 1**) 2 pontos
- Determinar $f'(4)$ 7 pontos
- Obter uma expressão de $f'(x)$ 4 pontos
- Obter $f'(4)$ 3 pontos
- Calcular $f(4)$ 2 pontos
- Escrever a equação reduzida da reta pedida $\left(y = \frac{3}{4}x - 3 - \ln 4\right)$ (**ver nota 2**) 4 pontos

Notas:

1. Se for evidente a intenção de determinar a expressão da derivada da função, a pontuação mínima a atribuir nesta etapa é de 1 ponto.
2. Se o declive da reta não for obtido a partir da sua identificação com $f'(4)$, a pontuação máxima a atribuir nesta etapa é de 2 pontos.

4. 15 pontos

Tópicos de resposta:

- Apresentação de uma razão que permita rejeitar o gráfico **A** (como a função f tem derivada finita em todos os pontos do seu domínio, ela é contínua em todo o seu domínio, o que não acontece com a função representada neste gráfico) .
- Apresentação de uma razão que permita rejeitar o gráfico **B** (como, em $]-\infty, 0[$, $f''(x) < 0$, o gráfico da função f tem concavidade voltada para baixo naquele intervalo, o que não acontece com a função representada neste gráfico) .
- Apresentação de uma razão que permita rejeitar o gráfico **C** (como $f'(0) > 0$, o declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 0 é positivo, o que não acontece com a função representada neste gráfico) .

Níveis	Descritores do nível de desempenho	Pontuação
6	Na resposta, são contemplados os três tópicos, com organização coerente dos conteúdos e linguagem científica adequada.	15
5	Na resposta, são contemplados os três tópicos, com falhas na organização dos conteúdos ou na utilização da linguagem científica.	13
4	Na resposta, são contemplados apenas dois dos três tópicos, com organização coerente dos conteúdos e linguagem científica adequada.	10
3	Na resposta, são contemplados apenas dois dos três tópicos, com falhas na organização dos conteúdos ou na utilização da linguagem científica.	8
2	Na resposta, é contemplado apenas um tópico, com organização coerente dos conteúdos e linguagem científica adequada.	5
1	Na resposta, é contemplado apenas um tópico, com falhas na organização dos conteúdos ou na utilização da linguagem científica.	3

Nota – Se, num tópico, apenas for estabelecida a correspondência correta entre o gráfico e a afirmação que permite rejeitá-lo, esse tópico é considerado «com falhas na organização dos conteúdos ou na utilização da linguagem científica».

5. **15 pontos**

- Aplicar a propriedade da probabilidade da união de dois acontecimentos 3 pontos
- Aplicar a propriedade da probabilidade do acontecimento contrário 2 pontos
- Aplicar a propriedade da probabilidade da intersecção de um acontecimento com o contrário de outro acontecimento 3 pontos
- Utilizar a fórmula da probabilidade condicionada 2 pontos
- Concluir que a igualdade é verdadeira 5 pontos

6.1. **5 pontos**

- Reconhecer que o ponto V tem abcissa 1 1 ponto
- Escrever a equação $6 + z - 12 = 0$ (ou equivalente) 2 pontos
- Obter o valor de z 1 ponto
- Indicar as coordenadas do ponto V $((1, 1, 6))$ 1 ponto

Nota – Se a resposta se limitar à apresentação das coordenadas do ponto V , a classificação a atribuir é 1 ponto, desde que a abcissa esteja correta.

6.2. **10 pontos**

- Escrever as coordenadas do ponto P 1 ponto
- Escrever $\vec{OR} = (2, 2, 2)$ 2 pontos
- Escrever a equação $2x + 2y + 2z + d = 0$ (ou equivalente) 3 pontos
- Determinar o valor de d 2 pontos
- Apresentar uma equação cartesiana do plano pedido
($x + y + z - 2 = 0$ ou equivalente)..... 2 pontos

6.3. 15 pontos

- Reconhecer que o ponto A tem coordenadas da forma $(x, 2, x^3)$ 2 pontos
- Identificar as coordenadas do vetor \overrightarrow{OA} com as do ponto A 1 ponto
- Determinar as coordenadas do vetor \overrightarrow{TQ} 2 pontos
- Escrever $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{TQ}$, em função de x 1 ponto
- Equacionar o problema 2 pontos
- Reproduzir o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora, que permite(m) resolver a equação (**ver nota**) 3 pontos
- Apresentar a abcissa do ponto $A (1, 52)$ 4 pontos

Nota – Se não for apresentado o referencial, a pontuação a atribuir nesta etapa deve ser desvalorizada em 1 ponto.

6.4. 15 pontos

- Reconhecer que o número de casos possíveis é 7^9 (**ver nota 1**) 6 pontos
- Reconhecer que o número de casos favoráveis é ${}^4C_2 \times {}^5C_2 \times 5!$ (**ver nota 2**) 8 pontos
- Obter a probabilidade pedida $(0,0002)$ (**ver nota 3**) 1 ponto

Notas:

1. Se a expressão apresentada não for equivalente a 7^9 , a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.
2. A expressão que dá o número de casos favoráveis é o produto das expressões 4C_2 , 5C_2 e $5!$ Por cada expressão incorreta ou não apresentada devem ser descontados 4 pontos. A mesma desvalorização deve ser feita caso seja considerada, uma ou mais vezes, uma operação diferente da multiplicação. Se, por aplicação deste critério, o valor obtido for negativo, esta etapa deve ser pontuada com 0 pontos.
3. Se a etapa relativa ao número de casos possíveis e a etapa relativa ao número de casos favoráveis tiverem sido pontuadas com 0 pontos, a pontuação a atribuir a esta etapa é 0 pontos. A pontuação de 0 pontos também deve ser atribuída caso o valor obtido não pertença ao intervalo $[0, 1]$

COTAÇÕES

GRUPO I

1. a 8. (8 × 5 pontos)	40 pontos
	40 pontos

GRUPO II

1.	15 pontos
2.	
2.1.	10 pontos
2.2.	15 pontos
3.	
3.1.	15 pontos
3.2.	15 pontos
3.3.	15 pontos
4.	15 pontos
5.	15 pontos
6.	
6.1.	5 pontos
6.2.	10 pontos
6.3.	15 pontos
6.4.	15 pontos
	160 pontos

TOTAL **200 pontos**