ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU SECOND ORDRE (EXOS)

TI-Nspire™ CAS

1. Objectifs

- Résoudre à la main et à l'aide de la calculatrice les équations différentielles linéaires du second ordre.

2. Exercices

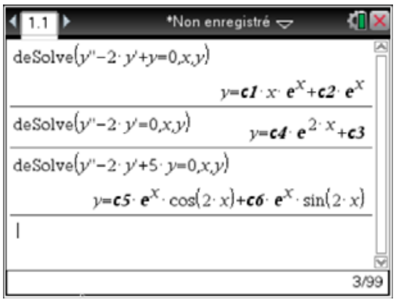
Exercice 1 : On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - 2y' + (a - 1).y = 0$, où a désigne un nombre réel quelconque.

1. Déterminer à la main, en détaillant les calculs et la méthode utilisée, la solution générale de cette équation dans chacun des trois cas suivants :

Cas n° 1	Cas n°2	Cas n°3
$a = 2$	$a = 1$	$a = 6$

Valeur de a	$a = 2$	$a = 1$	$a = 6$
Equation caractéristique	$(r - 1)^2 = 0$	$r^2 - 2r = 0$	$r^2 - 2r + 5 = 0$
Solutions	$r_1 = r_2 = 1$	$r_1 = 0$; $r_2 = 2$	$r_1 = 1 + 2\mathrm{i}$; $r_2 = 1 - 2\mathrm{i}$
Solution générale de (E)	$(c_1 x + c_2)\mathrm{e}^x$	$c_1 + c_2\mathrm{e}^{2x}$	$(c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x))\,\mathrm{e}^x$

2. Vérifier chacune des solutions trouvées en utilisant TI-Nspire.



Remarque : les constantes sont numérotées dans l'ordre de leur création dans une même activité.

3. Étude du cas général, a désigne un nombre réel quelconque.
Écrire l'équation caractéristique de (E). Résoudre suivant les valeurs de a cette équation caractéristique.

L'équation caractéristique de (E) est : $r^2 - 2r + (a - 1) = 0$
On trouve $\Delta = -4a + 8 = -4(a - 2)$.

Condition sur a	$a < 2$	$a = 2$	$a > 2$
Signe de Δ	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
Solutions	2 solutions réelles distinctes $r_1 = 1 + \sqrt{2 - a}$ $r_2 = 1 - \sqrt{2 - a}$	Une solution double $r_1 = r_2 = 1$	2 solutions complexes conjuguées. $r_1 = 1 + i\sqrt{a - 2}$ $r_2 = 1 - i\sqrt{a - 2}$

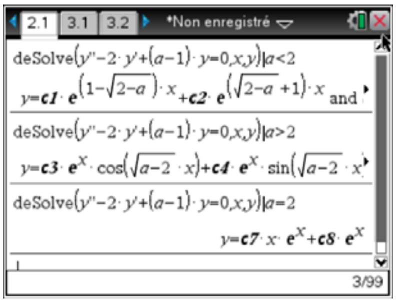
Ce document est mis à disposition sous licence Creative Commons
http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.0/fr/

© Texas Instruments 2015 / Photocopie autorisée

4. En déduire dans chaque cas en fonction de a la solution générale de (E).

$a < 2$	$y = c1\,e^{(1+\sqrt{2-a})x} + c2\,e^{(1-\sqrt{2-a})x}$
$a = 2$	$y = (c1x + c2).e^{x}$
$a > 2$	$y = e^{x}.(c1\cos(\sqrt{a-2}.x) + c2\sin(\sqrt{a-2}.x))$

Remarque : TI-Nspire affiche la solution générale lorsque l'on ajoute la condition sur a.



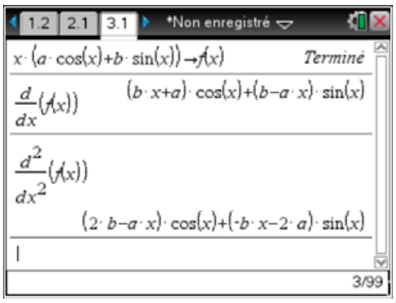
Exercice 2 : On considère l'équation différentielle (E_2) : $y'' + y = \sin(x)$.

Question 1 : Déterminer, à la main, la solution générale de l'équation sans second membre : $y'' + y = 0$.

L'équation caractéristique est : $r^2 + 1 = 0$, elle a pour solutions les nombres complexes i et $-i$.
La solution générale de l'équation différentielle $y'' + y = 0$ est : $y = c_1\cos(x) + c_2\sin(x)$ où c_1 et c_2 désignent des constantes réelles.

Question 2 : On se propose de rechercher une solution particulière f de (E_2) sous la forme :
$f(x) = x.(a.\cos(x) + b.\sin(x))$ où a et b désignent des nombres réels.
Calculer en fonction de x, $f'(x)$ et $f''(x)$. (On pourra utiliser TI-Nspire)

Réponse :



Question 3 : En déduire que si f est solution de (E_2), alors on est conduit à l'égalité :
$2b.\cos(x) + (-2a).\sin(x) = \sin(x)$, égalité vraie pour tout x réel.

L'égalité est immédiate.

Question 4 : En déduire les valeurs de a et b puis la solution générale de l'équation (E_2).

On est conduit aux égalités : $2b = 0$ et $-2a = 1$ d'où $a = -\frac{1}{2}$ et $b = 0$.

La solution particulière f cherchée est donc : $f(x) = -\frac{1}{2}x.\cos(x)$ et la solution générale de l'équation différentielle (E_2) peut s'écrire : $y = c_1\cos(x) + c_2\sin(x) - \frac{1}{2}x.\cos(x)$ où c_1 et c_2 désignent des constantes réelles.

Photocopie autorisée
© Texas Instruments 2015

Exercice 3 : On considère l'équation différentielle (E_3) : $y'' - 2y' + y = e^x + \cos(x)$.

Question 1 : Déterminer, à la main, la solution générale de l'équation : $y'' - 2y' + y = 0$.

L'équation caractéristique est : $r^2 - 2r + 1 = 0$ qui peut s'écrire : $(r - 1)^2 = 0$.
Elle admet une solution double réelle $r = 1$.

La solution générale de l'équation : $y'' - 2y' + y = 0$ est : $y = (c_1x + c_2)e^x$, où c_1 et c_2 désignent des constantes réelles.

On considère maintenant les équations différentielles (F_1) : $y'' - 2y' + y = e^x$ et (F_2) : $y'' - 2y' + y = \cos(x)$.

Question 2 : Déterminer, à la main, une solution particulière f de l'équation (F_1) en posant $f(x) = k.\, x^2.e^x$.

On a $f'(x) = k(2x + x^2)e^x$ et $f''(x) = k(2 + 4x + x^2)\, e^x$.

En remplaçant ces résultats dans l'équation (F_1) on obtient : $2k = 1$ soit $k = \frac{1}{2}$.

Une solution particulière de (F_1) est $f(x) = \frac{1}{2}x^2.e^x$

Question 3 : Déterminer, à la main, une solution particulière g de l'équation (F_2) sous la forme :
$g(x) = a.\cos(x) + b.\sin(x)$.

On a $g'(x) = -a\sin(x) + b\cos(x)$ et $g''(x) = -a\cos(x) - b\sin(x)$.
En remplaçant ces résultats dans l'équation (F_2) on obtient : $2a\sin(x) - 2b\cos(x) = \cos(x)$ qui conduit à

$2a = 0$ et $-2b = 1$ d'où $a = 0$ et $b = -\frac{1}{2}$.

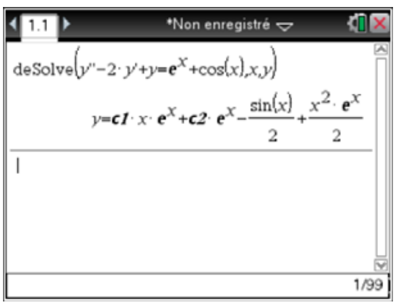
Une solution particulière de (F_1) est $g(x) = -\frac{1}{2}\sin(x)$.

Question 4 : Montrer que la fonction $f + g$ est solution particulière de l'équation (E).
En déduire la solution générale de (E).

En remplaçant y par $f(x) + g(x)$ dans le premier membre de l'équation (E) on a :
$(f''(x) + g''(x)) - 2(f'(x) + g'(x)) + (f(x) + g(x))$,
ou encore : $(f''(x) - 2f'(x) + f(x)) + (g''(x) - 2g'(x) + g(x))$.
Comme f et g sont respectivement solutions des équations (F_1) et (F_2), on a $(f''(x) - 2f'(x) + f(x)) = e^x$ et $(g''(x) - 2g'(x) + g(x)) = \cos(x)$. On retrouve bien le second membre de l'équation (E) ce qui permet d'affirmer que la fonction $f + g$ est solution particulière de l'équation (E).

La solution générale de (E) est : $y = (c_1x + c_2)e^x + \frac{1}{2}x^2.e^x - \frac{1}{2}\sin(x)$, où c_1 et c_2 désignent des constantes réelles.

Remarque : on peut vérifier le résultat précédent à l'aide de la calculatrice



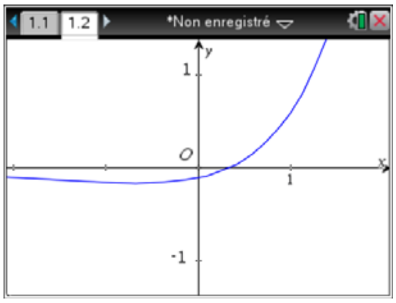
Photocopie autorisée
© Texas Instruments 2015

Exercice 4 :

Partie 1

On appelle C la courbe représentative d'une fonction f définie pour tout x réel.

Dans l'écran ci-contre figure une partie de la courbe C tracée dans un repère orthonormal.



On considère les fonctions suivantes définies pour tout x réel par :

Fonction1	Fonction 2	Fonction3
$(3x-1).e^x$	$\left(\frac{1-3x}{4}\right).e^x$	$\left(\frac{x}{3}-\frac{1}{9}\right).e^x$

Question : Parmi les trois fonctions ci-dessus, une seule correspond à la fonction f et a pour représentation graphique la courbe C. Laquelle ? On justifiera son choix.

Le calcul de $f(0)$ donne respectivement : -1, $\frac{1}{4}$ et $-\frac{1}{9}$, seule la dernière valeur est compatible avec la représentation graphique de f. On a donc $f(x)=\left(\frac{x}{3}-\frac{1}{9}\right).e^x$.

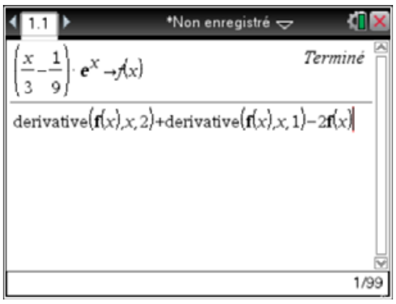
Partie 2

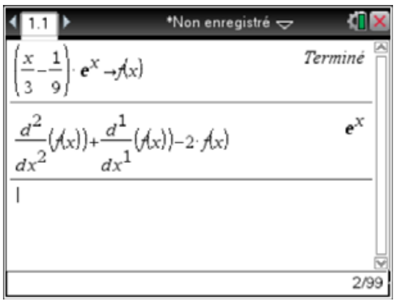
On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + y' - 2y = e^x$.

Question 1 : Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y'' + y' - 2y = 0$

L'équation caractéristique est : $r^2 + r - 2 = 0$ qui admet deux solutions réelles $r_1 = 1$ et $r_2 = -2$.
La solution générale de (E_0) est alors : $y = c_1e^x + c_2\,e^{-2x}$, où c_1 et c_2 désignent des constantes réelles.

Question 2 : Vérifier que la fonction f associé à la courbe C de la partie 1 est solution particulière de (E).
(On pourra s'aider le la calculatrice)





Question 3 : Déduire de ce qui précède la solution générale de l'équation différentielle (E).

Il suffit d'ajouter à la solution générale de (E_0) la solution particulière f ce qui donne :

$y = c_1e^x + c_2\,e^{-2x} + \left(\frac{x}{3}-\frac{1}{9}\right).e^x$, où c_1 et c_2 désignent des constantes réelles, ce que confirme l'écran suivant de la calculatrice,

$$\text{deSolve}\left(y''+y'-2\cdot y=e^x,x,y\right)$$
$$y=c1\cdot e^{-2\cdot x}+c2\cdot e^x+\left(\frac{x}{3}-\frac{1}{9}\right)\cdot e^x$$

Photocopie autorisée
© Texas Instruments 2015

Partie 3

On pose $F(x) = \frac{1}{2}(f'(x) + f(x) - e^x)$ où f désigne la fonction trouvée en partie 1.

Question 1 : En utilisant le fait que f est solution de (E), justifier que F est une primitive de f.

Calculons $F'(x) = \frac{1}{2}(f''(x) + f'(x) - e^x)$. On sait que f est solution de l'équation (E), on peut donc écrire : $f''(x) + f'(x) - 2f(x) = e^x$, on en tire l'égalité : $f''(x) + f'(x) = 2f(x) + e^x$.

On a alors $F'(x) = \frac{1}{2}(f''(x) + f'(x) - e^x) = \frac{1}{2}(2f(x) + e^x - e^x) = f(x)$, soit $F'(x) = f(x)$ qui prouve que F est une primitive de f.

Question 2 : Exprimer $F(x)$ en fonction de x.

On a $f(x) = \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{9}\right).e^x$, donc $f'(x) = \left(\frac{1}{3} + \frac{x}{3}\right)e^x - \frac{1}{9}e^x$.

Or $F(x) = \frac{1}{2}(f'(x) + f(x) - e^x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{x}{3} - \frac{1}{9} + \frac{x}{3} - \frac{1}{9} - 1\right)e^x = \left(\frac{x}{3} - \frac{4}{9}\right)e^x$.

Question 3 : Etudier le signe de $f(x)$ pour x variant dans $\left[0\,;\frac{1}{3}\right]$.

Remarque : l'observation du graphique de f en partie 1 permet de conjecturer que $f(x)$ est négatif pour x variant dans $\left[0\,;\frac{1}{3}\right]$.

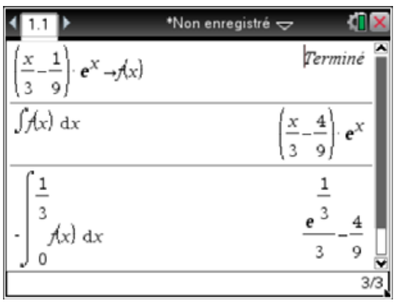
Le signe de $f(x)$ est celui de $\left(\frac{x}{3} - \frac{1}{9}\right) = \frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{3}\right)$ car $e^x > 0$ pour tout x réel.

On a donc $f(x) \leq 0$ si x appartient à $\left[0\,;\frac{1}{3}\right]$.

Question 4 : Calculer en unités d'aire la valeur exacte de l'aire du domaine plan limité par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \frac{1}{3}$.

L'aire cherchée est donnée par $A = -\int_0^{\frac{1}{3}} f(x)dx = -[F(x)]_0^{\frac{1}{3}} = -\left[\left(\frac{x}{3} - \frac{4}{9}\right)e^x\right]_0^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}} - \frac{4}{9}$ car $f(x) \leq 0$ si x appartient à $\left[0\,;\frac{1}{3}\right]$.

Remarque : il est possible de contrôler les réponses aux questions 2 et 4 à l'aide de la calculatrice comme le montre l'écran ci-dessous.



© Texas Instruments 2015

Exercice 5 :

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - y = 2xe^x$.

On se propose de déterminer la solution y de (E) qui vérifie les conditions initiales : $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$.

Question 1 : Justifier en détaillant les calculs faits à la main, le résultat donné par la calculatrice dans l'écran ci-dessous.

deSolve$(y''-y=0,x,y)$ $\quad y=c1\cdot e^{-x}+c2\cdot e^{x}$

On résout tout d'abord l'équation caractéristique : $r^2 - 1 = 0$ qui a pour solutions les nombres réels -1 et 1.
La solution générale de l'équation sans second membre $y'' - y = 0$ est donc $y = c_1e^{-x} + c_2e^x$ où c_1 et c_2 désignent des constantes réelles.

Question 2 : On se propose de déterminer à la main une solution particulière de (E).

deSolve$(y''-y=2\cdot x\cdot e^{x},x,y)$

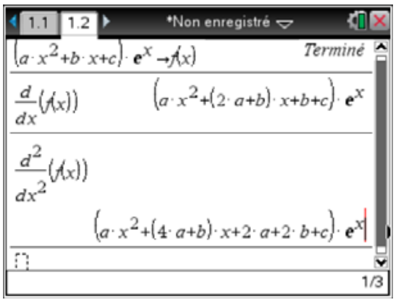
$$y=c1\cdot e^{-x}+c2\cdot e^{x}+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right)\cdot e^{x}$$

L'observation de l'écran ci-dessus nous conduit à chercher une solution particulière de (E) sous la forme $f(x) = (ax^2 + bx + c).e^x$ où a, b et c sont des nombres réels.

Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

On a $f(x) = (ax^2 + bx + c)\, e^x$
$f'(x) = (2ax + b)\, e^x + (ax^2 + bx + c)\, e^x = (ax^2 + (2a + b)\, x + b + c)\, e^x$
$f''(x) = (2ax + 2a + b + ax^2 + (2a + b)\, x + b + c)\, e^x = (ax^2 + (4a + b)x + 2a + 2b + c)\, e^x$

Remarque : les résultats précédents peuvent être contrôlés à l'aide de la calculatrice, voir l'écran ci-dessous



En remplaçant y et y'' dans l'équation (E) respectivement par les expressions de $f(x)$ et $f''(x)$, montrer que l'on aboutit au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 4a = 2 \\ 2a + 2b = 0 \\ c \text{ quelconque} \end{cases}$$

En utilisant les résultats précédents, on peut écrire $f''(x) - f(x) = (4ax + 2a + 2b)\, e^x$.
En remplaçant dans l'équation différentielle (E) : $y'' - y = 2xe^x$ on aboutit à l'égalité vraie pour tout x réel : $(4ax + 2a + 2b)\, e^x = 2xe^x$, ce qui conduit par identification à $4a = 2$ et $2a + 2b = 0$.
On remarquera qu'aucune condition n'est imposée au réel c, on peut donc le choisir de manière quelconque.

Photocopie autorisée
© Texas Instruments 2015

Déduire de ce qui précède une solution particulière de (E) et enfin la solution générale de cette équation différentielle.

Du système précédent on tire $a = \frac{1}{2}$ et $b = -\frac{1}{2}$, c quelconque.

Toute fonction f qui s'écrit $f(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + c\right)e^x$ est solution particulière de (E).

La solution particulière de (E) donnée par la calculatrice correspond à la valeur $c = \frac{1}{4}$.

La solution particulière de (E) est donc : $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)e^x$ où c_1 et c_2 désignent des constantes réelles.

Question 3 : Recherche de la solution particulière qui vérifie les conditions initiales.
On se propose, comme dans les questions précédentes de justifier le résultat donné par la calculatrice dans l'écran ci-dessous :

deSolve$(y''-y=2\cdot x\cdot e^x$ and $y(0)=1$ and $y'(0)=1,x,y)$ $\quad y=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}+\frac{5}{4}\right)\cdot e^x-\frac{e^{-x}}{4}$

En utilisant la solution générale de (E) trouvée en question 2 et les conditions initiales imposées : $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$, déterminer à la main la valeur des constantes c_1 et c_2 et enfin la solution particulière demandée.

Calculons tout d'abord $f'(x) = -c1e^{-x} + c2e^x + \left(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)e^x$.

La condition $y(0) = 1$ conduit à l'équation $c_1 + c_2 + \frac{1}{4} = 1$.

La condition $y'(0) = 1$ conduit à l'équation : $-c_1 + c_2 - \frac{1}{4} = 1$.

Le système d'équations précédent admet pour solutions $c_1 = -\frac{1}{4}$ et $c_2 = 1$.

La solution particulière de (E) qui vérifie les conditions $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$ est

$$y = -\frac{1}{4}e^{-x} + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}\right)e^x .$$

Photocopie autorisée
© Texas Instruments 2015