SÉRIES DE FOURIER

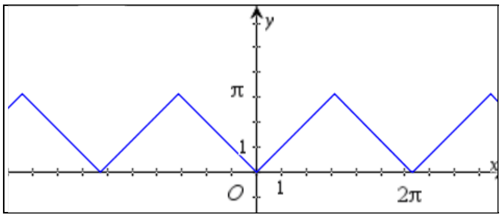
Auteur : Alain Ladureau TI-Nspire™ CAS

1. Objectifs

Découverte de la notion de série de Fourier.
Mise en place des formules et utilisation de celles-ci sur des exemples.

2. Étude d'un exemple

On considère le signal périodique de période 2π suivant.



L'objectif de cette partie est d'approcher ce signal par différents signaux périodiques et de vérifier la qualité de l'approximation réalisée.

Signal 1 : Soit g la fonction définie pour tout réel x par $g(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}.\cos(x)$.

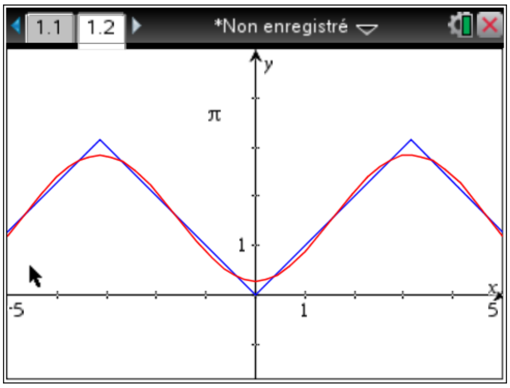
Saisir sur la calculatrice les fonctions f et g comme indiqué dans l'écran ci-dessous.

$$f\_(x) := \begin{cases} x, & 0 \le x < \pi \\ -x, & -\pi \le x < 0 \end{cases} \quad \textit{Terminé}$$

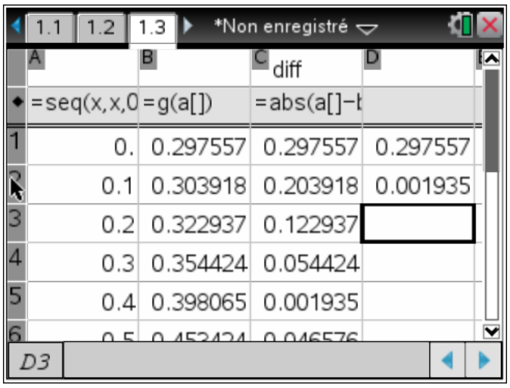
$$f(x) := f\_\left(x - 2\cdot\pi\cdot\mathrm{int}\left(\frac{x+\pi}{2\cdot\pi}\right)\right) \quad \textit{Terminé}$$

$$g(x) := \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\cdot\cos(x) \quad \textit{Terminé}$$

L'écriture $f\_$ s'obtient par f [ctrl] [␣].
Afficher ensuite les graphiques de f et g dans la même fenêtre.



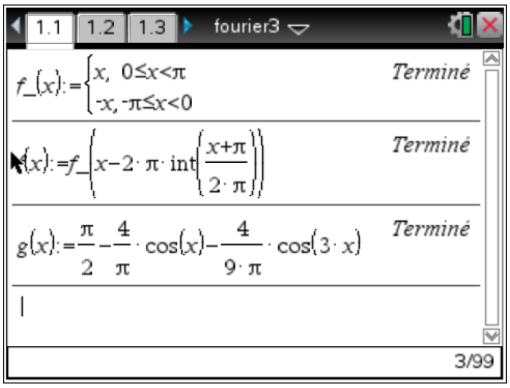
Afin de mesurer l'écart entre $f(x)$ et $g(x)$ sur [0 ; π[on ouvre une page de tableur et on renseigne les colonnes comme suit :
colonne [a], =*seq*(*x*,*x*,0.,1.5,0.1)
colonne [b], =*g*(*a*)
colonne [c], =abs(a-b)
on nomme *diff* la colonne [c]
cellule d1= max(*diff*)
cellule d2 = min(*diff*)
On peut alors, en se déplaçant dans le tableur, mesurer la qualité de l'approximation réalisée.

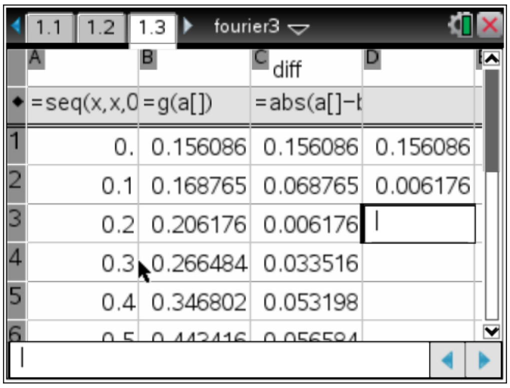


	A	B	C diff	D
◆	=seq(x,x,0	=g(a[])	=abs(a[]−b	
1	0.	0.297557	0.297557	0.297557
2	0.1	0.303918	0.203918	0.001935
3	0.2	0.322937	0.122937	
4	0.3	0.354424	0.054424	
5	0.4	0.398065	0.001935	
6	0.5	0.453424	0.046576	

Signal 2 : $h(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}.\cos(x) - \frac{4}{9\pi}\cos(3x)$.

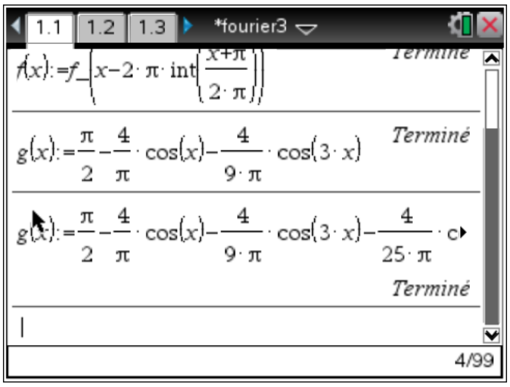
Reprendre le travail effectué avec ce nouveau signal comme fait précédemment avec le signal 1.
On affichera les graphiques puis la page tableur après avoir simplement remplacé la définition de *g* par celle de *h* dans la page de calcul sans modifier les pages de graphique et du tableur qui vont ainsi s'actualiser.

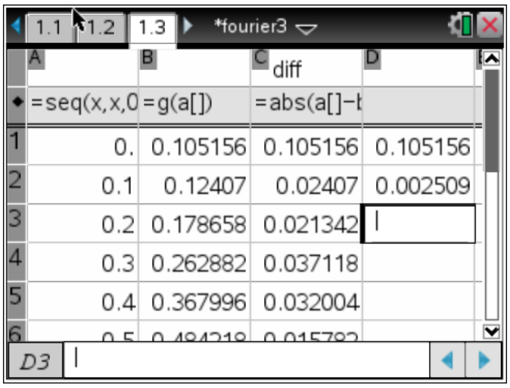




Signal 3 : $i(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}.\cos(x) - \frac{4}{9\pi}\cos(3x) - \frac{4}{25\pi}\cos(5x)$.

Reprendre le travail avec ce nouveau signal.





Bilan : On approche *f* de mieux en mieux avec les différents signaux.

Il est possible de poursuivre ce travail **indéfiniment** et d'ajouter à chaque fois un nouveau terme de la forme $a_n.\cos(nx)$ avec *n* nombre entier impair ici.

La somme partielle $a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_n \cos(n.x)$ tend vers $f(x)$ lorsque *n* tend vers l'infini.

3. Développement en série de Fourier. Formules générales.

Il est possible, en s'aidant de Ti-Nspire, de justifier les formules données ci-après.

Dans ce qui suit, f désigne une fonction périodique de période T, continue par morceaux.

On admet qu'il existe deux suites de nombres réels $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ telles que la série de terme général $a_n.\cos(n.x) + b_n.\sin(n.x)$ converge et a pour somme $f(x)$.

On démontre et nous admettrons ici les formules suivantes qui permettent de calculer les coefficients a_n et b_n.

$$a_0=\frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x \qquad a_n=\frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(x).\cos(n\omega x)\mathrm{d}x \qquad b_n=\frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(x).\sin(n\omega x)\mathrm{d}x$$

$\omega=\dfrac{2\pi}{T}$, n entier, $n\geq 1$, a réel quelconque.

On a alors $f(x) = a_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos(n\omega x)+b_n\sin(n\omega x))$ qui est le développement en série de Fourier de f.

4. Exercices

Exercice 1

Reprenons l'exemple étudié dans le **1**, avec un signal en dents de scie continu.

Question 1 : En utilisant les formules ci-dessus et la calculatrice, calculer les 5 premiers coefficients de Fourier de f. (f étant une fonction paire, il peut être intéressant d'adapter les formules).

Calcul de a_0 :

$a_0=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x).\mathrm{d}x$. f étant une fonction paire on peut écrire, $a_0=2.\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} x.\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{2}$.

Calcul de a_n :

$a_n=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x).\cos(n.\omega x)\mathrm{d}x$. Le produit de deux fonctions paires est une fonction paire, on peut écrire :

$a_n=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} x.\cos(n.x)\mathrm{d}x$

Le résultat donné par la calculatrice est le suivant :

$$\int_0^{\pi}(x\cdot\cos(n\cdot x))\mathrm{d}x$$

$$\frac{\cos(n\cdot\pi)}{n^2}+\frac{\sin(n\cdot\pi)\cdot\pi}{n}-\frac{1}{n^2}$$

En discutant suivant la parité de l'entier n, il vient :

Si n est pair : $a_n = 0$,

si n est impair : $a_n=\dfrac{-4}{\pi.n^2}$.

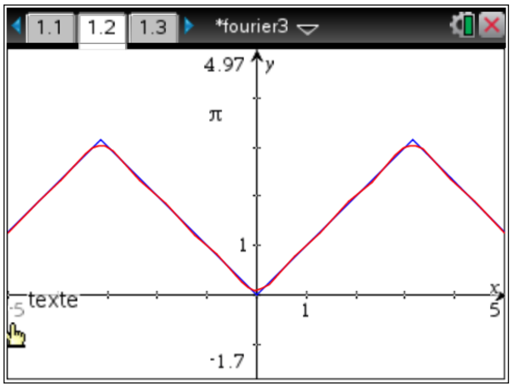
Calcul de b_n :

$b_n=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x).\sin(n.\omega x)\mathrm{d}x$. Le produit d'une fonction paire et d'une fonction impaire est une fonction impaire. La fonction étant périodique, son intégrale, sur une période, est nulle, on a donc pour tout n : $b_n = 0$.

Au final, $a_0=\dfrac{\pi}{2}$, $a_1=\dfrac{-4}{\pi}$, $a_2=0$, $a_3=\dfrac{-4}{9\pi}$, $a_4 = 0$, $a_5=\dfrac{-4}{25\pi}$ et $b_n = 0$.

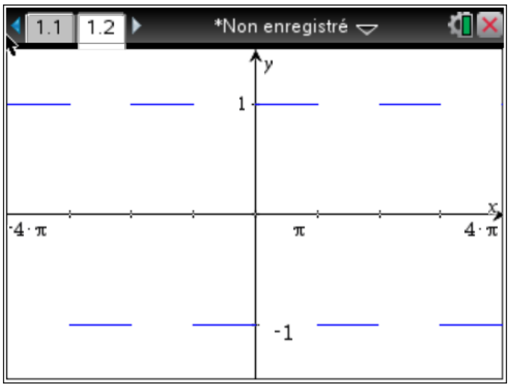
Question 2 : Déduire de ce qui précède la somme partielle d'ordre 5 de la série de Fourier de *f* et construire sa représentation graphique dans le même repère que celle de *f*.

$$S_5(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}.\cos x - \frac{4}{9\pi}\cos(3x) - \frac{4}{25\pi}\cos(5x).$$



Exercice 2

On considère le signal en créneau périodique de période 2π dont la représentation graphique figure dans l'écran ci-contre.



Question 1 : En observant le graphique, donner une expression de *f*(*x*) sur une période.

On a $f(x) = 1$ si x appartient à $[0 ; \pi[$ et $f(x) = -1$ si x appartient à $[-\pi ; 0[$.

Question 2 : Par lecture graphique, donner la valeur du coefficient $a_0 = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Le coefficient a_0 représente la valeur moyenne de *f* sur une période, or *f* est ici une fonction impaire, sa valeur moyenne sur une période est nulle, donc $a_0 = 0$.

Question 3 : Calculer à la main en fonction de *n* les intégrales : $\int_0^{\pi} f(x).\cos(n.x)\mathrm{d}x$ et $\int_0^{\pi} f(x).\sin(n.x)\mathrm{d}x$.

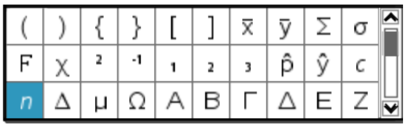
On distinguera les deux cas *n* pair ($n = 2p$) et *n* impair ($n = 2p + 1$).

$$\int_0^{\pi} f(x).\cos(n.x)\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \cos(n.x)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{n}\sin(n.x)\right]_0^{\pi} = 0$$

$\int_0^{\pi} f(x).\sin(n.x)\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \sin(n.x)\mathrm{d}x = \left[\frac{-1}{n}\cos(n.x)\right]_0^{\pi} = \frac{-1}{n}\cos(n.\pi) + \frac{1}{n}$, si *n* est pair, cette intégrale vaut 0 et si *n* est impair, elle vaut $\frac{2}{n}$.

Vérifier vos résultats en utilisant TI-Nspire.

Afin de faire comprendre à la calculatrice que n désigne un entier, il faut utiliser des variables réservées à cet effet, il s'agit des variables $\boldsymbol{n1}$, $\boldsymbol{n2}$, $\boldsymbol{n3}$, …accessibles par ctrl 📖, puis à l'aide des flèches, descendre jusqu'à n comme indiqué sur ci-contre.



$$\int_0^{\pi} \cos(n \cdot x)\, dx \qquad \frac{\sin(n\cdot\pi)}{n}$$

$$\int_0^{\pi} \cos(\boldsymbol{n1} \cdot x)\, dx \qquad 0$$

$$\int_0^{\pi} \sin(n \cdot x)\, dx \qquad \frac{1}{n}-\frac{\cos(n\cdot\pi)}{n}$$

$$\int_0^{\pi} \sin(2\cdot \boldsymbol{n2} \cdot x)\, dx \qquad 0$$

$$\int_0^{\pi} \sin((2\cdot \boldsymbol{n3}+1) \cdot x)\, dx \qquad \frac{2}{2\cdot \boldsymbol{n3}+1}$$

Question 4 : En utilisant les résultats précédents, donner les coefficients a_n et b_n pour n allant de 0 à 7.

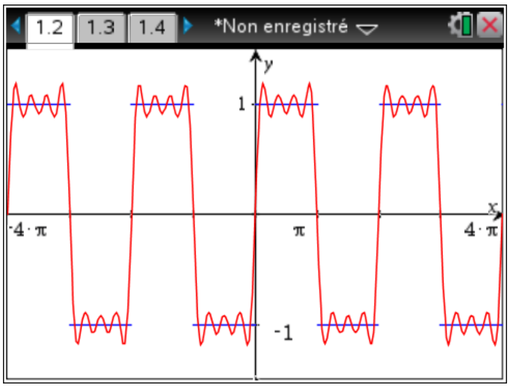
On a $b_n = \dfrac{2}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x).\sin(n.\omega x)dx = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \sin(n.\omega x)dx = \dfrac{4}{n.\pi}$ lorsque n est impair et $b_n = 0$ lorsque n est pair.

Les coefficients a_n sont nuls.

Au final : $b_1 = \dfrac{4}{\pi}, b_3 = \dfrac{4}{3\pi}, b_5 = \dfrac{4}{5\pi}, b_7 = \dfrac{4}{7\pi}$.

Question 5 : Déduire de ce qui précède la somme partielle d'ordre 7 de la série de Fourier de f et construire sa représentation graphique dans le même repère que celle de f.

$S_7(x) = \dfrac{4}{\pi}\sin x + \dfrac{4}{3\pi}\sin(3x) + \dfrac{4}{5\pi}\sin(5x) + \dfrac{4}{7\pi}\sin(7x)$



Voici le graphique obtenu en utilisant le développement de Fourier à l'ordre 21 de f.