# ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE (EXERCICES)

**TI-Nspire™ CAS**

## Objectifs

- Résoudre à la main et à l'aide de la calculatrice les équations différentielles linéaires du premier ordre en conformité avec le nouveau programme.
- Utiliser la calculatrice pour conjecturer la réponse à certaines questions ou pour vérifier les résultats.
- Utiliser les outils de calcul formel de TI-Nspire avec les équations différentielles.

## Exercice1

On considère l'équation différentielle linéaire du premier ordre (E) : $y' - y = 2x^2 - 3x + 1$

**1.** Déterminer la solution générale de l'équation sans second membre ($E_0$) : $y' - y = 0$

**2.** Parmi les 3 fonctions suivantes figure une solution particulière de (E).

| 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|
| $f_1(x) = 2x^2 - 3x + 1$ | $f_2(x) = 2x^2 - x - 2$ | $f_3(x) = -2x^2 - x - 2$ |

Trouver laquelle de ces fonctions est solution de (E) en détaillant la méthode utilisée et les calculs.

**3.** Donner la solution générale de l'équation (E) (on notera $C$ la constante réelle intervenant dans la solution générale). Vérifier le résultat à l'aide de la fonction ***deSolve*** de TI-Nspire.

**4.** On donne ci-dessous 4 valeurs de la constante $C$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $C = 1$ | $C = 0$ | $C = 3$ | $C = 2$ |

Une seule de ces constantes correspond à une fonction solution de (E) dont la courbe représentative admet en son point d'abscisse 0 une tangente parallèle à la droite d'équation $y = 2x$.
En utilisant la calculatrice, faire apparaître les graphiques correspondants aux quatre valeurs de $C$, ainsi que la tangente au point d'abscisse 0 pour chacune d'elles.
Quelle semble être la valeur de $C$ qui répond à la question ?

**5.** Donner une méthode qui permet, à la main, de déterminer la valeur de $C$.

**Réponses**

Question **1** : on trouve $y = C.\,e^x$ où $C$ désigne une constante réelle.

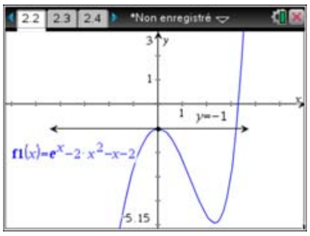
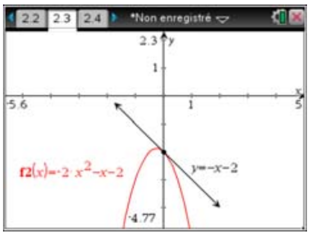
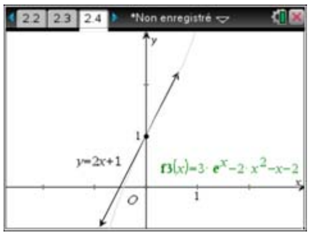
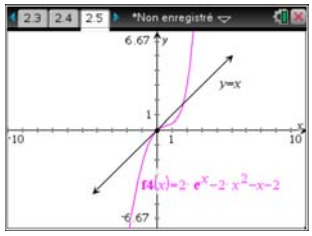
Question **2** : on calcule la dérivée de chacune des fonctions proposées et on remplace dans l'équation différentielle.
Les résultats sont résumés dans le tableau ci-dessous.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $2x^2 - 3x + 1$ | $2x^2 - x - 2$ | $-2x^2 - x - 2$ |
| $f'(x)$ | $4x - 3$ | $4x - 1$ | $-4x - 1$ |
| $f'(x) - f(x)$ | $-2x^2 + 7x - 4$ | $-2x^2 + 5x + 1$ | $2x^2 - 3x + 1$ |

On peut donc en conclure que c'est la fonction $f_3$ qui est solution particulière de (E).

Question **3** : la solution générale de (E) est donc : $y = C.\,e^x - 2x^2 - x - 2$, où $C$ désigne une constante réelle.

Question **4** : on saisit l'expression de la solution particulière dans une page graphique différente pour chacune des constantes et on demande l'affichage de la tangente au point d'abscisse 0 et de son équation cartésienne dans chaque cas.

| | | | |
|---|---|---|---|
|  |  |  |  |
| $C = 1$ | $C = 0$ | $C = 3$ | $C = 2$ |

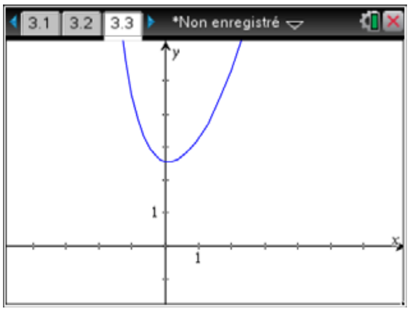
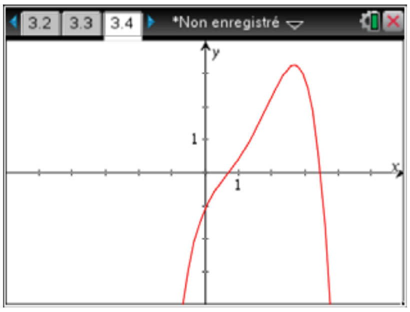
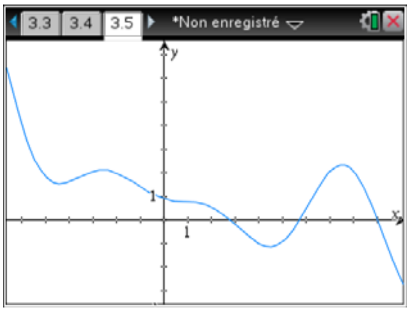
Réponse : $C = 3$.

Question **5** : la condition $y'(0) = 2$ permet de déterminer à la main la valeur de $C$.
$y = C.\, e^x - 2x^2 - x - 2$ conduit à $y' = C.\, e^x - 4x - 1$. On en tire l'égalité $2 = C.\, e^0 - 1$, d'où $C = 3$.

## Exercice 2

L'objectif principal de cet exercice est de familiariser les étudiants à l'utilisation du calcul formel avec TI-Nspire en se plaçant dans le cadre de la résolution des équations différentielles.
Les copies d'écrans qui suivent sont issues de la version PC du logiciel TI-Nspire afin de faciliter la lecture des réponses.

Dans le tableau ci-dessous figurent trois représentations graphiques. Chacune d'elles est la représentation graphique d'une solution particulière d'une des trois équations différentielles citées sous le tableau, mais l'ordre n'a pas été respecté.
L'objectif de cet exercice est de redonner à chaque représentation graphique l'équation différentielle qui lui est associée.

| | | |
|---|---|---|
|  |  |  |
| $f(0) = \frac{23}{9}$, $f'(0) = -\frac{2}{9}$ | $g(0) = -\frac{11}{10}$, $g'(0) = \frac{11}{5}$ | $h(0) = \frac{68}{75}$, $h'(0) = -\frac{68}{225}$ |

Équation $E_1$ :
$3y' + y = x.\cos(x)$

Équation $E_2$ :
$2y' - y = (2x - 3).e^{-x}$

Équation $E_3$ :
$y' + 2y = e^x.\sin(x)$

**1.** En utilisant la fonction ***deSolve*** de Ti-Nspire, donner la solution générale de l'équation $E_1$.

**2.** En utilisant les informations figurant sous chacun des graphiques et la calculatrice, trouver la solution particulière issue de l'équation $E_1$.

**3.** Reprendre de même avec les équations $E_2$ et $E_3$.

**Réponses**

On résout l'équation E1 en utilisant la fonction deSolve de TI-Nspire.

$$\text{deSolve}(3\cdot y'+y=x\cdot\cos(x),x,y) \qquad y=\frac{e^{\frac{-x}{3}}\cdot\left(\left((5\cdot x+12)\cdot\cos(x)+3\cdot(5\cdot x-3)\cdot\sin(x)\right)\cdot e^{\frac{x}{3}}+50\cdot \boldsymbol{c1}\right)}{50}$$

On simplifie l'écriture du résultat en utilisant la fonction *Développer* du menu *Algègre*.

$$\text{expand}\left(y=\frac{e^{\frac{-x}{3}}\cdot\left(\left((5\cdot x+12)\cdot\cos(x)+3\cdot(5\cdot x-3)\cdot\sin(x)\right)\cdot e^{\frac{x}{3}}+50\cdot \boldsymbol{c1}\right)}{50}\right)$$

$$y=\frac{x\cdot\cos(x)}{10}+\frac{6\cdot\cos(x)}{25}+\frac{3\cdot x\cdot\sin(x)}{10}-\frac{9\cdot\sin(x)}{50}+\frac{\boldsymbol{c1}}{\left(e^{x}\right)^{\frac{1}{3}}}$$

On fait maintenant l'hypothèse que l'équation $E_1$ correspond au premier graphique, c'est-à-dire que la fonction *f* est la solution particulière de $E_1$ qui vérifie les conditions : $f(0)=\frac{23}{9}$, $f'(0)=-\frac{2}{9}$.

On cherche donc la valeur de la constante *c*1 qui permet l'égalité $f(0)=\frac{23}{9}$ en utilisant la fonction *Résoudre* du menu *Algèbre.*

$$\text{solve}\left(\frac{23}{9}=\frac{x\cdot\cos(x)}{10}+\frac{6\cdot\cos(x)}{25}+\frac{3\cdot x\cdot\sin(x)}{10}-\frac{9\cdot\sin(x)}{50}+\frac{\boldsymbol{c1}}{\left(e^{x}\right)^{\frac{1}{3}}},\boldsymbol{c1}\right)|x=0 \qquad \boldsymbol{c1}=\frac{521}{225}$$

On remplace c1 par sa valeur dans l'expression de la solution générale afin d'obtenir la solution particulière *f*.

$$\frac{x\cdot\cos(x)}{10}+\frac{6\cdot\cos(x)}{25}+\frac{3\cdot x\cdot\sin(x)}{10}-\frac{9\cdot\sin(x)}{50}+\frac{\boldsymbol{c1}}{\left(e^{x}\right)^{\frac{1}{3}}}|\boldsymbol{c1}=\frac{521}{225}$$

$$\frac{521\cdot e^{\frac{-x}{3}}}{225}+\left(\frac{x}{10}+\frac{6}{25}\right)\cdot\cos(x)+\left(\frac{3\cdot x}{10}-\frac{9}{50}\right)\cdot\sin(x)$$

$$\frac{521\cdot e^{\frac{-x}{3}}}{225}+\left(\frac{x}{10}+\frac{6}{25}\right)\cdot\cos(x)+\left(\frac{3\cdot x}{10}-\frac{9}{50}\right)\cdot\sin(x)\to f(x) \qquad \textit{Terminé}$$

On calcule alors la valeur de la dérivée de *f* en 0 afin de s'assurer de la validité de notre hypothèse.

$$\frac{d}{dx}(f(x))|x=0 \qquad \frac{-23}{27}$$

La réponse attendue était $f'(0)=-\frac{2}{9}$, notre hypothèse est fausse et l'équation $E_1$ n'est pas associée à la fonction *f*.

On reprend alors la méthode précédente en faisant l'hypothèse que $E_1$ est associée à la fonction *g*.

Les calculs repris à partir de la résolution de l'équation d'inconnue c1, $g(0) = -\dfrac{11}{10}$ figurent dans les copies d'écrans ci-dessous,

$$\text{solve}\left(\frac{-11}{10}=\frac{x\cdot\cos(x)}{10}+\frac{6\cdot\cos(x)}{25}+\frac{3\cdot x\cdot\sin(x)}{10}-\frac{9\cdot\sin(x)}{50}+\frac{c1}{\left(e^{x}\right)^{\frac{1}{3}}},c1\right)\Big|x=0 \qquad c1=\frac{-67}{50}$$

$$\frac{x\cdot\cos(x)}{10}+\frac{6\cdot\cos(x)}{25}+\frac{3\cdot x\cdot\sin(x)}{10}-\frac{9\cdot\sin(x)}{50}+\frac{c1}{\left(e^{x}\right)^{\frac{1}{3}}}\Big|c1=\frac{-67}{50}$$

$$\frac{-67\cdot e^{\frac{-x}{3}}}{50}+\left(\frac{x}{10}+\frac{6}{25}\right)\cdot\cos(x)+\left(\frac{3\cdot x}{10}-\frac{9}{50}\right)\cdot\sin(x)$$

$$\frac{-67\cdot e^{\frac{-x}{3}}}{50}+\left(\frac{x}{10}+\frac{6}{25}\right)\cdot\cos(x)+\left(\frac{3\cdot x}{10}-\frac{9}{50}\right)\cdot\sin(x)\rightarrow g(x) \qquad \textit{Terminé}$$

$$\frac{d}{dx}\left(g(x)\right)\Big|x=0 \qquad \frac{11}{30}$$

Le résultat attendu est $g\,'(0) = \dfrac{11}{5}$, la fonction *g* n'est pas solution particulière de $E_1$.

La seule réponse possible est donc la fonction *h* comme le confirment les calculs suivants.

$$\text{solve}\left(\frac{68}{75}=\frac{x\cdot\cos(x)}{10}+\frac{6\cdot\cos(x)}{25}+\frac{3\cdot x\cdot\sin(x)}{10}-\frac{9\cdot\sin(x)}{50}+\frac{c1}{\left(e^{x}\right)^{\frac{1}{3}}},c1\right)\Big|x=0 \qquad c1=\frac{2}{3}$$

$$\frac{x\cdot\cos(x)}{10}+\frac{6\cdot\cos(x)}{25}+\frac{3\cdot x\cdot\sin(x)}{10}-\frac{9\cdot\sin(x)}{50}+\frac{c1}{\left(e^{x}\right)^{\frac{1}{3}}}\Big|c1=\frac{2}{3}$$

$$\frac{2\cdot e^{\frac{-x}{3}}}{3}+\left(\frac{x}{10}+\frac{6}{25}\right)\cdot\cos(x)+\left(\frac{3\cdot x}{10}-\frac{9}{50}\right)\cdot\sin(x)$$

$$\frac{2\cdot e^{\frac{-x}{3}}}{3}+\left(\frac{x}{10}+\frac{6}{25}\right)\cdot\cos(x)+\left(\frac{3\cdot x}{10}-\frac{9}{50}\right)\cdot\sin(x)\rightarrow h(x) \qquad \textit{Terminé}$$

$$\frac{d}{dx}\left(h(x)\right)\Big|x=0 \qquad \frac{-68}{225}$$

On procède de même avec l'équation $E_2$ qui a pour solution particulière la fonction *f* ou la fonction *g*.

| | |
|---|---|
| $\frac{-149\cdot e^{\frac{x}{2}}}{90}-\frac{(6\cdot x-5)\cdot e^{-x}}{9}\to g(x)$ | *Terminé* |
| $\frac{d}{dx}(g(x))\|x=0$ | $\frac{-41}{20}$ |
| $\text{solve}\left(\frac{23}{9}=c1\cdot e^{\frac{x}{2}}-\frac{(6\cdot x-5)\cdot e^{-x}}{9},c1\right)\|x=0$ | $c1=2$ |
| $c1\cdot e^{\frac{x}{2}}-\frac{(6\cdot x-5)\cdot e^{-x}}{9}\|c1=2$ | $2\cdot e^{\frac{x}{2}}-\frac{(6\cdot x-5)\cdot e^{-x}}{9}$ |
| $2\cdot e^{\frac{x}{2}}-\frac{(6\cdot x-5)\cdot e^{-x}}{9}\to f(x)$ | *Terminé* |
| $\frac{d}{dx}(f(x))\|x=0$ | $\frac{-2}{9}$ |

La fonction *f* est donc la solution particulière de l'équation $E_2$.
La dernière vérification permet de confirmer que la fonction *g* est solution de l'équation $E_3$.

| | |
|---|---|
| $\text{deSolve}(y'+2\cdot y=e^{x}\cdot \sin(x),x,y)$ | $y=\frac{-e^{-2\cdot x}\cdot(\cos(x)\cdot e^{3\cdot x}-3\cdot \sin(x)\cdot e^{3\cdot x}-10\cdot c1)}{10}$ |
| $\text{expand}\left(\frac{-e^{-2\cdot x}\cdot(\cos(x)\cdot e^{3\cdot x}-3\cdot \sin(x)\cdot e^{3\cdot x}-10\cdot c1)}{10}\right)$ | $\frac{-e^{x}\cdot \cos(x)}{10}+\frac{3\cdot e^{x}\cdot \sin(x)}{10}+\frac{c1}{(e^{x})^2}$ |
| $\text{solve}\left(\frac{-11}{10}=\frac{-e^{x}\cdot \cos(x)}{10}+\frac{3\cdot e^{x}\cdot \sin(x)}{10}+\frac{c1}{(e^{x})^2},c1\right)\|x=$ ▸ | $c1=-1$ |
| $\frac{-e^{x}\cdot \cos(x)}{10}+\frac{3\cdot e^{x}\cdot \sin(x)}{10}+\frac{c1}{(e^{x})^2}\|c1=-1$ | $-e^{-2\cdot x}-\frac{e^{x}\cdot \cos(x)}{10}+\frac{3\cdot e^{x}\cdot \sin(x)}{10}$ |
| $-e^{-2\cdot x}-\frac{e^{x}\cdot \cos(x)}{10}+\frac{3\cdot e^{x}\cdot \sin(x)}{10}\to g(x)$ | *Terminé* |
| $\frac{d}{dx}(g(x))\|x=0$ | $\frac{11}{5}$ |

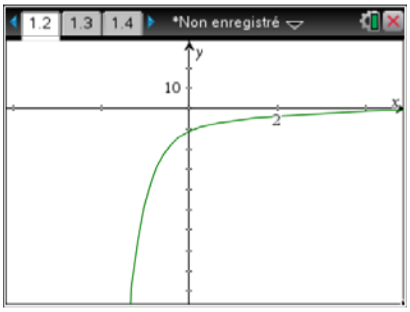
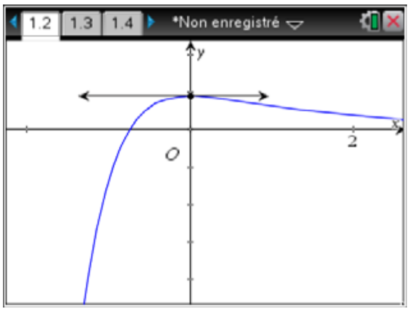
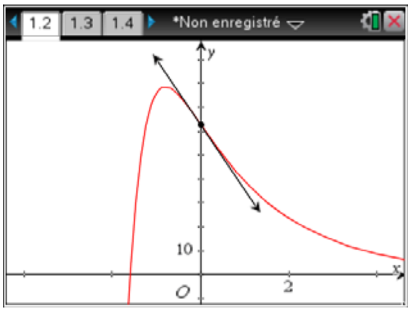
## Exercice 3

On donne l'équation différentielle suivante (E) : $2y' + y = (-9x + 9).e^{-2x}$

**1.** Déterminer à la main une solution particulière $f$ de (E) sous la forme d'une fonction définie par $f(x) = (a.x + b).\ e^{-2x}$ où $a$ et $b$ désignent des nombres réels que l'on calculera.

**2.** Donner la solution générale de (E). (On appellera $C$ la constante réelle qui apparaît dans la solution générale de (E))

**3.** L'objectif de cette question est de déterminer, dans chacun des trois cas, la solution particulière de l'équation différentielle dont la représentation graphique figure ci-dessous.

| | | |
|---|---|---|
|  |  |  |
| $f_1(0) = -11$. | La tangente au point d'abscisse 0 est parallèle à l'axe des abscisses. | La courbe traverse sa tangente au point d'abscisse 0. |

**a.** En utilisant la fonction Taylor de la calculatrice, faire afficher le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la solution générale de (E ) en utilisant la constante $C$.
**b.** Déduire de ce développement limité l'équation de la tangente en fonction de $C$ et discuter suivant les valeurs de $C$ la position relative de la courbe représentative et de sa tangente.
**c.** Déduire de ce qui précède l'expression de la solution particulière de l'équation différentielle associée à chacun des graphiques ci-dessus.

### Réponses

Question **1** : on pose $f(x) = (a.x + b).\ e^{-2x}$, on calcule $f'(x)$ et on remplace dans l'équation (E).
On trouve $f'(x) = (-2a.x + a - 2b).\ e^{-2x}$.
En remplaçant dans (E), on trouve : $(-3a.x + 2a - 3b).\ e^{-2x} = (-9x + 9).e^{-2x}$

On aboutit alors au système d'équations à deux inconnues $\begin{cases} -3a = -9 \\ 2a - 3b = 9 \end{cases}$ qui a pour solution $a = 3$, $b = -1$.

La solution particulière cherchée est donc $y = (3x - 1).\ e^{-2x}$ .

Question **2** : l'équation sans second membre a pour solution générale $y = C.e^{-\frac{1}{2}x}$ .

La solution générale de (E) est donc : $y = C.e^{-\frac{1}{2}x} + (3x - 1).\ e^{-2x}$ où $C$ est une constante réelle.

*Remarque*
une vérification à l'aide de la calculatrice nous donne

$$\text{deSolve}\left(2\cdot y'+y=(-9\cdot x+9)\cdot e^{-2\cdot x},x,y\right)$$
$$y=c1\cdot e^{\frac{-x}{2}}+(3\cdot x-1)\cdot e^{-2\cdot x}$$

Question **3a** :
La fonction ***Taylor*** permet d'afficher directement le développement limité à l'ordre 3 en 0.

$$\text{taylor}\left(c1\cdot e^{\frac{-x}{2}}+(3\cdot x-1)\cdot e^{-2\cdot x},x,3,0\right)$$
$$c1-1+\left(5-\frac{c1}{2}\right)\cdot x+\left(\frac{c1}{8}-8\right)\cdot x^2+\left(\frac{22}{3}-\frac{c1}{48}\right)\cdot x^3$$

Question **3b** :

Une équation de la tangente est donc : $y=(5-\frac{C}{2})x+C-1$

La position relative de la courbe et de sa tangente dépend des termes qui suivent dans le développement limité.

Le signe du coefficient $(\frac{C}{8}-8)x^2$ lorsqu'il est non nul donne cette position, s'il est positif la courbe est située au dessus de sa tangente et située en dessous sinon.

Si ce coefficient est nul, c'est-à-dire pour $C$ = 64, la position dépend du signe de $(\frac{22}{3}-\frac{C}{48})\,x^3=6x^3$.

Les résultats sont résumés dans le tableau ci-dessous

| $C$ | $-\infty$ | 64 $+\infty$ |
|---|---|---|
| Position | La courbe est située sous sa tangente pour $x$ voisin de 0 | La courbe est située au dessus de sa tangente pour $x$ voisin de 0 |

Lorsque $C$ = 64, pour $x < 0$ et $x$ voisin de 0, la courbe est située sous la tangente ; si $x > 0$ et $x$ voisin de 0, la courbe est située au dessus de sa tangente.

Question **3c** :

Dans le premier cas, $f(0)$ est le terme constant du développement limité donc : $C-1=-11$, d'où $C=-10$.

La solution particulière associée au premier graphique est donc $y=-10.\,e^{-\frac{1}{2}x}+(3x-1).\,e^{-2x}$.

Dans le second cas, on a $f'(0)=0$, ce terme est égal à $(5-\frac{C}{2})$ (voir la question **3b**), on en tire $C$ = 10 et la solution particulière associée au graphique 2 est : $y=10.\,e^{-\frac{1}{2}x}+(3x-1).\,e^{-2x}$.

Le cas 3 correspond à $C$ = 64, la solution est $y=64.\,e^{-\frac{1}{2}x}+(3x-1).\,e^{-2x}$.