SÉRIES GÉOMÉTRIQUES

Auteur : Alain Ladureau **TI-Nspire™ CAS**

Mots-clés : suite, série, convergence, série géométrique.

1. Objectifs

- Introduire la notion de série numérique avec l'exemple de la série géométrique.
- Reconnaître une série géométrique et connaître la condition de convergence.
- Utiliser les fonctionnalités de TI-Nspire dans l'utilisation des séries numériques.

2. Pré requis

On suppose connues les suites géométriques, définition, condition de convergence, expression de la somme en fonction de a et de la raison.
Certains résultats peuvent être vérifiés à l'aide de la calculatrice (voir l'extrait d'écran ci-contre).

$$\sum_{i=0}^{n}\left(a\cdot q^{i}\right) \qquad a\cdot\left(\frac{q^{n+1}}{q-1}-\frac{1}{q-1}\right)$$

L'instruction somme peut être récupérée dans une page de calcul par la touche menu, onglet 4 : Analyse, instruction 5, ou en utilisant le catalogue ou en utilisant les modèles symboles spéciaux accessibles par la touche ⁞.

3. Commentaires

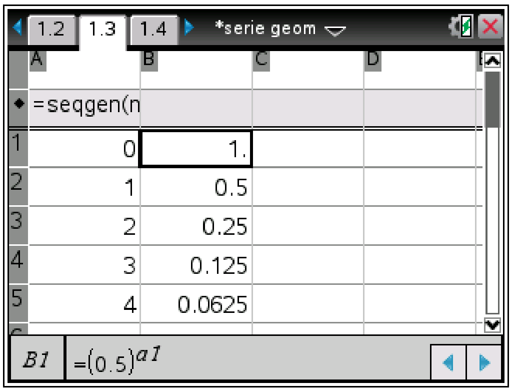
On peut conjecturer que la limite de S_n est 2 à la vue de la construction géométrique.
Pour la question 2 et l'utilisation du tableur, il est important de définir en cellule b1, le premier terme de la suite géométrique en utilisant 0,5 plutôt que ½ afin que les calculs soient réalisés en mode approché afin de pouvoir, colonne c, interpréter facilement les réponses pour contrôler la conjecture.

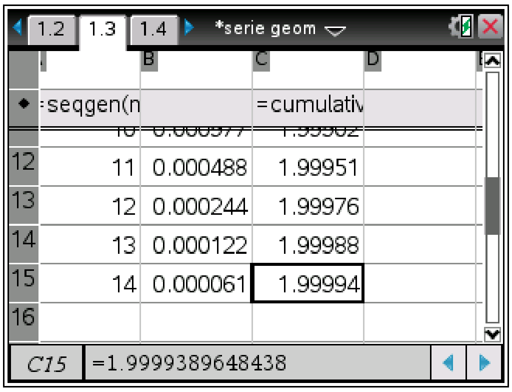
Pour remplir la colonne b du tableur, on place le curseur en cellule b1, on tape =(0.5)^a1suivi de enter.

On se replace en cellule b1, touche menu, onglet 3 : Données, on choisit l'instruction 3 : Remplir.
On appuie sur la flèche basse du pavé tactile jusqu'à la ligne 15 du tableur, et enfin sur la touche enter.

Pour remplir la colonne [c] du tableur, on place le curseur dans la case grisée de la définition de la colonne, on récupère l'instruction *cumulativeSum* dans le catalogue, on appuie sur la lettre b puis sur enter.

La conjecture peut alors être vérifiée en se déplaçant dans la colonne [c] jusqu'à la cellule c15.





La démonstration demandée permet de réinvestir les résultats concernant les suites géométriques et la condition de convergence de cette suite.

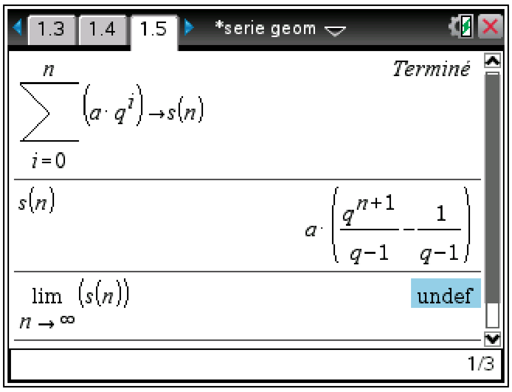
On a $S_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \ldots + \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \dfrac{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} - 1}{\dfrac{1}{2} - 1} = (-2).\left[\left(2^{-1}\right)^{n+1} - 1\right] = 2 - 2^{-n-1+1} = 2 - 2^{-n} = 2 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

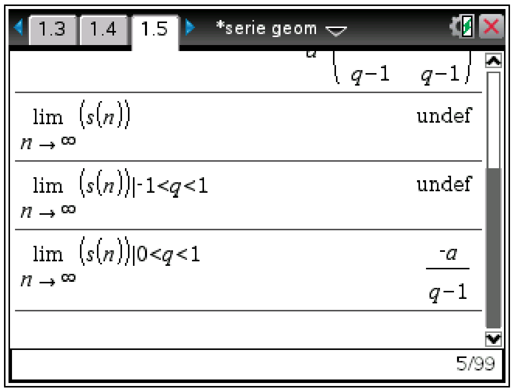
On peut alors conclure : $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = 2$ car la raison $\dfrac{1}{2}$ appartient à l'intervalle]-1 ; 1[.

5) Généralisation.

Il est possible d'utiliser TI-Nspire dans cette question comme le montrent les écrans ci-dessous.

Cependant quelques précautions sont à prendre.





La calculatrice donne le résultat lorsque la raison est comprise entre 0 et 1 mais pas lorsque celle-ci est comprise entre -1 et 0 dans le cas symbolique mais répond correctement lorsque la raison est numérique.