REPRÉSENTATIONS GRAPHIQUES ET FONCTIONS PÉRIODIQUES

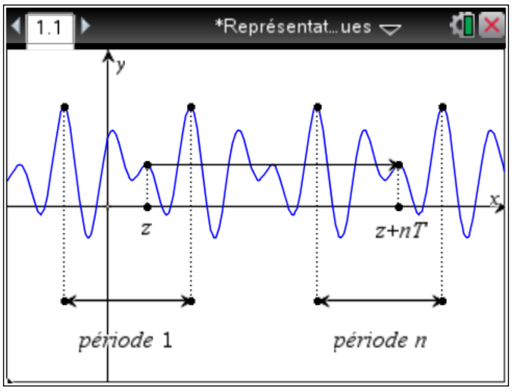
Auteur : Alain Ladureau **TI-Nspire™ CAS**

1. Objectifs

Afficher la représentation graphique d'une fonction périodique connaissant sa période T et son expression sur un intervalle d'amplitude une période. Ces représentations se rencontrent fréquemment, lors de l'étude du développement en série de Fourier par exemple.

2. La méthode

La période T de la fonction f est supposée connue ainsi que son expression sur l'intervalle $[a\ ;\ a + T]$.



Le problème est classique et a déjà été rencontré lors des mesures principales d'un angle par exemple.
On peut commencer par demander aux étudiants de « ramener » dans l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi]$ la mesure d'un angle égale à 2 013 radians par exemple.
Le réel x est égal à z augmenté d'un nombre entier n de périodes.
On peut poser $x = z + n.T$, où n désigne un nombre entier.
Le calcul de $f(x)$ où x appartient à $[a + n.T\ ;\ a + (n+1).T]$ se ramène donc au calcul de $f(z)$ avec z situé dans l'intervalle $[a\ ;\ a + T]$ lorsque l'on connait l'entier n. Il faut donc calculer n.

Questions

En partant de l'encadrement : $a + nT \leq\ x \leq a + (n+1).T$, montrer que le nombre réel $\dfrac{x-a}{T}$ est compris entre deux entiers.

$a + nT \leq x \leq a + (n+1).T$, donc $nT \leq x - a \leq (n+1).T$ et enfin : $n \leq \dfrac{x-a}{T} \leq n+1$.

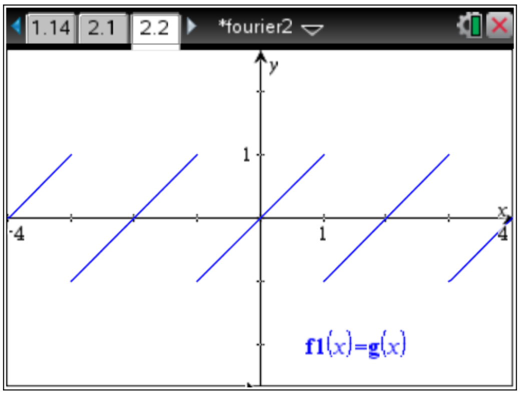
La fonction partie entière est accessible dans le catalogue ou par l'appui des touches menu 2 8 6 ou bien en saisissant directement l'instruction au clavier, sans oublier la parenthèse.

Conclusion : la fonction f ayant été saisie à la calculatrice pour tout x de l'intervalle $[a\ ;\ a + T]$, la fonction g périodique de période T associée peut alors être définie à partir de f par la relation :

$$\boxed{g(x) = f\left(x - T \cdot \operatorname{int}\left(\frac{x-a}{T}\right)\right)}$$

3. Un exemple pas à pas.

On souhaite effectuer la représentation graphique de la fonction f définie par $f(x) = x$ pour tout x de l'intervalle]-1 ; 1] et qui est périodique de période 2 comme affiché dans la figure ci-contre.

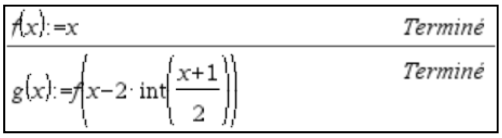


On ouvre une page de calcul dans laquelle on définit les fonctions f et g.

On a $f(x) = x$ pour x dans $[a\ ;\ a + T]$ avec $a = -1$ et $T = 2$.

La fonction g est donc définie par :

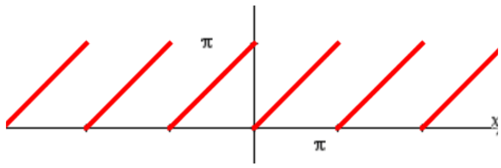
$$g(x) = f\left(x - 2 \cdot \text{int}\left(\frac{x+1}{2}\right)\right).$$



4. Exercices

Pour chacun des exemples suivants, donner l'expression de $g(x)$ et représenter sur la calculatrice la fonction g comme indiqué dans les écrans de droite.

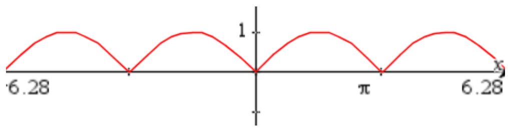
• f est π-périodique et $f(x) = x$ sur $[0\ ;\ \pi\ [$.



Réponse : $g(x) = f\left(x - \pi \cdot \text{int}\left(\frac{x}{\pi}\right)\right)$.

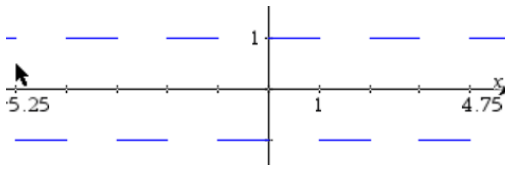
La modification de la graduation portée sur les axes s'obtient en double cliquant sur la graduation affichée et en la remplaçant par celle souhaitée, ici on a choisi π.

• f est π-périodique et $f(x) = \sin(x)$ sur $[0\ ;\ \pi\ [$.



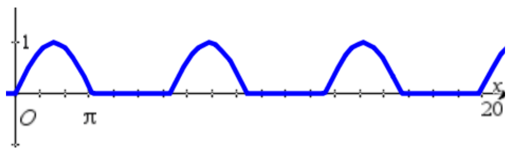
Réponse : $g(x) = f\left(x - \pi \cdot \text{int}\left(\frac{x}{\pi}\right)\right)$.

• f est 2-périodique et $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in [0\,;1[\\ -1 \text{ si } x \in [-1\,;0[\end{cases}$.



Réponse : $g(x) = f\left(x - 2 \cdot \text{int}\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)$.

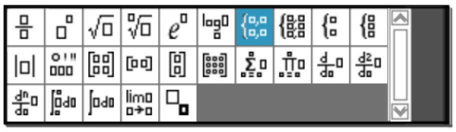
• f est 2π-périodique et $f(x) = \begin{cases} \sin(x) \text{ si } x \in [0\,;\pi] \\ 0 \quad \text{ si } x \in]\pi\,;2\pi] \end{cases}$.



Réponse : $g(x) = f\left(x - 2\pi \cdot \text{int}\left(\frac{x}{2\pi}\right)\right)$.

On peut aussi, dans ce cas, définir directement la fonction par $f(x) = \max(\sin(x),0)$.

Remarque : pour les deux derniers exemples, on utilisera la possibilité qu'offre la calculatrice de définir *f* par morceaux en utilisant le modèle prédéfini accessible par la touche



On saisit alors *f* comme indiqué ci-dessous.

$$f(x):=\begin{cases}1, & 0\le x<1\\ -1, & -1\le x<0\end{cases} \qquad \textit{Terminé}$$

Les symboles d'inégalités sont obtenus par ctrl =.