REPRÉSENTATIONS GRAPHIQUES ET FONCTIONS PÉRIODIQUES

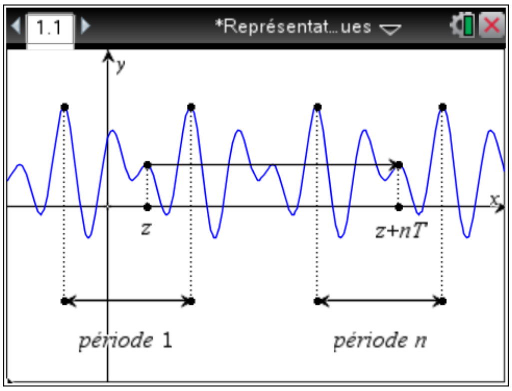
TI-Nspire™ CAS

1. Objectifs

Afficher la représentation graphique d'une fonction périodique connaissant sa période T et son expression sur un intervalle d'amplitude une période.

2. La méthode

La période T de la fonction f est supposée connue ainsi que son expression sur l'intervalle $[a\ ;\ a + T]$.



Si x désigne un nombre réel quelconque, x peut être considéré comme un réel situé dans un intervalle « décalé » de n périodes ; voir la figure ci-dessus où l'on a x situé dans la troisième période.
Le réel x est égal à z augmenté d'un nombre entier n de périodes.
On peut poser $x = z + n.T$, où n désigne un nombre entier.
Le calcul de $f(x)$ où x appartient à $[a + n.T\ ;\ a + (n+1).T]$ se ramène donc au calcul de $f(z)$ avec z situé dans l'intervalle $[a\ ;\ a + T]$ lorsque l'on connaît l'entier n.

Questions

• En partant de l'encadrement : $a + nT \le x \le a + (n+1).T$, montrer que le nombre réel $\dfrac{x-a}{T}$ est compris entre deux entiers.

• En utilisant la fonction partie entière noté **int(** ,disponible dans le catalogue de votre calculatrice, calculer les réels : int(52,34), int($\sqrt{3}$), int(-5,21).

• En utilisant les éléments ci-dessus, vérifier que l'on a : $z = x - T \cdot \text{int}\left(\dfrac{x-a}{T}\right)$.

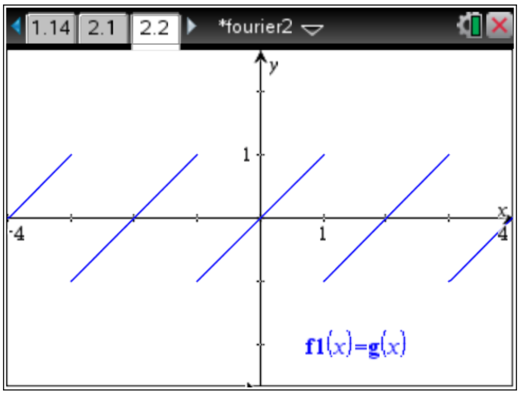
Conclusion

La fonction f ayant été saisie à la calculatrice pour tout x de l'intervalle $[a\ ;\ a + T]$, la fonction g périodique de période T associée peut alors être définie à partir de f par la relation :

$$\boxed{g(x) = f\left(x - T \cdot \text{int}\left(\frac{x-a}{T}\right)\right)}$$

3. Un exemple pas à pas

On souhaite effectuer la représentation graphique de la fonction f définie par $f(x) = x$ pour tout x de l'intervalle]-1 ; 1] et qui est périodique de période 2, comme affiché dans la figure ci-contre.

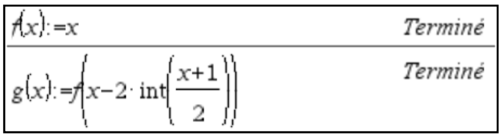


On ouvre une page de calcul dans laquelle on définit les fonctions f et g.

On a $f(x) = x$ pour x dans $[a\ ;\ a + T]$ avec $a = -1$ et $T = 2$.

La fonction g est donc définie par :

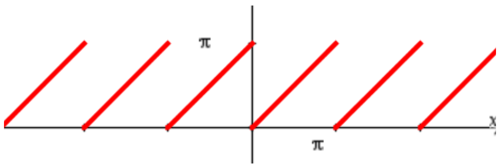
$$g(x) = f\left(x - 2\cdot \text{int}\left(\frac{x+1}{2}\right)\right).$$



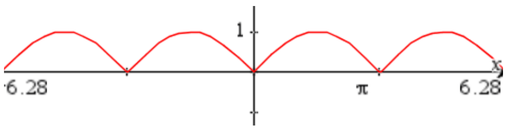
4. Exercices

Pour chacun des exemples suivants, donner l'expression de $g(x)$ et représenter, sur la calculatrice, la fonction g comme indiqué dans les écrans de droite.

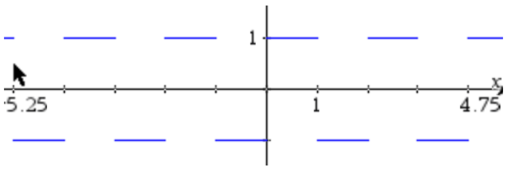
- f est π-périodique et $f(x) = x$ sur $[0\ ;\ \pi\ [$.



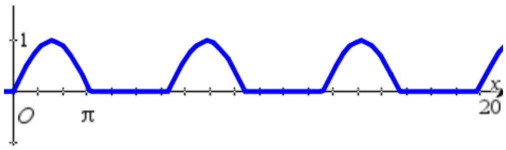
- f est π-périodique et $f(x) = \sin(x)$ sur $[0\ ;\ \pi\ [$.



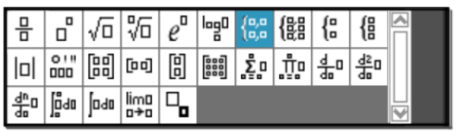
- f est 2-périodique et $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in [0\,;1[\\ -1 \text{ si } x \in [-1\,;0[\end{cases}$.



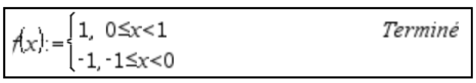
- f est 2π-périodique et $f(x) = \begin{cases} \sin(x) \text{ si } x \in [0\,;\pi] \\ 0 \quad \text{ si } x \in \,]\pi\,;2\pi] \end{cases}$.



Remarque : pour les deux derniers exemples, on utilisera la possibilité qu'offre la calculatrice de définir f par morceaux en utilisant le modèle prédéfini accessible par la touche .



On saisit alors f comme indiqué ci-dessous.



Les symboles d'inégalités sont obtenus par ctrl =.