ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU SECOND ORDRE (COURS)

Auteur : Alain Ladureau **TI-Nspire™ CAS**

1. Objectifs

- Découvrir les équations différentielles du second ordre.
- Résoudre à la main et à l'aide de la calculatrice les équations différentielles linéaires du second ordre.

2. Introduction

Exercice 1 : On considère l'égalité suivante (E_1) : $y''(x) - y(x) = 0$, qui est une équation différentielle du second ordre. On pourra écrire cette équation sous la forme : $y'' - y = 0$. (L'inconnue est ici la fonction y)

Question 1 : Déterminer, parmi les fonctions connues, une fonction f non constante solution de (E_1).
Question 2 : Vérifier que la fonction g définie par $g(x) = e^{-x}$ est une autre solution de (E_1).
Question 3 : Vérifier que toute fonction de la forme $C_1 f(x) + C_2 g(x)$ est solution de (E) (C_1 et C_2 désignent des constantes réelles).

Réponses :
Question 1 : $f(x) = e^x$.
Question 2 : $g(x) = e^{-x}$, $g'(x) = e^{-x}$, $g''(x) = e^{-x}$. On a alors $g''(x) - g(x) = 0$.
Question 3 : $(C_1 f''(x) + C_2 g''(x)) - (C_1 f(x) + C_2 g(x)) = (e^x - e^{-x}) - (e^x - e^{-x}) = 0$.

Exercice 2 : On considère l'équation différentielle (E_2) : $y'' - 5y' + 6y = 0$
Afin de chercher des solutions de (E_2), on pose $y = e^{r.x}$, où r désigne un nombre réel.

Question 1 : Établir que si $y = e^{rx}$ est solution de (E_2), alors on a : $r^2 - 5r + 6 = 0$.
Question 2 : Résoudre l'équation d'inconnue r précédente, on appellera r_1 et r_2 ses solutions.
Question 3 : Vérifier que les fonctions $y = C_1 e^{r1x} + C_2 e^{r2x}$ sont des solutions de (E_2), C_1 et C_2 désignant des constantes réelles.

Réponses :
Question 1 : Si $y = e^{rx}$, on a alors , $y' = r e^{rx}$, $y'' = r^2 e^{rx}$.
Donc $y'' - 5y' + 6y = (r^2 e^{rx} - 5 r e^{rx} + 6 e^{rx}) = e^{rx}(r^2 - 5r + 6) = 0$, or $e^{rx} \neq 0$, ce qui conduit à : $r^2 - 5r + 6 = 0$.
Question 2 : L'équation : $r^2 - 5r + 6 = 0$ admet deux solutions réelles qui sont $r_1 = 2$ et $r_2 = 3$.
Question 3 : On pose $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$, en remplaçant dans l'équation différentielle il vient :
$(4C_1 e^{2x} + 9C_2 e^{3x}) - 5(2C_1 e^{2x} + 3C_2 e^{3x}) + 6(C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}) = (4 - 10 + 6) C_1 e^{2x} + (9 - 15 + 6) C_2 e^{3x} = 0$.

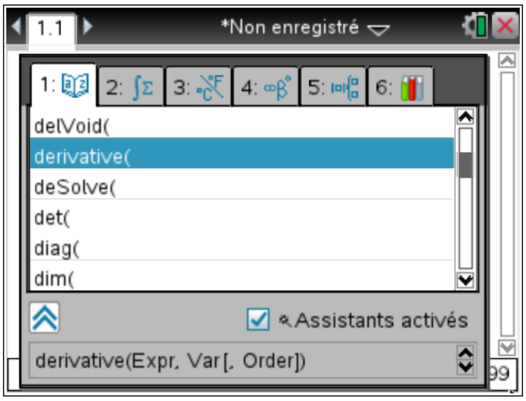
Exercice 3 : On considère l'équation différentielle (E_3) : $y'' - 2y' + 5y = 5e^{2x}$.

Question 1 : Montrer qu'il existe un nombre réel k tel que la fonction f définie pour tout x réel par $f(x) = k.e^{2x}$ soit solution de l'équation différentielle (E_3).
Question 2 : On souhaite construire, avec TI-Nspire, un outil qui permettra de donner l'image d'une fonction y lorsqu'on lui applique la transformation $y'' - 2y' + 5y$.

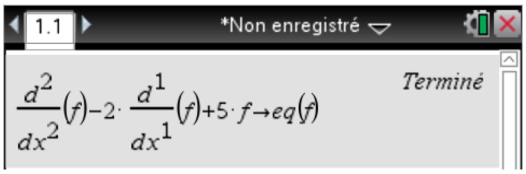
On utilise l'instruction ***derivative(*** du catalogue, sa syntaxe est visible en bas de l'écran.
On saisit alors la suite d'instructions ci-dessous :

derivative(f,x,2)−2derivative(f,x,1)+5f→eq(f)

L'emploi de cette fonction notée *eq* aura pour effet de calculer l'image $f'' - 2f' + 5f$ de la fonction *f* par la fonction *eq*.
Une fois saisie la ligne précédente dans une page de calculs, appuyer sur la touche [enter] afin de créer cette fonction dans TI-Nspire.

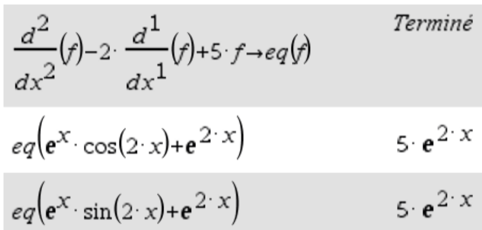


Voici ce qui apparaît à l'écran de votre calculatrice.



Question 3 : Utiliser votre fonction ***eq(*** pour chercher l'image de la fonction *f* définie par $f(x) = e^{2x}$ en saisissant $\boldsymbol{eq}(e^{2x})$ et [enter].
Procéder de même avec les fonctions *g* et *h* définies par : $g(x) = e^x.\cos(2x) + e^{2x}$ et $h(x) = e^x.\sin(2x) + e^{2x}$.
Que peut-on en conclure ?

Réponses :
Question 1 : On a $f(x) = k.\,e^{2x}$, $f'(x) = 2k.\,e^{2x}$ et $f''(x) = 4k.\,e^{2x}$. En remplaçant dans l'équation (E_3), il vient :
$f''(x) - 2f'(x) + 5f(x) = 4k.e^{2x} - 4k.e^{2x} + 5k.e^{2x} = 5k.e^{2x}$. Donc, $5k.e^{2x} = 5.e^{2x}$ ce qui donne $k = 1$.
Question 2 : Cet opérateur : $y \mapsto y'' - 2y' + 5y$ permet « d'essayer » une fonction *f* afin de savoir si elle est ou non solution de l'équation (E_3). Elle sera particulièrement intéressante lorsque les calculs sont longs et fastidieux.
Question 3 :
On saisit la fonction proposée dans une page de calculs puis on cherche les images des deux fonctions *g* et *h*.
On en déduit que les fonctions *g* et *h* sont toutes deux solutions de l'équation (E_3).



3. Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

1. Définition

On appelle équation différentielle du second ordre linéaire à coefficients constants toute équation (E) de la forme : $\boldsymbol{a\,.\,y'' + b\,.\,y' + c\,.\,y = f(x)}$,

où *a*, *b* et *c* sont des nombres réels ($a \neq 0$), *y* et *f* sont des fonctions numériques de variable réelle *x*.
L'équation : $\boldsymbol{a\,.\,y'' + b\,.\,y' + c\,.\,y = 0}$ est l'équation sans second membre associée à l'équation (E).

Remarques : l'inconnue de cette équation est la fonction *y*.
Une solution particulière de l'équation est une fonction *g* qui vérifie l'équation.
Résoudre l'équation différentielle c'est trouver la solution générale de (E) qui est formée par l'ensemble de toutes les fonctions solutions de (E).

2. Résolution de l'équation sans second membre : (E_0) : $a \cdot y'' + b \cdot y' + c \cdot y = 0$

On dit que deux fonctions y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes si aucune n'est le produit de l'autre par une constante.

Justifier que les fonctions $y_1 = \sin(x)$ et $y_2 = \cos(x)$ sont linéairement indépendantes.

On peut, par exemple, calculer le rapport $\frac{y_1}{y_2} = \tan x$ qui n'est pas constant.

Les fonctions $y_1 = x^2$ et $y_2 = -2x^2$ ne sont pas linéairement indépendantes car on a pour tout x réel, $y_2 = -2\, y_1$.

Nous admettrons le théorème suivant :

Théorème 1: Si on connait deux fonctions y_1 et y_2 linéairement indépendantes, solutions de l'équation différentielle **(E_0) : $a \cdot y'' + b \cdot y' + c \cdot y = 0$,** alors l'ensemble des solutions de **(E_0)** est formé par les fonctions de la forme $y = C_1\, y_1 + C_2\, y_2$, où C_1 et C_2 désignent des constantes réelles.

On peut commencer par vérifier que si y_1 et y_2 sont toutes deux solutions de (E_0), alors toute combinaison linéaire de y_1 et y_2 est aussi solution de (E_0) et admettre seulement la réciproque.

On se propose de chercher les fonctions y_1 et y_2 sous la forme $y = e^{rx}$, où r est un nombre constant.

Question : Démontrer que $y = e^{rx}$ est solution de l'équation (E_0) si et seulement si r est solution de l'équation **:** $ar^2 + br + c = 0$.

Il suffit de calculer y' et y'' et de remplacer dans (E_0).

Définition : On appelle équation caractéristique de l'équation différentielle **(E_0) : $a \cdot y'' + b \cdot y' + c \cdot y = 0$**, l'équation du second degré d'inconnue r : **$ar^2 + br + c = 0$**.

Résolution de l'équation caractéristique

1^er cas : on suppose $\Delta = b^2 - 4ac > 0$

Question 1 : Donner dans ce cas les solutions de l'équation caractéristique.

Question 2 : En déduire deux solutions particulières y_1 et y_2 de l'équation (E_0).

Question 3 : Justifier que les solutions trouvées y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes.

Question 4 : Donner la solution générale de l'équation (E_0).

Réponses :

Question 1 : L'équation caractéristique a deux solutions réelles distinctes : $r_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, $r_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.
Question 2 : Les fonctions $y_1 = e^{r1x}$ et $y_2 = e^{r2x}$ sont deux solutions de (E_0).
Question 3 : On calcule le quotient des solutions qui donne $e^{(r1-r2)x}$ qui n'est pas constant car r_1 et r_2 sont distinctes.
Question 4 : La solution générale de (E_0) peut s'écrire : $y = C_1\, e^{r1x} + C_2\, e^{r2x}$, C_1 et C_2 constantes réelles quelconques.

2^e cas : on suppose $\Delta = b^2 - 4ac = 0$

Question 1 : Etablir que dans ca cas, les fonctions $y_1 = e^{-\frac{b}{2a}x}$ et $y_2 = x.e^{-\frac{b}{2a}x}$ sont deux solutions de l'équation (E_0) et qu'elles sont linéairement indépendantes (on pourra utiliser TI-Nspire).

Question 2 : Donner la solution générale de l'équation (E_0).

On peut faire effectuer le calcul à la main, au moins pour y_1, et utiliser la calculatrice pour y_2 seulement.
On peut aussi utiliser l'outil créé page 2 comme le montrent les écrans page suivante.

$a \cdot \text{derivative}(f,x,2)+b \cdot \text{derivative}(f,x,1)+c \cdot f$

On utilise la fonction **Derivative** accessible dans le catalogue.

$eq\left(e^{\frac{-b}{2\cdot a}\cdot x}\right) \qquad \left(c-\frac{b^2}{4\cdot a}\right)\cdot e^{\frac{-b\cdot x}{2\cdot a}}$

$\text{comDenom}\left(c-\frac{b^2}{4\cdot a}\right) \qquad \frac{4\cdot a\cdot c-b^2}{4\cdot a}$

On cherche l'image de la fonction y_1 par la fonction *eq*, on sait que $b^2 - 4ac = 0$.

$a\cdot\frac{d^2}{dx^2}(f)+b\cdot\frac{d^1}{dx^1}(f)+c\cdot f \rightarrow eq(f)$ *Terminé*

On crée ainsi une fonction *eq* qui, à une fonction *f*, associe *a*. *f* "+ *b*. *f* ' + c. *f*

$eq\left(x\cdot e^{\frac{-b}{2\cdot a}\cdot x}\right) \qquad \left(c-\frac{b^2}{4\cdot a}\right)\cdot x\cdot e^{\frac{-b\cdot x}{2\cdot a}}$

On procède de même avec y_2.

3^e^ cas : on suppose $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

Question 1 : Donner dans ce cas les solutions de l'équation caractéristique.

On trouve deux solutions complexes conjuguées : $r_1 = \alpha + \beta\, i$, $r_2 = \alpha - \beta\, i$ avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Question 2 : On pose $y_1 = e^{-\frac{b}{2a}x}.\cos\left(\frac{\sqrt{-b^2+4ac}}{2a}x\right)$ et $y_2 = e^{-\frac{b}{2a}x}.\sin\left(\frac{\sqrt{-b^2+4ac}}{2a}x\right)$.

En utilisant TI-Nspire et la fonction *eq* définie dans l'exercice 3 de la page 1, vérifier que les fonctions y_1 et y_2 sont solutions de l'équation (E_0).

$eq\left(e^{\frac{-b}{2\cdot a}\cdot x}\cdot\cos\left(\frac{\sqrt{-b^2+4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}\cdot x\right)\right) \qquad 0$

$eq\left(e^{\frac{-b}{2\cdot a}\cdot x}\cdot\sin\left(\frac{\sqrt{-b^2+4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}\cdot x\right)\right) \qquad 0$

Question 3 : Justifier que les solutions y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes.

On peut par exemple, calculer le quotient $\frac{y_2}{y_1} = \tan\left(\frac{\sqrt{-b^2+4a\,c}}{2a}.x\right)$ qui n'est pas constant car $b^2 - 4ac < 0$ est donc non nul.

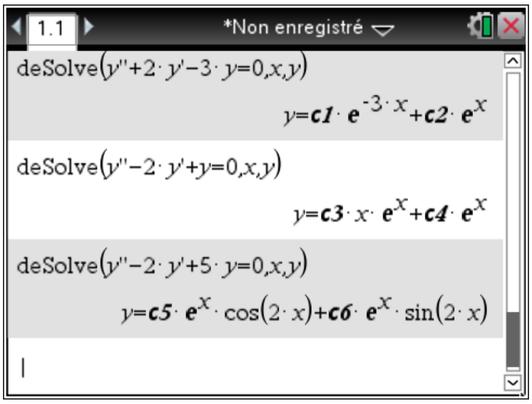
Question 4 : Donner la solution générale de l'équation (E_0).

La solution générale de l'équation différentielle (E_0) est $y = e^{\alpha x}(C_1\cos(\beta x) + C_2\sin(\beta x))$, C_1 et C_2 sont des constantes réelles quelconques avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

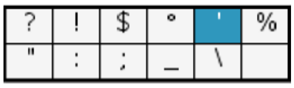
Résumé : Pour trouver la solution générale de l'équation différentielle **(E_0) :** $\boldsymbol{a \cdot y'' + b \cdot y' + c \cdot y = 0}$, on écrit l'équation caractéristique $\boldsymbol{ar^2 + br + c = 0}$ et on calcule son discriminant $\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac}$.

	Solutions de l'équation caractéristique	Solution générale de l'équation différentielle (E_0)
$\Delta > 0$	2 solutions réelles r_1 et r_2 $r_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, $r_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$, C_1 et C_2 constantes réelles quelconques
$\Delta = 0$	1 solution réelle double $r_1 = r_2 = -\frac{b}{2a}$	$y = (C_1 x + C_2)\, e^{r_1 x}$, C_1 et C_2 constantes réelles quelconques
$\Delta < 0$	2 solutions complexes conjuguées $r_1 = \alpha + \beta\, i$, $r_2 = \alpha - \beta\, i$ avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$	$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x))$, C_1 et C_2 constantes réelles quelconques

Remarque : il est possible d'obtenir la solution générale d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants à l'aide de TI-Nspire en utilisant l'instruction ***deSolve(*** déjà rencontrée dans les équations du premier ordre comme le montre l'écran ci-dessous.



Les constantes C_1, C_2, C_3, … sont ainsi numérotées dans l'ordre de leur apparition par la calculatrice.

Remarque : pour la saisie de y'', on récupère l'apostrophe via la touche ?!▸ 

que l'on utilise deux fois de suite, et non l'instruction figurant en bas à gauche de la fenêtre ci-dessus.

3. Résolution de l'équation complète (E) : $\boldsymbol{a \cdot y'' + b \cdot y' + c \cdot y = f(x)}$

Soit y_0 une solution particulière de l'équation (E), on a alors : $a.y_0'' + b.y_0' + c.y_0 = f(x)$.

Une fonction y est solution de l'équation (E) si et seulement si $a.y'' + b.y' + c.y = f(x)$ ou encore si et seulement si on a : $a.y'' + b.y' + c.y = a.y_0'' + b.y_0' + c\,.\,y_0$ soit $a.(y'' - y_0'') + b.(y' - y_0') + c.(y - y_0) = 0$.

Cette équation différentielle est une équation différentielle du second ordre sans second membre dont la solution générale est donnée dans le résumé ci-dessus.

On trouve donc la solution générale de l'équation (E) en ajoutant à la solution générale de (E_0) une solution particulière y_0 de (E), comme pour les équations différentielles linéaires du premier ordre.

Théorème 2 : La solution générale de l'équation différentielle (E) : $\boldsymbol{a \cdot y'' + b \cdot y' + c \cdot y = f(x)}$ s'obtient en ajoutant à la solution générale de l'équation sans second membre $\boldsymbol{a \cdot y'' + b \cdot y' + c \cdot y = 0}$ une solution particulière de (E).

Exemple 1 : On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + y' - 2y = 2x^2 - 2x + 4$.

Question 1 : Donner, à la main en détaillant les calculs, la solution générale de l'équation : $y'' + y' - 2y = 0$.
Question 2 : Déterminer à la main, une solution particulière de (E) sous la forme $y = a.x^2 + b.x + c$.
Question 3 : Déduire de ce qui précède la solution générale de (E).
Question 4 : Vérifier les résultats trouvés à la calculatrice.

Remarque : la recherche de la solution particulière s'effectue à la main dans les cas simples, en s'aidant le plus souvent des conseils donnés dans l'énoncé. Sinon, on utilisera directement la calculatrice et l'instruction *deSolve(* afin d'obtenir la solution de (E)**.**

Réponses :

Question 1 : L'équation caractéristique est : $r^2 + r - 2 = 0$ qui admet deux solutions réelles $r_1 = 1$ et $r_2 = -2$.
La solution générale de l'équation $y'' + y' - 2y = 0$ est donc $y = C_1\,e^{x} + C_2\,e^{-2x}$, C_1 et C_2 constantes réelles quelconques.

Question 2 : On pose $y = a.x^2 + b.x + c$, on a $y' = 2a.x + b$ et $y'' = 2a$.
En remplaçant dans l'équation (E) : $y'' + y' - 2y = 2x^2 - 2x + 4$, on obtient :

$$-2ax^2 + (2a - 2b)x + b - 2c = 2x^2 - 2x + 4.$$

Par identification des coefficients, on aboutit au système d'équations $\begin{cases} -2a = 2 \\ 2a - 2b = -2 \\ 2a + b - 2c = 4 \end{cases}$ qui a pour solutions :

$a = -1$, $b = 0$, $c = -3$.
La solution particulière cherchée est donc $f : x \mapsto -x^2 - 3$
Question 3 : La solution générale de (E) est donnée par $y = C_1\,e^{x} + C_2\,e^{-2x} - x^2 - 3$, C_1 et C_2 constantes réelles quelconques.
Question 4 : On utilise l'instruction *deSolve(* de la calculatrice

$$\text{deSolve}\left(y''+y'-2\cdot y=2\cdot x^2-2\cdot x+4, x, y\right)$$
$$y=\mathbf{c1}\cdot e^{-2\cdot x}+\mathbf{c2}\cdot e^{x}-x^2-3$$

4. Existence et unicité de la solution vérifiant des conditions initiales particulières données

1. Exercice

On considère l'équation différentielle (E) $y'' + 4\,y' + 4\,y = 3e^{x}$.
Question 1 : Donner à la main la solution générale de l'équation sans second membre associée.
Question 2 : Chercher à la main une solution particulière f de (E) en posant $f(x) = k.\,e^{x}$ (k est un nombre réel).
Question 3 : En déduire la solution générale de (E). Vérifier alors votre résultat en utilisant la calculatrice.
Question 4 : On cherche dans cette question à trouver toutes les fonctions g solutions de (E) dont la courbe représentative admet pour tangente en son point d'abscisse 0 la droite d'équation $y = -\dfrac{17}{3}x + \dfrac{10}{3}$. Déduire de cette information la valeur des réels $g(0)$ et $g'(0)$.
Question 5 : En déduire qu'il existe une et une seule fonction g vérifiant les deux conditions précédentes.

Réponses :

Question 1 : L'équation caractéristique est : $r^2 + 4\,r + 4 = 0$ qui admet une solution réelle double $r_1 = r_2 = -2$.
La solution générale de l'équation $y'' + 4y' + 4y = 0$ est donc $y = (C_1x + C_2)\,e^{-2x}$, C_1 et C_2 constantes réelles quelconques.

Question 2 : On pose $f(x) = k.e^x$, on a $f\,'(x) = k.e^x$ et $f\,''(x) = k.e^x$. En remplaçant dans l'équation (E), on obtient $9k.e^x = 3e^x$. La solution particulière cherchée est donc $f : x \mapsto \frac{1}{3}e^x$.

Question 3 : La solution générale de (E) est donnée par $y = (C_1x + C_2)\,e^{-2x} + \frac{1}{3}e^x$, C_1 et C_2 constantes réelles quelconques.

$$\text{deSolve}\left(y''+4\cdot y'+4\cdot y=3\cdot e^{x},x,y\right)$$
$$y=(c1\cdot x+c2)\cdot e^{-2\cdot x}+\frac{e^{x}}{3}$$

Question 4 : La tangente et la courbe ont en commun le point d'abscisse 0 qui a pour ordonnée $y = -\frac{17}{3}0 + \frac{10}{3}$, soit $y = \frac{10}{3}$. On en tire donc la première information $g(0) = \frac{10}{3}$.

Le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 0 est $-\frac{17}{3}$. On en déduit la seconde information : $g'(0) = -\frac{17}{3}$.

Question 5 : On utilise les deux informations précédentes en remplaçant dans la solution générale de l'équation (E).

On a $y = (C_1x + C_2)\,e^{-2x} + \frac{1}{3}e^x$ qui permet d' écrire $g(0) = C_2 + \frac{1}{3}$ d'où l'on tire l'équation (1) d'inconnue C_2 :

(1) $C_2 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$.

On calcule maintenant y'. On a $y' = C_1\,e^{-2x} + (C_1x + C_2)(-2\,e^{-2x}) + \frac{1}{3}e^x$. Sachant que $g'(0) = -\frac{17}{3}$, on en tire l'équation (2) : $C_1 - 2\,C_2 + \frac{1}{3} = -\frac{17}{3}$.

Il reste à résoudre le système d'équations formé par les équations (1) et (2) qui conduit à $C_1 = 0$ et $C_2 = 3$.

On en déduit qu'il existe une unique solution g vérifiant les deux conditions $g(0) = \frac{10}{3}$ et $g'(0) = -\frac{17}{3}$, la fonction g définie pour tout x réel par : $g(x) = 3.e^{-2x} + \frac{1}{3}e^x$.

Une vérification est possible à l'aide de la calculatrice comme le montrent les écrans ci-dessous.

$$\text{deSolve}\left(y''+4\cdot y'+4\cdot y=3\cdot e^{x} \text{ and } y(0)=\frac{10}{3} \text{ and } y'(0)=-\frac{17}{3},x,y\right)$$

$$\text{deSolve}\left(y''+4\cdot y'+4\cdot y=3\cdot e^{x} \text{ and } y(0)=\frac{10}{3} \text{ an}\right.$$
$$y=3\cdot e^{-2\cdot x}+\frac{e^{x}}{3}$$

2. Cas général

Les deux conditions initiales vérifiées par une solution particulière f d'une équation différentielle sont en général de la forme : $f(x_0) = d$ et $f\,'(x_0) = d'$, ou bien $f(x_0) = d$ et $f(x_1) = d'$,où x_0, x_1,d et d' sont des nombres connus.

Nous admettrons le théorème 3 suivant :

Théorème 3 : Pour toute équation différentielle du second ordre, il existe une et une seule solution qui vérifie deux conditions initiales données.

Remarque : TI-Nspire permet, comme pour les équations différentielles du premier ordre, de déterminer une solution particulière qui vérifie des conditions initiales données (ici, $y'(0) = -1$ et $y(0) = 1$) comme le montre l'écran ci-dessous.

$$\text{deSolve}\left(y''-y=\mathbf{e}^{2\cdot x} \text{ and } y'(0)=-1 \text{ and } y(0)=1,x,y\right) \qquad y=\frac{\mathbf{e}^{2\cdot x}}{3}+\frac{7\cdot \mathbf{e}^{-x}}{6}-\frac{\mathbf{e}^{x}}{2}$$