ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE (COURS)

TI-Nspire™ CAS

1. Objectifs

- Découvrir les équations différentielles du premier ordre.
- Résoudre à la main et à l'aide de la calculatrice les équations différentielles linéaires du premier ordre.

2. Introduction

Exercice 1: on considère l'égalité suivante (E) : $y'(x) = y(x)$ qui est une équation différentielle du premier ordre. On pourra écrire cette équation sous la forme : $y' = y$. (L'inconnue est ici la fonction y)
Question 1 : déterminer une fonction constante y qui vérifie l'équation (E).
Question 2 : déterminer parmi les fonctions connues, une fonction non constante solution de (E).
Question 3 : calculer la dérivée de la fonction $g : x \mapsto e^{-x}.\, y$
Question 4 : vérifier que l'équation (E) est équivalente à : $y'\, e^{-x} – y\, e^{-x} = 0$, ou encore à $(y\, e^{-x})' = 0$.
En déduire que si y est solution de (E), alors la fonction g est constante.
Donner alors toutes les solutions de (E).

Exercice 2 : on considère la fonction f définie pour tout x réel par : $f(x) = 3\, e^{2x} – x^2 + 1$.
Question 1 : trouver deux nombres réels a et b tels que la fonction f soit une solution particulière de l'équation différentielle : $a\, y' + b.\, y = -2x^2 + 2x + 2$.
Question 2 : en remplaçant a et b par les valeurs trouvées dans la question précédente, trouver une fonction polynôme du second degré solution de l'équation différentielle ainsi obtenue.

3. Équations différentielles linéaires du premier ordre

1. Définition

On appelle équation différentielle du premier ordre à coefficients constants toute équation (E) de la forme :

$$\boldsymbol{a \,.\, y' + b \,.\, y = f(x)}$$

où a et b sont des nombres réels ($a \neq 0$), y et f sont des fonctions numériques de variable réelle x.
L'équation : $\boldsymbol{a \,.\, y' + b \,.\, y = 0}$ est l'équation sans second membre associée à l'équation (E).

Remarques : l'inconnue de cette équation est la fonction y.
Une solution particulière de l'équation est une fonction g qui vérifie l'équation.
La solution générale de (E) est formée par l'ensemble de toutes les fonctions solutions de (E).

2. Résolution de l'équation sans second membre : (E_0) : $\boldsymbol{a \,.\, y' + b \,.\, y = 0}$

Question 1 : vérifier que l'on peut écrire (E_0) sous la forme : $y'e^{\frac{b}{a}x} + \frac{b}{a}y.e^{\frac{b}{a}x} = 0$.

Question 2 : calculer la dérivée de la fonction : $x \mapsto y.\,e^{\frac{b}{a}x}$

Question 3 : déduire des questions précédentes que si y vérifie l'équation (E_0), alors on a $y = C.\ e^{-\frac{b}{a}x}$ où C désigne une constante réelle quelconque.

Question 4 : réciproquement, toutes les fonctions : $x \mapsto y = C.\ e^{-\frac{b}{a}x}$ sont-elles solutions de l'équation (E_0) ?

Théorème 1 : L'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E_0) : $a\ .\ y' + b\ .\ y = 0$, est l'ensemble des fonctions de la forme $y = C.\ e^{-\frac{b}{a}x}$ où C est une constante réelle quelconque.

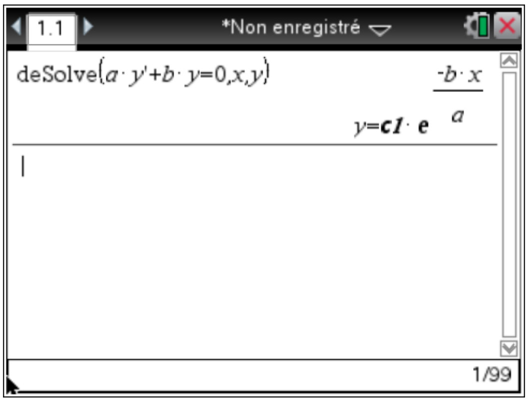
Utilisation de la calculatrice

Ti-Nspire permet la résolution des équations différentielles du premier ordre.

Après avoir ouvert une nouvelle page de calcul, appuyer sur [menu] [4] [D] afin de saisir à l'écran l'instruction *deSolve(*.

Pour la notation de la dérivée de y, utiliser [π▸] et choisir l'apostrophe dans le tableau proposé. 

Remarque : la notation $c1$ désigne une constante réelle. Chaque nouvelle utilisation de l'instruction *deSolve(* créera une nouvelle constante numérotée dans l'ordre d'apparition.



3. Résolution de l'équation complète (E) : $a\ .\ y' + b\ .\ y = f(x)$

Soit y_0 une solution particulière de l'équation (E), on a alors : $a.\ y_0' + b.\ y_0 = f(x)$.

Une fonction y est solution de l'équation (E) si et seulement si $a\ .\ y' + b\ .\ y = f(x)$ ou encore si et seulement si on a : $a.\ y' + b.\ y = a.\ y_0' + b.\ y_0$ soit $a.(y' - y_0') + b.(y - y_0) = 0$.

Cette équation différentielle est une équation différentielle du premier ordre sans second membre, en appliquant le théorème 1 établi ci-dessus, on trouve donc : $y - y_0 = C.\ e^{-\frac{b}{a}x}$, d'où $y = C.\ e^{-\frac{b}{a}x} + y_0$.

Théorème 2 : La solution générale de l'équation différentielle (E) : $a\ .\ y' + b\ .\ y = f(x)$ s'obtient en ajoutant à la solution générale de l'équation sans second membre $a.\ y' + b.\ y = 0$ une solution particulière de (E).

Remarque : la recherche de la solution particulière s'effectue à la main dans les cas simples, en s'aidant le plus souvent des conseils donnés dans l'énoncé. Sinon, on utilisera directement la calculatrice et l'instruction *deSolve(* afin d'obtenir la solution de (E)**.**

4. Représentations graphiques des solutions

Exercice

On considère l'équation différentielle (E) $y' - y = -x + 1$.

Question 1 : chercher à la main une solution particulière de (E) en posant $y = a.x + b$. En utilisant les théorèmes précédents, donner l'ensemble des solutions de (E).
Vérifier alors les résultats trouvés en utilisant la calculatrice et l'instruction *deSolve(*.
Question 2 : en attribuant pour valeurs successives -2, -1, 0, 1 et 2 à la constante qui figure dans l'ensemble des solutions, faire apparaître sur une page graphiques les 5 courbes représentatives des différentes solutions.

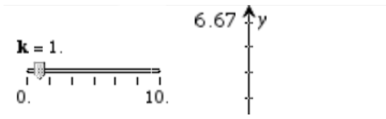
Méthode 1 : on peut, en ouvrant une page *graphiques*, saisir chacune des cinq fonctions successivement dans $f1(x)$, $f2(x)$ …

Méthode 2 : on peut saisir dans une seule fonction les cinq expressions différentes en remplaçant la constante par la liste {-2, -1, 0, 1, 2}.

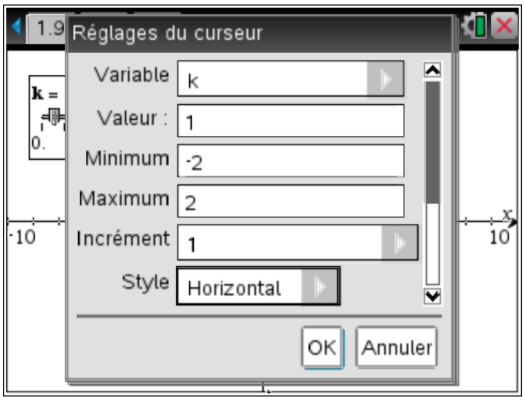
Méthode 3 : on peut créer un curseur et le manipuler pour voir à l'écran défiler chacune des représentations graphiques demandées.

Ouvrir une page graphiques et géométrie, appuyer sur les touches menu 1 B, déplacer le curseur qui s'affiche dans le coin en haut à gauche de l'écran.

Nommer k la variable, mettre sa valeur à 1 par exemple.



Changer les paramètres de réglage du curseur en utilisant les touches ctrl menu comme indiqué dans l'écran ci-contre. Dans *Incrément*, utiliser l'option *Saisie de valeur* et prendre 1, on obtiendra donc un curseur qui passera de -2 à 2 de 1 en 1, comme demandé dans l'énoncé.



5. Existence et unicité de la solution vérifiant une condition $y(\alpha) = \beta$ où α et β sont des nombres réels connus

1. Exercice

On considère l'équation différentielle (E) $y' + y = \frac{1}{2}x^2$.

Question 1 : donner à la main la solution générale de l'équation sans second membre associée.

Question 2 : chercher à la main une solution particulière de (E) sous la forme d'un polynôme du second degré.

Question 3 : en déduire la solution générale de (E). Vérifier alors votre résultat en utilisant la calculatrice.

Question 4 : ouvrir une page graphique et géométrie et construire un curseur de variable m qui varie entre -3 et 3 avec un pas de 0,1. Saisir alors l'expression de la solution générale de (E) trouvée en question précédente dans la barre de saisie de la fonction de votre page graphique et faire varier le curseur afin d'observer la forme du graphique.

Combien semble-t-il y avoir de fonction(s) solution(s) de (E) qui vérifie(nt) la condition $y(-3) = 0$?

En faisant varier le curseur précédent, donner la valeur approchée de m correspondante.

Question 5 : reprendre la question précédente par le calcul et trouver ainsi la valeur exacte de m.

Dans la même page graphique, afficher la représentation graphique de la fonction f solution de (E) qui vérifie la condition $f(-3) = 0$.

Question 6 : vérification de la solution particulière à l'aide de la calculatrice :

Dans une page de *calculs*, saisir l'instruction ci-contre.

$$\text{deSolve}\left(y'+y=\frac{1}{2}\cdot x^2 \text{ and } y(-3)=0, x, y\right)$$

Modifier alors l'expression de la solution donnée par la calculatrice afin de retrouver la forme de la solution trouvée question 4.

2. Cas général

Théorème 3 : Pour toute équation différentielle du premier ordre, il existe une et une seule solution qui vérifie une condition du type $y(\alpha) = \beta$.