SÉRIES GÉOMÉTRIQUES

TI-Nspire™ CAS

1. Objectifs

Introduire la notion de série numérique et la notation de somme infinie associée.

2. Énoncé

On considère la suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q = \frac{1}{2}$.

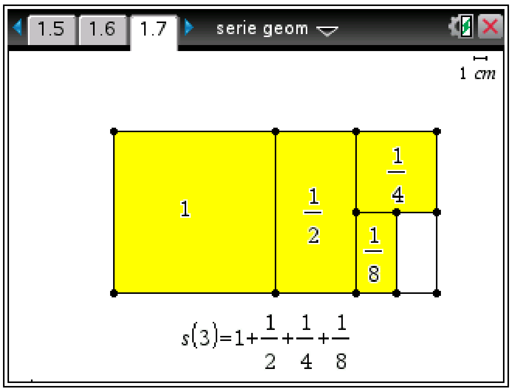
On appelle (S) la suite définie pour tout entier n par la relation : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$.

3. Questions

1) Calculer les quatre premiers termes de la suite *S*

On a représenté dans l'écran ci-contre la somme S_3.

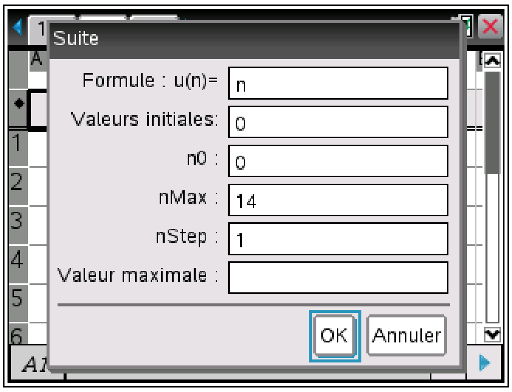
Quelle conjecture peut-on établir pour la limite de S_n en l'infini au vu de l'écran ci-contre ?



2) A l'aide du tableur, construire les 15 premiers termes de la suite *S*

Dans la colonne a du tableur on placera les entiers de 0 à 14 en utilisant l'instruction Générer une suite accessible par la touche menu 3 : Données.

On renseignera comme dans l'écran ci-contre la boîte de dialogue.



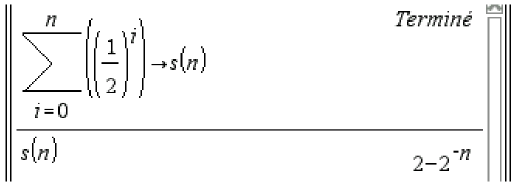
Dans la colonne [b], on placera les 15 premiers termes de la suite géométrique (u) et dans la colonne [c] les 15 premiers termes de la série (S) à l'aide de l'instruction *cumulativeSum(b)*, instruction que l'on trouvera dans le catalogue.

Les résultats lus colonne [c] du tableur confirment-ils la conjecture faite question 1 ?

3) Démonstration

Rappeler la formule qui permet de calculer la somme des termes d'une suite géométrique.

Observer l'écran ci-contre et démontrer le résultat de la deuxième ligne donné par la calculatrice.



Déduire du calcul précédent la limite de S_n en l'infini.

4) Notation

On dit, dans ce cas, que la série est convergente et que sa somme est 2. On notera : $\sum_{n=0}^{+\infty} S_n = 2$.

5) Généralisation

On considère la suite géométrique définie pour tout entier naturel n par : $u_n = a.q^n$.

On pose $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$. $S(n)$ est appelée suite des sommes partielles de la série.

Répondre aux trois questions suivantes :
a) Exprimer $S(n)$ en fonction de a et de n.
b) A quelle condition la suite u_n converge-t-elle ?
c) Sous ces conditions, établir la limite de S_n.

Définition : Soit (u_n) une suite de nombres réels.

On pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ qui est appelée suite des sommes partielles de la série.

La série de terme général u_n est dite convergente si la suite (S_n) est convergente. Dans ce cas, la limite de (S_n) est appelée somme de la série et on note : $\lim_{n \to +\infty} S_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

On appelle **série géométrique** une série dont le terme général est de la forme $u_n = a.q^n$, a réel non nul.

La série géométrique converge si et seulement si $|q| < 1$ et on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{a}{1-q}$.