TRANSFORMATION DE LAPLACE

Auteur : Alain Ladureau TI-Nspire™ CAS

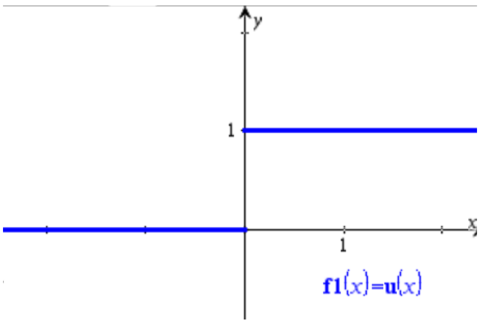
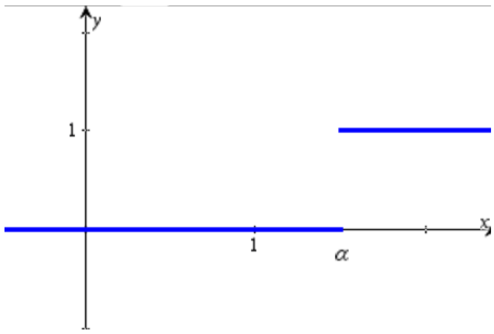
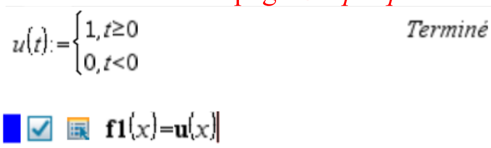
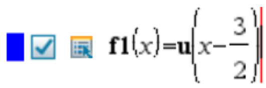
1. Objectifs

- Découvrir la transformée de Laplace.
- Utiliser la transformation de Laplace dans la résolution des équations différentielles linéaires du premier et du second ordre.

Pré requis : Equations différentielles linéaires à coefficients constants.

2. Fonction échelon unité

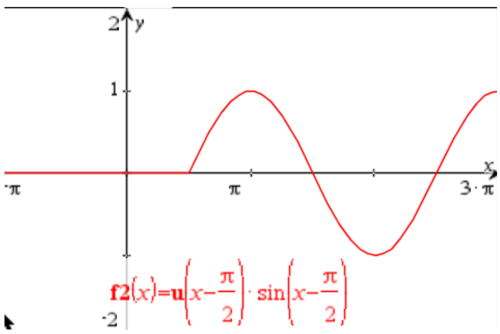
On appelle fonction échelon unité (ou fonction de Heaviside) la fonction définie pour tout nombre t réel par : U(t) = 0 si $t < 0$ et U(t) = 1 si $t \geq 0$.

Fonction échelon unité	Fonction échelon unité translatée
$\begin{cases} U(t)=0 & t<0 \\ U(t)=1 & t\geq 0 \end{cases}$	$\begin{cases} U(t-\alpha)=0 & t<\alpha \\ U(t-\alpha)=1 & t\geq \alpha \end{cases}$
	
La saisie de la fonction s'effectue dans une page de *Calculs*, l'affichage graphique s'obtient dans la même activité dans une page *Graphiques*.	On a modifié la définition de la fonction précédente et pris ici α = $\frac{3}{2}$.
	

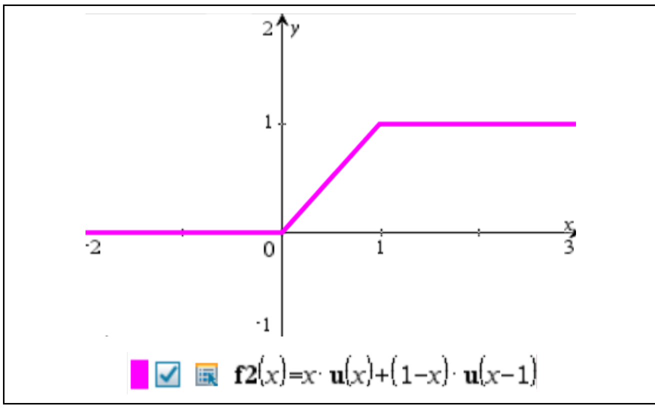
Définition : Une fonction f est dite **causale** si $f(t) = 0$ pour tout $t < 0$.

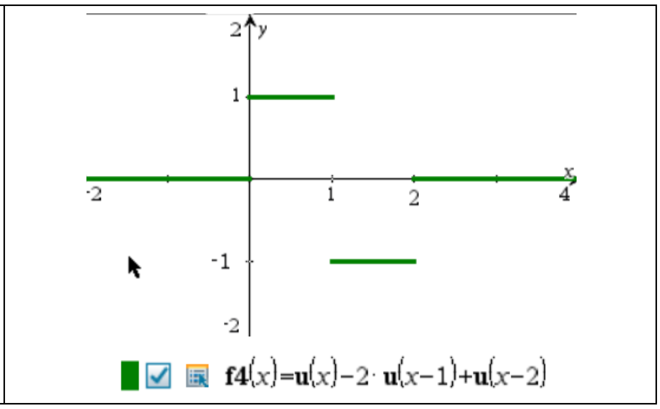
La fonction échelon unité et sa translatée permettent de fabriquer des fonctions causales comme le montre l'écran ci-contre.

Remarque : ceci suppose que la fonction échelon unité a été définie dans la même activité dans une page *Calculs* comme indiqué ci-dessus.



Exercice : En utilisant la fonction échelon unité ou sa translatée, donner en fonction de x une expression de $f(x)$ correspondant à chacun des graphiques suivants.





Remarques : lors de la saisie, ne pas oublier le signe du produit entre x et u(x).
Pour choisir la couleur du trait, une fois le graphique tracé, rapprocher le curseur du graphique et lorsque la mention graphique *f2* apparaît, appuyer sur les touches ctrl menu, sélectionner B : *Couleur du trait* et choisir la couleur souhaitée.

3. Transformée de Laplace

Étude d'un exemple

p désigne un nombre réel positif.

a. Calculer en fonction de a réel positif l'intégrale $I(a)=\int_0^a u(x).e^{-p.x}\,\mathrm{d}x$ où $u(x)$ désigne la fonction échelon unité.

b. Établir que $I(a)$ a pour limite $\frac{1}{p}$ lorsque a tend vers + ∞.

Réponse : On trouve I(a) = $\frac{1}{p}-\frac{e^{-a.p}}{p}$.

On note $\mathscr{L}$(u(x))= $\frac{1}{p}$ = F(p). On appelle ici F la transformée de Laplace de la fonction échelon unité.

Définitions

f étant une fonction causale, on appelle transformée de Laplace de f la fonction F définie par :

$$\mathrm{F}(p) = \int_0^{+\infty} e^{-p.x}.a\,\mathrm{d}x$$

F(p) est appelée l'**image** de f, $f \xrightarrow{\mathscr{L}} F$ est la transformation de Laplace

Exercice

En utilisant la calculatrice, déterminer les images des fonctions f telles que : $f(x) = x$, $f(x) = x^2$, $f(x) = \sin x$.

Réponses

$\int_0^{\infty}\left(x\cdot e^{-p\cdot x}\right)\mathrm{d}x|p>0 \qquad \frac{1}{p^2}$

$\int_0^{\infty}\left(x^2\cdot e^{-p\cdot x}\right)\mathrm{d}x|p>0 \qquad \frac{2}{p^3}$

$\int_0^{\infty}\left(\sin(x)\cdot e^{-p\cdot x}\right)\mathrm{d}x|p>0 \qquad \frac{1}{p^2+1}$

Le symbole ∞ peut être récupéré en appuyant sur la touche π▸.
Il faut préciser lors de la saisie que p est positif. On trouve la barre verticale, qui signifie « sachant que », en appuyant sur les touches ctrl =.

4. Dictionnaire d'images

Ouvrir une page tableur, renseigner la première colonne comme dans l'écran ci-contre.
Dans la partie grisée de la colonne [b], saisir la formule :

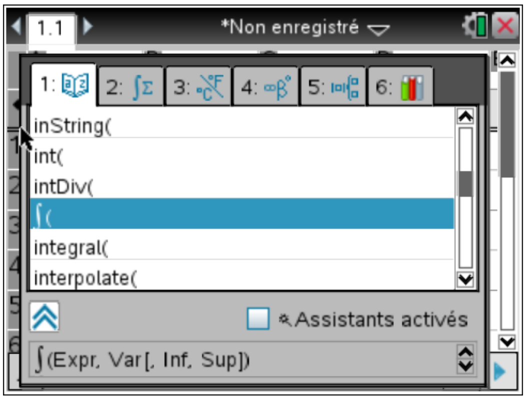
$$= \int_0^{+\infty} e^{-p\_ \cdot x} .a.dx \ \Big|\, p\_ > 0 \text{ and } a\_ > 0$$

Remarque : a désigne la colonne [a] ; la notation $p\_$ et $a\_$ est utilisée afin que la calculatrice ne confonde pas avec la référence du nom de la colonne du tableur.
L'écriture $p\_$ s'obtient par p ctrl ␣.

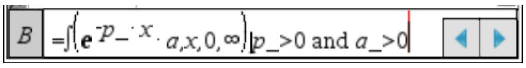
1	
x	
x^2	
x^3	
$\cos(x)$	
$\sin(x)$	
$e^{-a\_ x}$	
$\cos(\omega x)$	
$\sin(\omega x)$	

La manipulation : On ouvre une nouvelle page *Tableur*, on renseigne la colonne A comme indiqué ci-dessus. On place le curseur dans la partie grisée de la colonne B, on appuie sur la touche = puis sur 📖 (catalogue) et on recherche l'instruction « intégrale ».

Voici l'écran qui s'affiche lorsqu'on sélectionne l'instruction « intégrale » dans le catalogue.
On notera, en bas de page, le rappel de la syntaxe à utiliser.

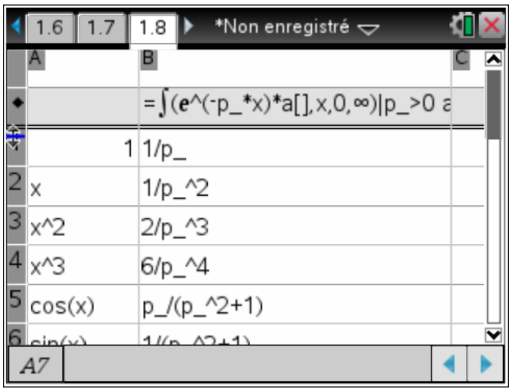


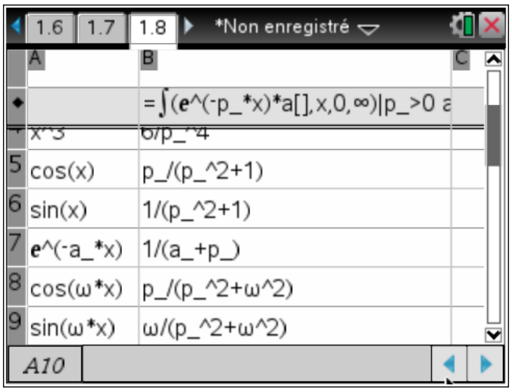
On appuie alors sur enter puis on saisie les instructions comme ci-dessous :



Le a qui figure dans l'expression de la fonction à intégrer fait référence au contenu de la colonne A du tableur, le $a\_$ fait référence à la lettre $a\_$ utilisée ligne 7 de la colonne A.

On appuie de nouveau sur la touche enter, la colonne B se remplit alors automatiquement.





5. Propriétés de la transformation de Laplace

a. Linéarité

Exemple : Déterminer à l'aide de la calculatrice les images suivantes : $\mathscr{L}(2x+1)$) et $2\mathscr{L}(x) + \mathscr{L}(1)$.

$\int_0^{\infty}\left(e^{-p\cdot x}\cdot(2\cdot x+1)\right)dx \mid p>0$	$\frac{p+2}{p^2}$	$2\cdot\int_0^{\infty}\left(e^{-p\cdot x}\cdot x\right)dx \mid p>0$	$\frac{2}{p^2}$	$\int_0^{\infty}\left(e^{-p\cdot x}\cdot 1\right)dx \mid p>0$	$\frac{1}{p}$

$$\boxed{\mathscr{L}(\lambda f + \mu g) = \lambda\mathscr{L}(f) + \mu\,\mathscr{L}(g)}$$

b. Transformée de $f(a.x)$

Exemple : Déterminer à l'aide de la calculatrice les images suivantes : $\mathscr{L}((\cos(2x))$ et $\frac{1}{2}F(\frac{p}{2})$.

$\int_0^{\infty}\left(e^{-p\cdot x}\cdot\cos(2\cdot x)\right)dx \mid p>0$	$\frac{p}{p^2+4}$	$\frac{1}{2}\cdot\int_0^{\infty}\left(e^{\frac{-p}{2}\cdot x}\cdot\cos(x)\right)dx \mid p>0$	$\frac{p}{p^2+4}$

$$\boxed{\mathscr{L}(f(a.x)) = \frac{1}{a}F(\frac{p}{a})}$$

c. Transformée de $f(x - a)$, $a > 0$

Exemple : Déterminer à l'aide de la calculatrice les images suivantes : $\mathscr{L}(\sin(x-\frac{\pi}{3}))$ et $\mathscr{L}((\sin(x))$.

$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\infty}\left(e^{-p\cdot x}\cdot\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right)dx \mid p>0$	$\frac{e^{\frac{-p\cdot\pi}{3}}}{p^2+1}$	$\int_0^{\infty}\left(e^{-p\cdot x}\cdot\sin(x)\right)dx \mid p>0$	$\frac{1}{p^2+1}$

$$\boxed{\mathscr{L}(f(x-a)) = e^{-p\,a}\,\mathscr{L}(f(x))}$$

d. Transformée de la dérivée

$$\boxed{\mathscr{L}(f'(x)) = p\,F(p) - f(0^+)}$$

Remarque : $f(0^+)$ désigne la limite à droite de f en zéro.

e. Cas de la dérivée seconde

$$\boxed{\mathscr{L}(f''(x)) = p^2\,F(p) - p\,f(0^+) - f'(0^+)}$$

f. Transformée de la primitive

$$\boxed{\mathscr{L}\left[\int_0^x f(t)dt\right] = \frac{F(p)}{p}}$$

g. Théorème de la valeur initiale et de la valeur finale

$$\lim_{p\to+\infty} pF(p) = f(0^+)$$

$$\lim_{p\to 0} pF(p) = f(+\infty)$$

6. Transformée de Laplace inverse

Définition

On appelle transformée de Laplace inverse ou original de F(p) la fonction $f(x)$.

Notation : $f(x) = \mathscr{L}^{-1}[F(p)]$.

Exercice

En utilisant le dictionnaire d'images, déterminer les originaux de : $\frac{1}{p^2}, \frac{p}{p^2+9}, \frac{e^{-a.p}}{p}$.

Réponses

$\mathscr{L}^{-1}(\frac{1}{p^2}) = x$, $\mathscr{L}^{-1}(\frac{p}{p^2+9}) = \cos(3x)$, $\mathscr{L}^{-1}(\frac{e^{-a.p}}{p}) = U(x-a)$ (U désignant la fonction échelon unité).

Propriétés de la transformée de Laplace et de la transformée inverse

N°	$f(x) \underset{\mathscr{L}^{-1}}{\overset{\mathscr{L}}{\rightleftarrows}}$	F(p)
1	$\lambda f + \mu g$	$\lambda F(p) + \mu G(p)$
2	$f(a.x)$	$\frac{1}{a}F(\frac{p}{a})$
3	$f(x-a)$	$e^{-p.a} F(p)$
4	$e^{-ax} f(x)$	$F(p+a)$
5	$f'(x)$	$pF(p) - f(0^+)$
6	$-x f(x)$	$F'(p)$
7	$\int_0^x f(t)dt$	$\frac{F(p)}{p}$
8	$\frac{f(x)}{x}$	$\int_0^{+\infty} F(u)du$

Exercices

En utilisant le dictionnaire d'images et les propriétés citées ci-dessus, déterminer les originaux de F(p) dans chacun des cas suivants.

1. $\mathrm{F}(p) = \dfrac{p}{p^2+1} + \dfrac{1}{(p-2)^2} - \dfrac{1}{p-4}$

   Réponse : $f(x) = \cos(x) + x.\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{4x}$.

2. $\mathrm{F}(p) = \dfrac{1}{(p+3)^2}$

   Réponse : $f(x) = x.\mathrm{e}^{-3x}$.

3. $\mathrm{F}(p) = \dfrac{6}{p^2-9}$

   On commence par décomposer la fraction : $\operatorname{expand}\left(\dfrac{6}{p^2-9}\right) \quad \dfrac{1}{p-3}-\dfrac{1}{p+3}$

   Réponse : $f(x) = \mathrm{e}^{3x} - \mathrm{e}^{-3x}$.

4. $\mathrm{F}(p) = \dfrac{p}{p^2-16}$

   On décompose la fraction : $\operatorname{expand}\left(\dfrac{p}{p^2-16}\right) \quad \dfrac{1}{2\cdot(p+4)}+\dfrac{1}{2\cdot(p-4)}$

   Réponse : $f(x) = \dfrac{1}{2}e^{-4x} + \dfrac{1}{2}e^{4x}$.

5. $\mathrm{F}(p) = \dfrac{1}{p^2+8p+25}$

   L'utilisation de la fonction *Complétez le carré* du menu *Algèbre* permet une modification de l'écriture de la fraction :

   $\operatorname{completeSquare}(p^2+8\cdot p+25,p) \quad (p+4)^2+9$

   On a : $\dfrac{1}{p^2+8p+25} = \dfrac{1}{(p+4)^2+9}$ et $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{p^2+9}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{3}\dfrac{3}{(p^2+3^2)}\right) = \dfrac{1}{3}\sin(3x)$

   Réponse : $f(x) = \dfrac{1}{3}\sin(3x).e^{-4x}$.

6. $\mathrm{F}(p) = \dfrac{2}{(p-1)^2(p^2+1)}$

   On décompose la fraction : $\operatorname{expand}\left(\dfrac{2}{(p-1)^2\cdot(p^2+1)}\right)$

   $\dfrac{p}{p^2+1}-\dfrac{1}{p-1}+\dfrac{1}{(p-1)^2}$

   Réponse : $f(x) = \cos(x) - \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x$.

7. Application de la transformée de Laplace à la résolution d'équations différentielles linéaires

a. La méthode

On notera $\mathscr{L}(y(x)) = \mathrm{Y}(p)$ la transformée de y.	On considère l'équation différentielle linéaire du premier ordre : $y' - y = 1$ et $y(0) = 1$
On applique la transformée de Laplace aux deux membres de l'équation différentielle.	$\mathscr{L}(y' - y) = \mathscr{L}(1)$ soit $\mathscr{L}(y') - \mathscr{L}(y) = \mathscr{L}(1)$ $p\mathrm{Y}(p) - y(0) - \mathrm{Y}(p) = \dfrac{1}{p}$
On isole $\mathrm{Y}(p)$.	$\mathrm{Y}(p) = \dfrac{1}{p(p-1)} + \dfrac{1}{p-1}$
On transforme l'écriture du second membre en décomposant la fraction rationnelle en éléments simples.	$\mathrm{Y}(p) = \dfrac{1}{p-1} - \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p-1} = \dfrac{2}{p-1} - \dfrac{1}{p}$
On applique alors la transformée de Laplace inverse.	$\mathscr{L}^{-1}(\mathrm{Y}(p)) = \mathscr{L}^{-1}(\dfrac{2}{p-1} - \dfrac{1}{p})$ $y(x) = 2\,\mathscr{L}^{-1}(\dfrac{1}{p-1}) - \mathscr{L}^{-1}(\dfrac{1}{p})$
On obtient alors la solution de l'équation différentielle.	$y = 2.\mathrm{e}^{x} - 1$

b. Exercices

En utilisant la transformée de Laplace et la transformée inverse, résoudre les équations différentielles suivantes.

$$(\mathrm{E}_1)\quad y' - y = x.\mathrm{e}^{x} \text{ et } y(0) = 1$$

Transformée	$p\mathrm{Y}(p) - y(0) - \mathrm{Y}(p) = \dfrac{1}{(p-1)^2}$
Calcul de $\mathrm{Y}(p)$	$\mathrm{Y}(p) = \dfrac{1}{(p-1)^3} + \dfrac{1}{p-1} = \dfrac{1}{2}\dfrac{2}{(p-1)^3} + \dfrac{1}{p-1}$
Solution	$y = \dfrac{1}{2}x^2e^x + e^x$

(E$_2$) $y' + y = x^2 - 4x + 3$ et $y(0) = 0$

Transformée	$pY(p) - y(0) + Y(p) = \dfrac{2}{p^3} - \dfrac{4}{p^2} + \dfrac{3}{p}$
Calcul de $Y(p)$	$Y(p) = \dfrac{2}{p^3(p+1)} - \dfrac{4}{p^2(p+1)} + \dfrac{3}{p(p+1)} = \dfrac{-9}{p+1} + \dfrac{9}{p} - \dfrac{6}{p^2} + \dfrac{2}{p^3}$
Solution	$y = -9\,e^{-x} + 9 - 6x + x^2$

(E$_3$) $y'' + 2y' - 3y = e^{-x}$, $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$

Transformée	$p^2Y(p) - p.y(0) - y'(0) + 2(pY(p) - y(0)) - 3Y(p) = \dfrac{1}{(p+1)}$
Calcul de $Y(p)$	$Y(p) = \dfrac{p+2}{(p+1)(p^2+2p-3)} = -\dfrac{1}{8}\dfrac{1}{(p+3)} - \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{p+1} + \dfrac{3}{8}\dfrac{1}{p-1}$
Solution	$y = -\dfrac{1}{8}e^{-3x} - \dfrac{1}{4}e^{-x} + \dfrac{3}{8}e^{x}$

(E$_4$) $y'' - 2y' + y = x.e^{-x}$, $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$

Transformée	$p^2Y(p) - p.y(0) - y'(0) - 2(pY(p) - y(0)) + Y(p) = \dfrac{1}{(p+1)^2}$
Calcul de $Y(p)$	$Y(p) = \dfrac{1}{(p+1)^2(p-1)^2} + \dfrac{p-2}{(p-1)^2} = \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{(p+1)} + \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{(p+1)^2} + \dfrac{3}{4}\dfrac{1}{p-1} - \dfrac{3}{4}\dfrac{1}{(p-1)^2}$
Solution	$y = \dfrac{1}{4}e^{-x} + \dfrac{1}{4}xe^{-x} + \dfrac{3}{4}e^{x} - \dfrac{3}{4}xe^{x}$

Remarque : il sera utile d'utiliser la calculatrice pour obtenir la décomposition en éléments simples des fractions rationnelles en utilisant l'instruction *Développer* du menu *Algèbre*, en particulier dans les exercices 3 et 4.

Exercice 3	Exercice 4
$\text{expand}\left(\dfrac{2}{p^3\cdot(p+1)} - \dfrac{4}{p^2\cdot(p+1)} + \dfrac{3}{p\cdot(p+1)}\right)$ $\dfrac{-9}{p+1} + \dfrac{9}{p} - \dfrac{6}{p^2} + \dfrac{2}{p^3}$	$\text{expand}\left(\dfrac{1}{(p+1)^2\cdot(p-1)^2} + \dfrac{p-2}{(p-1)^2}\right)$ $\dfrac{1}{4\cdot(p+1)} + \dfrac{1}{4\cdot(p+1)^2} + \dfrac{3}{4\cdot(p-1)} - \dfrac{3}{4\cdot(p-1)^2}$