ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU SECOND ORDRE (EXOS)

TI-Nspire™ CAS

1. Objectifs

• Résoudre à la main et à l'aide de la calculatrice les équations différentielles linéaires du second ordre.

2. Exercices

Exercice 1 : On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - 2y' + (a - 1).y = 0$, où a désigne un nombre réel quelconque.

1. Déterminer à la main, en détaillant les calculs et la méthode utilisée, la solution générale de cette équation dans chacun des trois cas suivants :

Cas n° 1	Cas n°2	Cas n°3
$a = 2$	$a = 1$	$a = 6$

2. Vérifier chacune des solutions trouvées en utilisant TI-Nspire.

3. Étude du cas général, a désigne un nombre réel quelconque.
Écrire l'équation caractéristique de (E). Résoudre suivant les valeurs de a cette équation caractéristique.

4. En déduire dans chaque cas en fonction de a la solution générale de (E).

Exercice 2 : On considère l'équation différentielle (E_2) : $y'' + y = \sin(x)$.

Question 1 : Déterminer, à la main, la solution générale de l'équation sans second membre : $y'' + y = 0$.

Question 2 : On se propose de rechercher une solution particulière f de (E_2) sous la forme :

$$f(x) = x.(a.\cos(x) + b.\sin(x)) \text{ où } a \text{ et } b \text{ désignent des nombres réels.}$$

Calculer en fonction de x, $f'(x)$ et $f''(x)$. (On pourra utiliser TI-Nspire)

Question 3 : En déduire que si f est solution de (E_2), alors on est conduit à l'égalité :

$$2b.\cos(x) + (2bx - 2a).\sin(x) = \sin(x), \text{ égalité vraie pour tout } x \text{ réel.}$$

Question 4 : En déduire les valeurs de a et b puis la solution générale de l'équation (E_2).

Exercice 3 : On considère l'équation différentielle (E_3) : $y'' - 2y' + y = x.e^x + \cos(x)$.

Question 1 : Déterminer, à la main, la solution générale de l'équation : $y'' - 2y' + y = 0$.

On considère maintenant les équations différentielles (F_1) : $y'' - 2y' + y = x.e^x$ et (F_2) : $y'' - 2y' + y = \cos(x)$.

Question 2 : Déterminer, à la main, une solution particulière f de l'équation (F_1) en posant $f(x) = k.\ x^2.e^x$.

Question 3 : Déterminer, à la main, une solution particulière g de l'équation (F_2) sous la forme :

$$g(x) = a.\cos(x) + b.\sin(x).$$

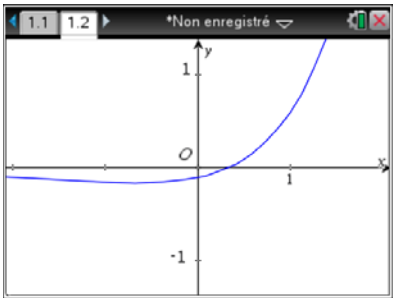
Question 4 : Montrer que la fonction $f + g$ est solution particulière de l'équation (E).
En déduire la solution générale de (E).

Exercice 4 :

Partie 1

On appelle C la courbe représentative d'une fonction f définie pour tout x réel.

Dans l'écran ci-contre figure une partie de la courbe C tracée dans un repère orthonormal.



On considère les fonctions suivantes définies pour tout x réel par :

Fonction1	Fonction 2	Fonction3
$(3x-1).e^x$	$\left(\dfrac{1-3x}{4}\right).e^x$	$\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{1}{9}\right).e^x$

Question : Parmi les trois fonctions ci-dessus, une seule correspond à la fonction f et a pour représentation graphique la courbe C, laquelle ? On justifiera son choix.

Partie 2

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + y' - 2y = e^x$.

Question 1 : Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y'' + y' - 2y = 0$

Question 2 : Vérifier que la fonction f associé à la courbe C de la partie 1 est solution particulière de (E). (On pourra s'aider le la calculatrice)

Question 3 : Déduire de ce qui précède la solution générale de l'équation différentielle (E).

Partie 3

On pose $F(x) = \dfrac{1}{2}\left(f'(x) + f(x) - e^x\right)$ où f désigne la fonction trouvée en partie 1.

Question 1 : En utilisant le fait que f est solution de (E), justifier que F est une primitive de f.

Question 2 : Exprimer $F(x)$ en fonction de x.

Question 3 : Etudier le signe de $f(x)$ pour x variant dans $\left[0\,;\dfrac{1}{3}\right]$.

Question 4 : Calculer en unités d'aire la valeur exacte A de l'aire du domaine plan limité par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \dfrac{1}{3}$.

Exercice 5 :

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - y = 2xe^x$

On se propose de déterminer la solution f de (E) qui vérifie les conditions initiales : $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$.

Question 1 : Justifier en détaillant les calculs faits à la main, le résultat donné par la calculatrice dans l'écran ci-dessous.

$$\text{deSolve}(y''-y=0,x,y) \qquad y=c1\cdot e^{-x}+c2\cdot e^{x}$$

Question 2 : On se propose de déterminer à la main une solution particulière de (E).

$$\text{deSolve}(y''-y=2\cdot x\cdot e^{x},x,y)$$
$$y=c1\cdot e^{-x}+c2\cdot e^{x}+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right)\cdot e^{x}$$

L'observation de l'écran ci-dessus nous conduit à chercher une solution particulière de (E) sous la forme $f(x) = (ax^2 + bx + c).e^x$ où a, b et c sont des nombres réels.

Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
En remplaçant y, y'et y'' dans l'équation (E) respectivement par les expressions de $f(x)$, $f'(x)$ et $f''(x)$, montrer que l'on aboutit au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 4a = 2 \\ 2a + 2b = 0 \\ c \text{ quelconque} \end{cases}$$

Déduire de ce qui précède une solution particulière de (E) et enfin la solution générale de cette équation différentielle.

Question 3 : Recherche de la solution particulière qui vérifie les conditions initiales.
On se propose, comme dans les questions précédentes de justifier le résultat donné par la calculatrice dans l'écran ci-dessous :

$$\text{deSolve}(y''-y=2\cdot x\cdot e^{x} \text{ and } y(0)=1 \text{ and } y'(0)=1,x,y) \qquad y=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}+\frac{5}{4}\right)\cdot e^{x}-\frac{e^{-x}}{4}$$

En utilisant la solution générale de (E) trouvée en question 2 et les conditions initiales imposées : $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$, déterminer à la main la valeur des constantes c_1 et c_2 et enfin la solution particulière demandée.