# Raízes e Coeficientes de um Polinómio do 3º Grau

Eduardo Cunha
Raul Aparício Gonçalves

## QUESTÕES PARA OS ALUNOS

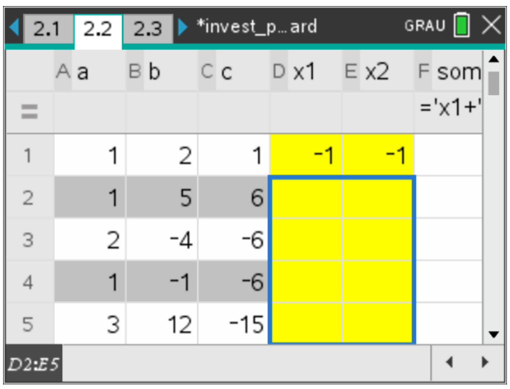
A resolução de equações polinomiais, como as do 1º e 2º grau que aprendeste no 3ºciclo, são um conhecimento que te vai ser sempre exigido nos teus estudos futuros, quer em Matemática, quer noutras áreas do saber. O matemático francês Albert Girard (1595-1632), que também era músico e que foi forçado a refugiar-se na Holanda, produziu trabalho académico em álgebra, trigonometria e aritmética. Num desses trabalhos, Girard estudou a relação existente entre os coeficientes de uma equação polinomial de grau superior ou igual a 2 e as suas raízes.

Este é o DESAFIO que irás enfrentar! As tarefas seguintes conduzir-te-ão, através de um processo investigativo, à formulação de conjeturas e às suas provas!

### RECORDAR O 3ºCICLO

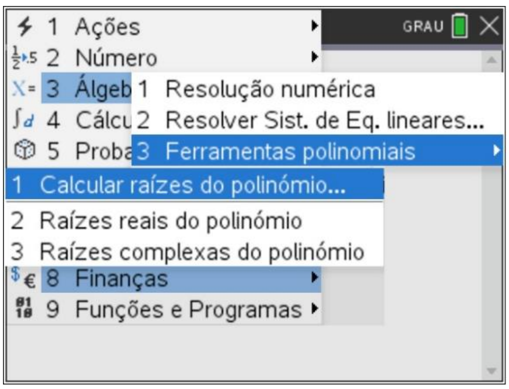
Considera, na sua forma canónica, um polinómio de 2ºgrau, $P(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, sendo a, b e c quaisquer números reais com $a \neq 0$.

No 3ºciclo deves ter tido a oportunidade de estudar a relação entre as raízes/soluções de uma equação do 2ºgrau e os seus coeficientes na forma canónica! Façamos uma pequena investigação que nos permita relembrar essas relações!




Abre então o ficheiro **invest_polinómios_girard.tns** na tua calculadora TI-Nspire CX II ou no software de aluno. Neste ficheiro tens várias instruções que deves ler com atenção, elas serão importantes para alcançares o sucesso da tua investigação. Para mudares de página na TI-Nspire CX II, usa as teclas ctrl + (direita) e ctrl + (esquerda).

Na Folha de Cálculo da página 2.2 deste ficheiro, imagem ao lado, encontram-se, por linha, os coeficientes de 8 polinómios de 2ºgrau. Por exemplo, na linha 1 estão os coeficientes do seguinte polinómio do 2º grau $P(x) = 1 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 1$. Cujas raízes são x1= –1 e x2= –1 (raiz dupla) e que deves colocar nas respetivas colunas da linha 1.



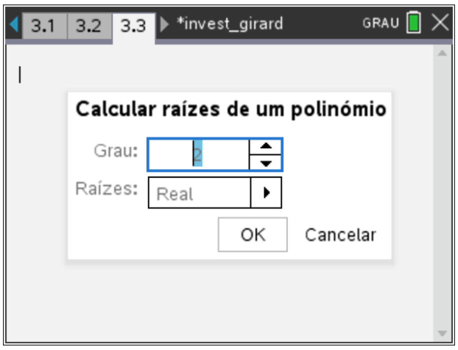

Para usares a ferramenta *polyRoots* da TI-Nspire CX II, na página 2.3, clica na tecla menu, e de seguida na seguinte

# Raízes e Coeficientes de um Polinómio do 3º Grau

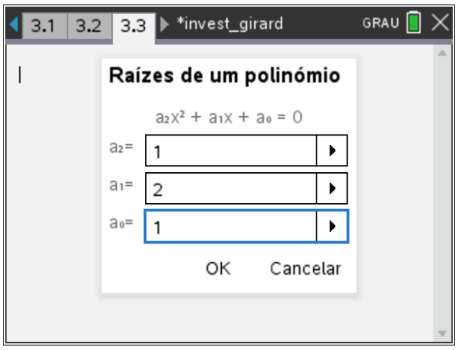
Eduardo Cunha
Raul Aparício Gonçalves

sequência de opções: [3], depois [3], e finalmente [1]. Esta sequência, [menu] [3] [1] [1], ser-te-á muito familiar no futuro.

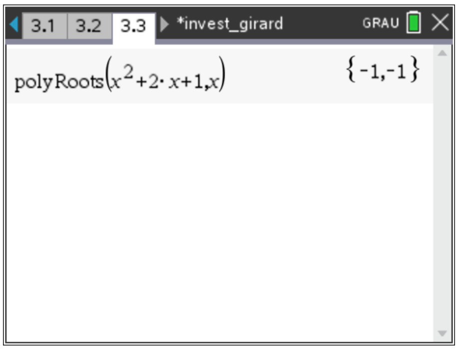
Abaixo encontras três ilustrações com os passos a seguir para usares esta importante ferramenta de cálculo.



- Indicar o grau do polinómio

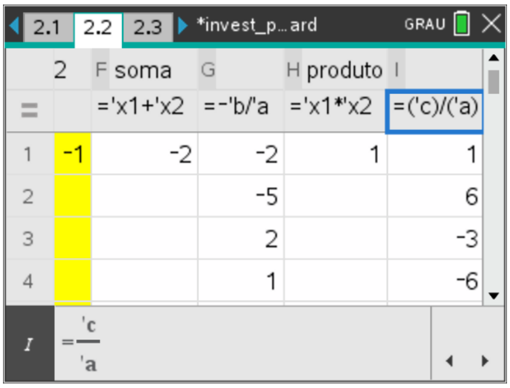


- Indicar os coeficientes do polinómio



- Executar e obter as raízes

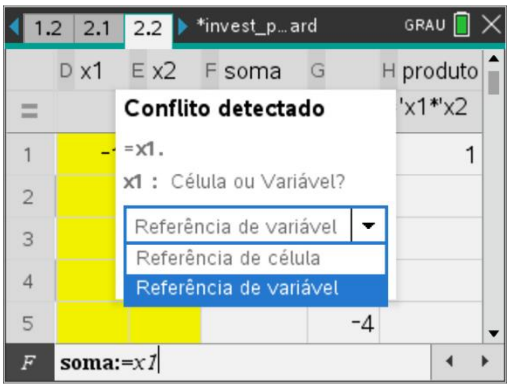
Usa, agora, a ferramenta *polyRoots* para determinares as raízes de cada um dos polinómios da folha de cálculo da página 2.2 e preenche as colunas x1 e x2 com os respetivos valores.




Insere nas colunas F, G, H e I, da mesma folha de cálculo, as seguintes operações algébricas:

- coluna F: 'x1+'x2
- coluna G: – 'b/'a
- coluna H: 'x1*'x2
- coluna I: 'c/'a

Para tal usa a linha a cinzento, correspondente à expressão geradora da lista, para escrever, por exemplo, '**x1+'x2** para obter a soma das raízes ou **–'b/'a** para obter o simétrico do quociente entre coeficientes.




Tem em atenção que sempre que escreveres uma fórmula em que utilizes os coeficientes (variáveis definidas por ti por **a**, **b** e **c**) ou as raízes (variáveis **x1** e **x2**), terás que ter o cuidado de indicar que se trata de uma variável. Terá que surgir na fórmula, por exemplo, **'x1** ou **'a**.

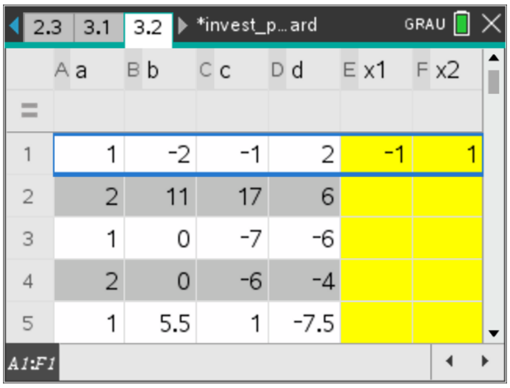
Com a tabela da página 2.2 completa, observa os resultados obtidos nas colunas F, G, H e I e recorda a relação entre as raízes e os coeficientes!

# Raízes e Coeficientes de um Polinómio do 3º Grau

Eduardo Cunha
Raul Aparício Gonçalves

## RAÍZES E COEFICIENTES POLINÓMIOS 3ºGRAU

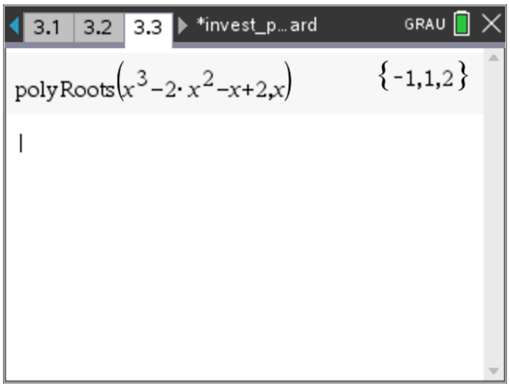
Considera, na sua forma canónica, um polinómio de 3ºgrau, $P(x) = a{\cdot}x^3 + b{\cdot}x^2 + c{\cdot}x + d$, sendo a, b, c e d quaisquer números reais com $a \neq 0$. Considera ainda x1, x2 e x3 as três raízes reais do polinómio P(x).



| | A a | B b | C c | D d | E x1 | F x2 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| = | | | | | | |
| 1 | 1 | -2 | -1 | 2 | -1 | 1 |
| 2 | 2 | 11 | 17 | 6 | | |
| 3 | 1 | 0 | -7 | -6 | | |
| 4 | 2 | 0 | -6 | -4 | | |
| 5 | 1 | 5.5 | 1 | -7.5 | | |

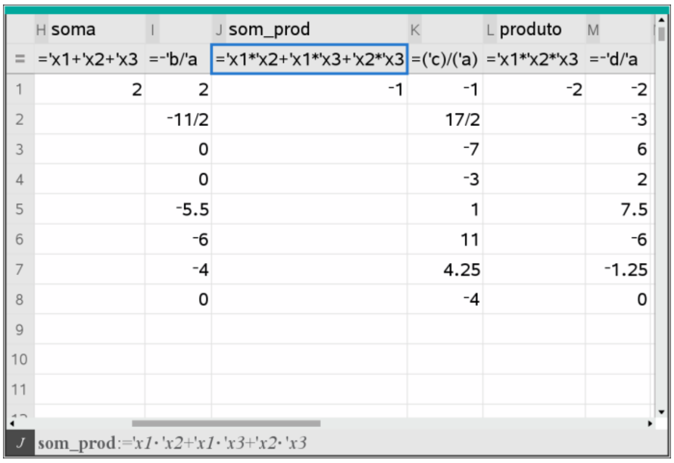
Na página 3.2 do teu documento tns encontras nas colunas A, B, C e D os coeficientes dos polinómios de 3º grau.

Recorrendo novamente à ferramenta *polyRoots* da TI-Nspire CX II, na página 3.3, determina as 3 raízes reais de cada polinómio e insere-as nas colunas E, F e G, designadas por x1, x2 e x3.




Atenta no exemplo constante na linha 1 cujo polinómio definido é $P(x) = 1{\cdot}x^3 – 2{\cdot}x^2 – 1{\cdot}x + 2$ e cujas 3 raízes reais, obtidas na aplicação de Calculadora da página 3.3, são x1= –1, x2=1 e x3=2.

De forma análoga, obtem de seguida as raízes reais dos restantes polinómios de 3º grau e insere os valores nas respetivas células.



| | H soma | I | J som_prod | K | L produto | M |
|---|---|---|---|---|---|---|
| = | ='x1+'x2+'x3 | =-'b/'a | ='x1*'x2+'x1*'x3+'x2*'x3 | =('c)/('a) | ='x1*'x2*'x3 | =-'d/'a |
| 1 | 2 | 2 | -1 | -1 | -2 | -2 |
| 2 | | -11/2 | | 17/2 | | -3 |
| 3 | | 0 | | -7 | | 6 |
| 4 | | 0 | | -3 | | 2 |
| 5 | | -5.5 | | 1 | | 7.5 |
| 6 | | -6 | | 11 | | -6 |
| 7 | | -4 | | 4.25 | | -1.25 |
| 8 | | 0 | | -4 | | 0 |
| 9 | | | | | | |
| 10 | | | | | | |
| 11 | | | | | | |

som_prod:='x1·'x2+'x1·'x3+'x2·'x3

Após teres determinado e inserido todas as raízes, observa e compara os dados obtidos nas colunas H, I, J, K, L e M da Folha de Cálculo.

Tendo em atenção as expressões geradoras de cada uma destas colunas que conjeturas formulas?

## A PROVA DA TUA CONJETURA

Recorrendo à forma canónica de um polinómio do 3º grau, $P(x) = a{\cdot}x^3 + b{\cdot}x^2 + c{\cdot}x + d$, e à sua factorização partindo das 3 raízes reais, $P(x) = a{\cdot}(x – x1)(x – x2)(x – x3)$, com $a \neq 0$, prova a conjetura que acabaste de formular.