意义•本质•融合

—— 结合两个课例谈数学实验与图形计算器

赵存宇

北京市第八十中学

缘起

2013年1月，区教研员通知

台湾中原大学教授和学生来北京交流

要求

- 使用图形计算器
- 体现大陆课程改革的思想

我与TI

- **2011年开始接触 卡西欧 TI92 TI-Nspire**
  - 操作手册
  - 现场及在线培训
  - QQ群
  - 别人公开课
- **2012年11月26日 区级公开课**

  抛物线一个几何性质的探究

TI的特色

- 几何绘图系统
- 符号代数系统
- 数据处理系统
- 程序运行系统
- 无线课堂系统
- 各模块的融合
- 便携特点，从教具到学具

* 几何画板 GeoGebra
* matlab Lingo
* C C++ JAVA
* Excel mysql

课程改革

- 发现模式

创设情境→分析探究→猜想假设→论证评价

- 突出“探究”和“猜想”
- 对人类已知知识再发现、再创造的过程
- 数学实验

选题的想法

- 重要的内容
- 不用信息技术很难说清楚
- 比较自然的开展探究过程
- 蕴含丰富的数学思想

导数概念
三次函数的性质
优化问题与函数的最值
……

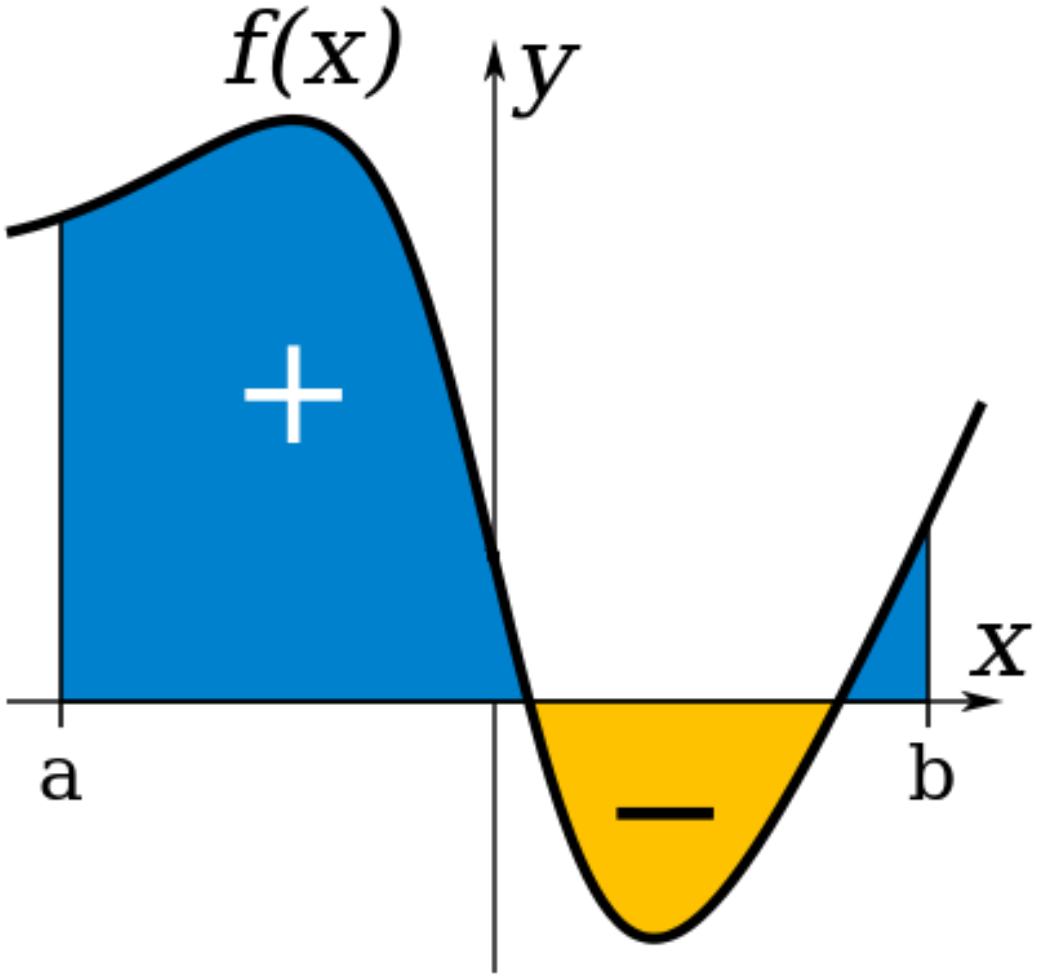
选题的想法

- 重要的内容
- 不用信息技术很难说清楚
- 比较自然的开展探究过程
- 蕴含丰富的数学思想

导数概念
三次函数的性质
优化问题与函数的最值
……

微积分基本定理

定积分几何意义



$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

定积分的定义：

如果函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，用分点

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{i-1} < x_i \cdots < x_n = b$$

把区间 $[a,b]$ 分成 n 个小区间，在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上任取一点 $\xi_i (i = 1, 2, \ldots, n)$，作和式：

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} f(\xi_i)$$

当 $n \to \infty$ 时，上述和式无限接近某个常数，这个常数叫做函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的定积分：

$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} f(\xi_i) = \int_a^b f(x)dx$$

微积分基本定理

定理：如果函数$f(x)$是$[a,b]$上的连续函数，并且$F'(x)=f(x)$（称满足这一个关系的$F(x)$为$f(x)$的原函数），则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)|_a^b = F(b)-F(a)$$

该定理称为微积分基本定理。

教材中的处理

引入

1.6 微积分基本定理

从前面的学习中可以发现，虽然被积函数 $f(x)=x^3$ 非常简单，但直接用定积分的定义计算 $\int_0^1 x^3\,dx$ 的值却比较麻烦. 对于有些定积分，例如 $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$❶，几乎不可能直接用定义计算. 那么，有没有更加简便、有效的方法求定积分呢？另外，我们已经学习了微积分学中两个最基本和最重要的概念——导数和定积分，这两个概念之间有没有内在的联系呢？我们能否利用这种联系求定积分呢？

我们先来探究一下导数和定积分的联系.

❶ 请你尝试利用定积分定义计算 $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$.

物理例子

如图 1.6-1，一个作变速直线运动的物体的运动规律是$s=s(t)$，由导数的概念可知，它在任意时刻 t 的速度 $v(t)=s'(t)$. 设这个物体在时间段 $[a, b]$ 内的位移为 S，你能分别用 $s(t)$，$v(t)$ 表示 S 吗？

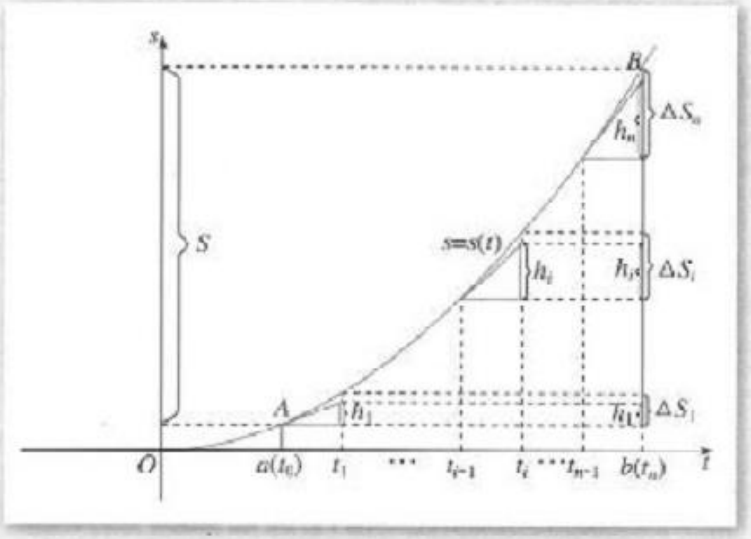


图 1.6-1

显然，物体的位移 S 是函数 $s=s(t)$ 在 $t=b$ 处与 $t=a$ 处的函数值之差，即

推导

$$S=s(b)-s(a). \tag{1}$$

另一方面，我们还可以利用定积分，由 $v(t)$ 求位移 S.

用分点

$$a=t_0<t_1<\cdots<t_{i-1}<t_i<\cdots<t_n=b$$

将区间 $[a, b]$ 等分成 n 个小区间：

$$[t_0, t_1], [t_1, t_2], \cdots, [t_{i-1}, t_i], \cdots, [t_{n-1}, t_n],$$

每个小区间的长度均为

$$\Delta t=t_i-t_{i-1}=\frac{b-a}{n}.$$

当 Δt 很小时，在 $[t_{i-1}, t_i]$ 上，$v(t)$ 的变化很小，可以认为物体近似地以速度 $v(t_{i-1})$ 作匀速运动，物体所作的位移

$$\Delta S_i\approx h_i=v(t_{i-1})\Delta t=s'(t_{i-1})\Delta t=\frac{b-a}{n}s'(t_{i-1}). \tag{2}$$

从几何意义上看（图 1.6-2），设曲线 $s=s(t)$ 上与 t_{i-1} 对应的点为 P，PD 是 P 点处的切线，由导数的几何意义知，切线 PD 的斜率等于 $s'(t_{i-1})$，于是

$$\Delta S_i\approx h_i=\tan\angle DPC\cdot\Delta t=s'(t_{i-1})\cdot\Delta t.$$

继续推导

结合图 1.6-1，可得物体总位移

$$S=\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i\approx\sum_{i=1}^{n}h_i=\sum_{i=1}^{n}v(t_{i-1})\Delta t=\sum_{i=1}^{n}s'(t_{i-1})\Delta t.$$

显然，n 越大，即 Δt 越小，区间 $[a,\ b]$ 的分划就越细，$\sum_{i=1}^{n}v(t_{i-1})\Delta t=\sum_{i=1}^{n}s'(t_{i-1})\Delta t$ 与 S 的近似程度就越好．由定积分的定义有

$$\begin{aligned}S&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{b-a}{n}v(t_{i-1})\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{b-a}{n}s'(t_{i-1})\\&=\int_a^b v(t)\ \mathrm{d}t=\int_a^b s'(t)\ \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

结合①有

$$S=\int_a^b v(t)\mathrm{d}t=\int_a^b s'(t)\mathrm{d}t=s(b)-s(a).$$

结论与应用

上式表明，如果作变速直线运动的物体的运动规律是$s=s(t)$，那么$v(t)=s'(t)$在区间$[a, b]$上的定积分就是物体的位移$s(b)-s(a)$.

一般地，如果$f(x)$是区间$[a, b]$上的连续函数，并且$F'(x)=f(x)$，那么

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a).$$

这个结论叫做微积分基本定理（fundamental theorem of calculus），又叫做牛顿—莱布尼兹公式（Newton—Leibniz Formula).

为了方便，我们常常把$F(b)-F(a)$记成$F(x)\Big|_a^b$，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a).$$

微积分基本定理表明，计算定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$的关键是找到满足$F'(x)=f(x)$的函数$F(x)$. 通常，我们可以运用基本初等函数的求导公式和导数的四则运算法则从反方向上求出$F(x)$.

例 1　计算下列定积分：

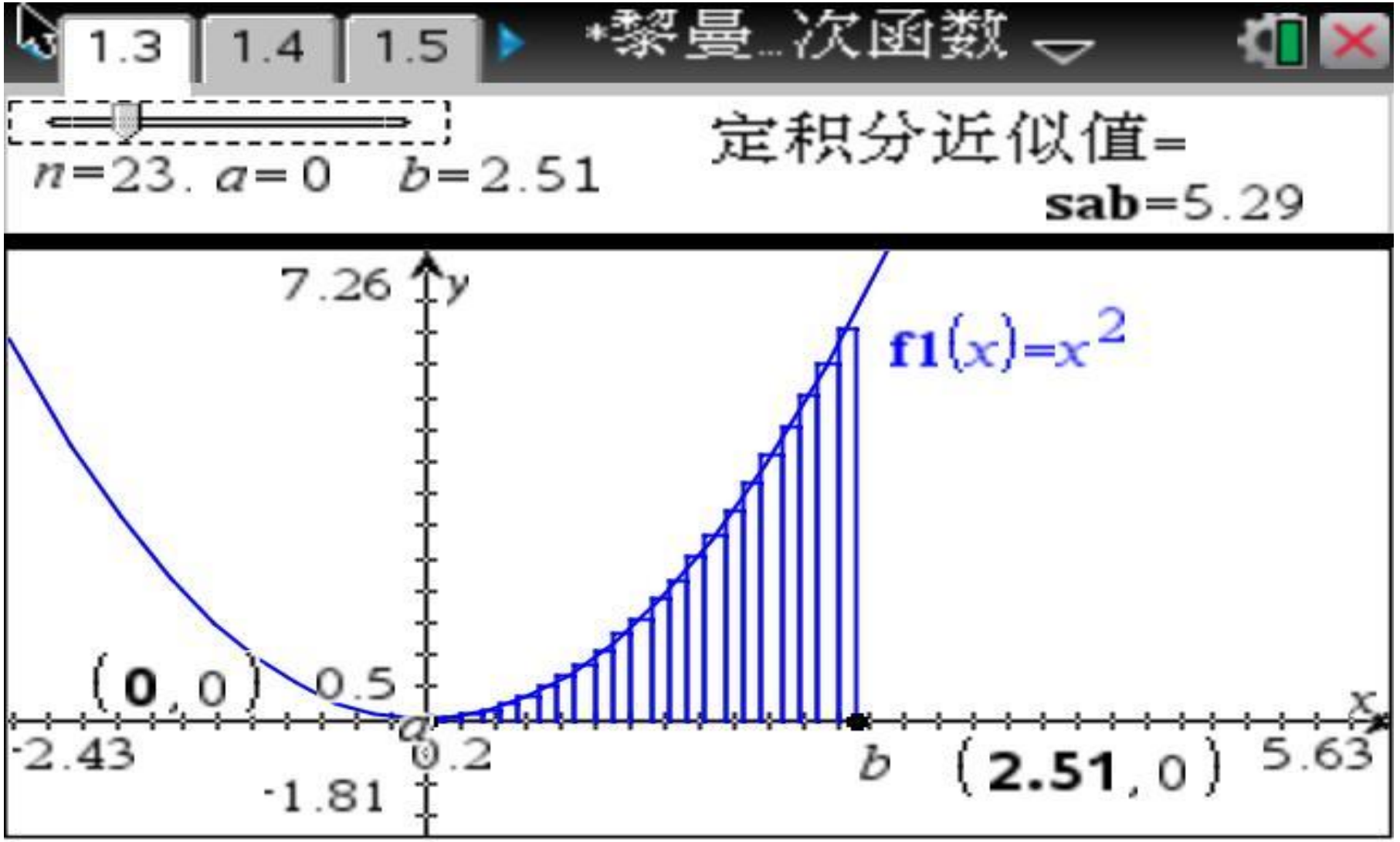
为什么是它

- 在数学上有很重要的地位
- 真实的研究历程比较清楚
- 比较难理解
- 高考
- 传统的讲法
- 能否让学生自己通过数学实验探究出来？！

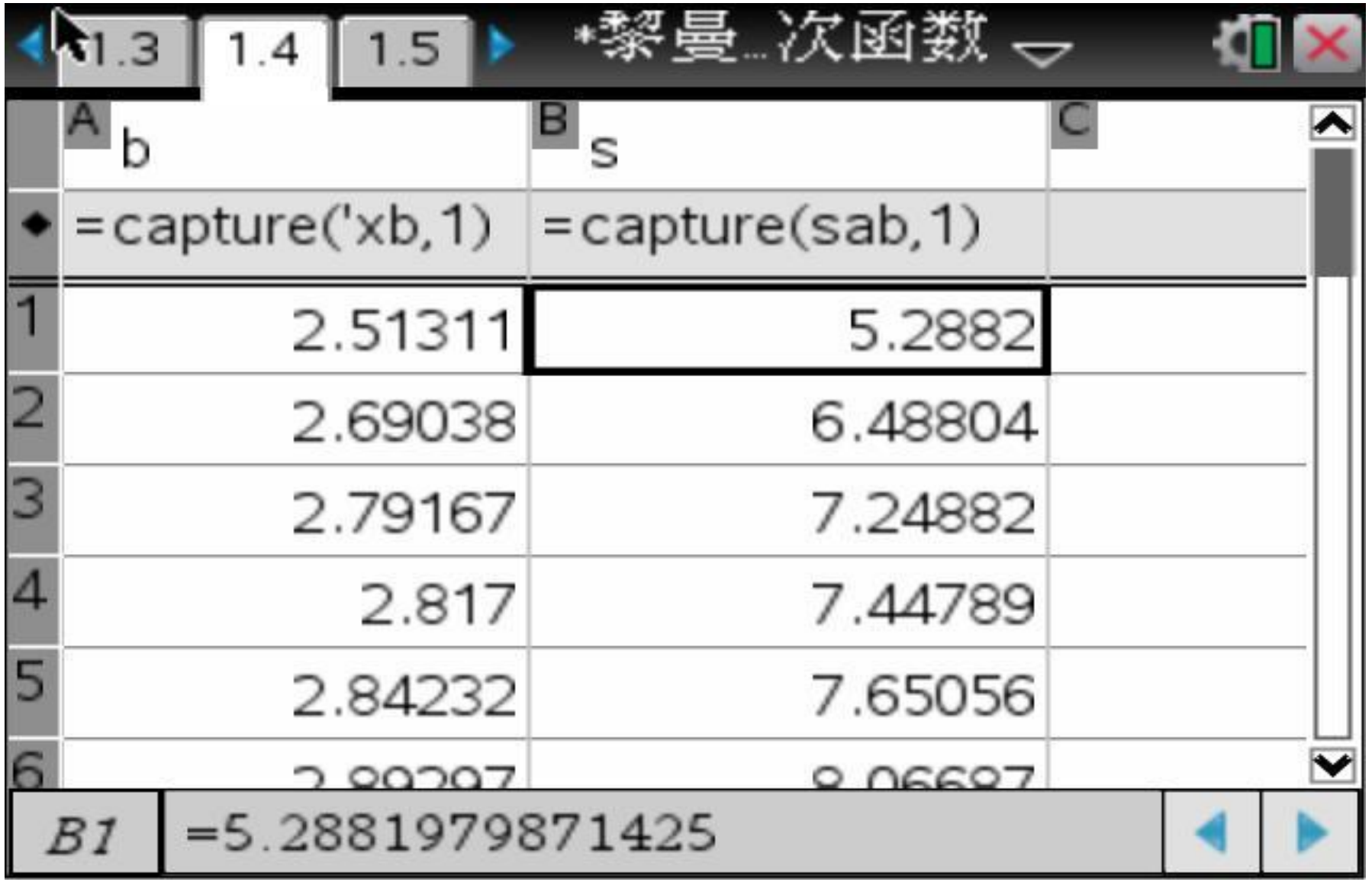
本质:变上限函数

我们要求解定积分$\int_0^b x^2 \mathrm{d}x$，由图象可知，对每一个 $b \in R$，存在唯一确定的值$S = \int_0^b x^2 \mathrm{d}x$与之对应，因此这可以看成一个函数$S = F(b)$。我们如何研究这个函数呢？由于对每个确定的$b$，应用定义我们可以得到$S = \int_0^b x^2 \mathrm{d}x$的近似值，因此通过画散点图我们观察一下它的图象。

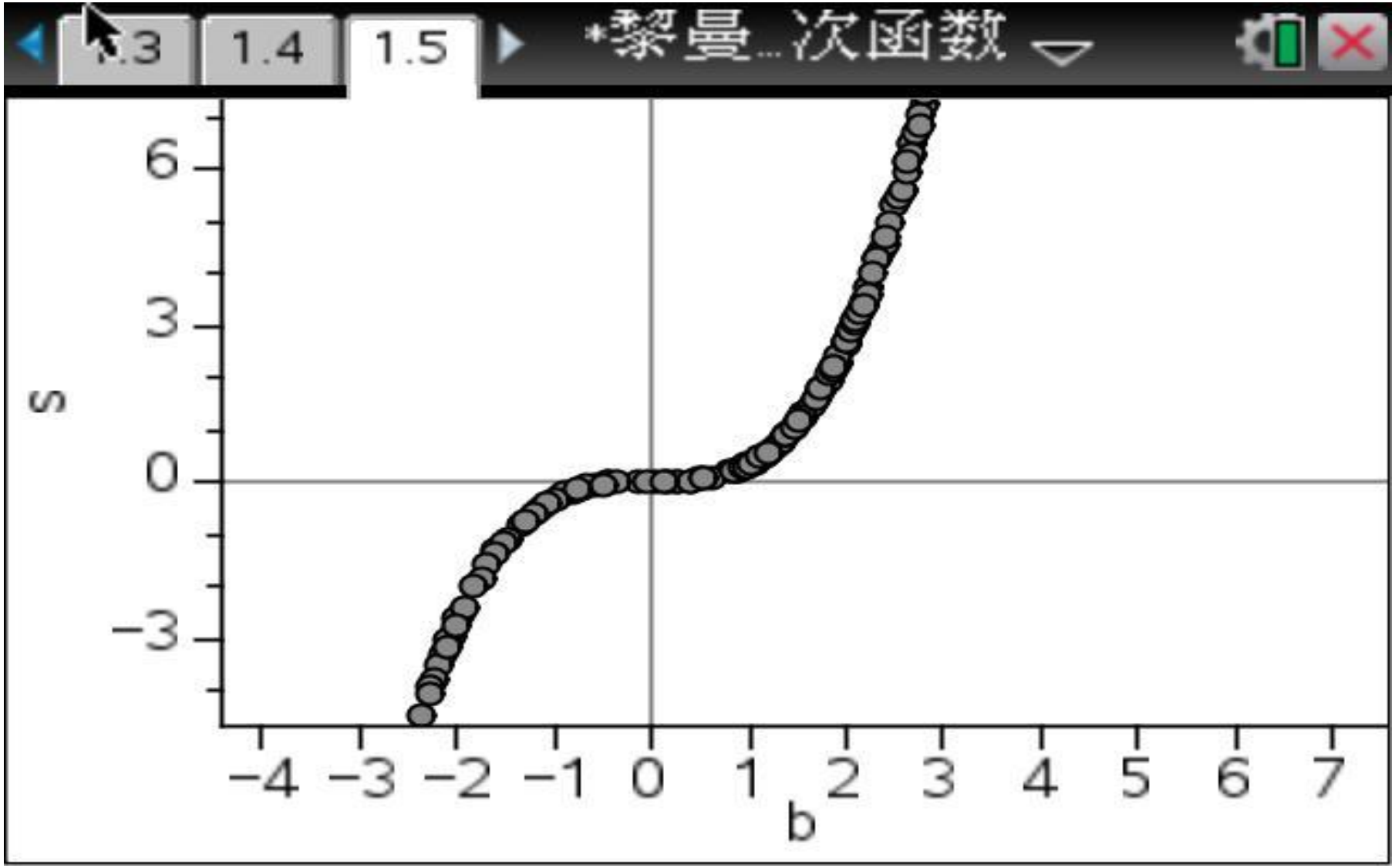
画图并观察数据变化


1.3
1.4
1.5
*黎曼_次函数
n=23. a=0 b=2.51
定积分近似值=
sab=5.29
7.26
y
f1(x)=x^2
(0, 0)
0.5
-2.43
-1.81
0.2
a
b
(2.51, 0)
5.63
x

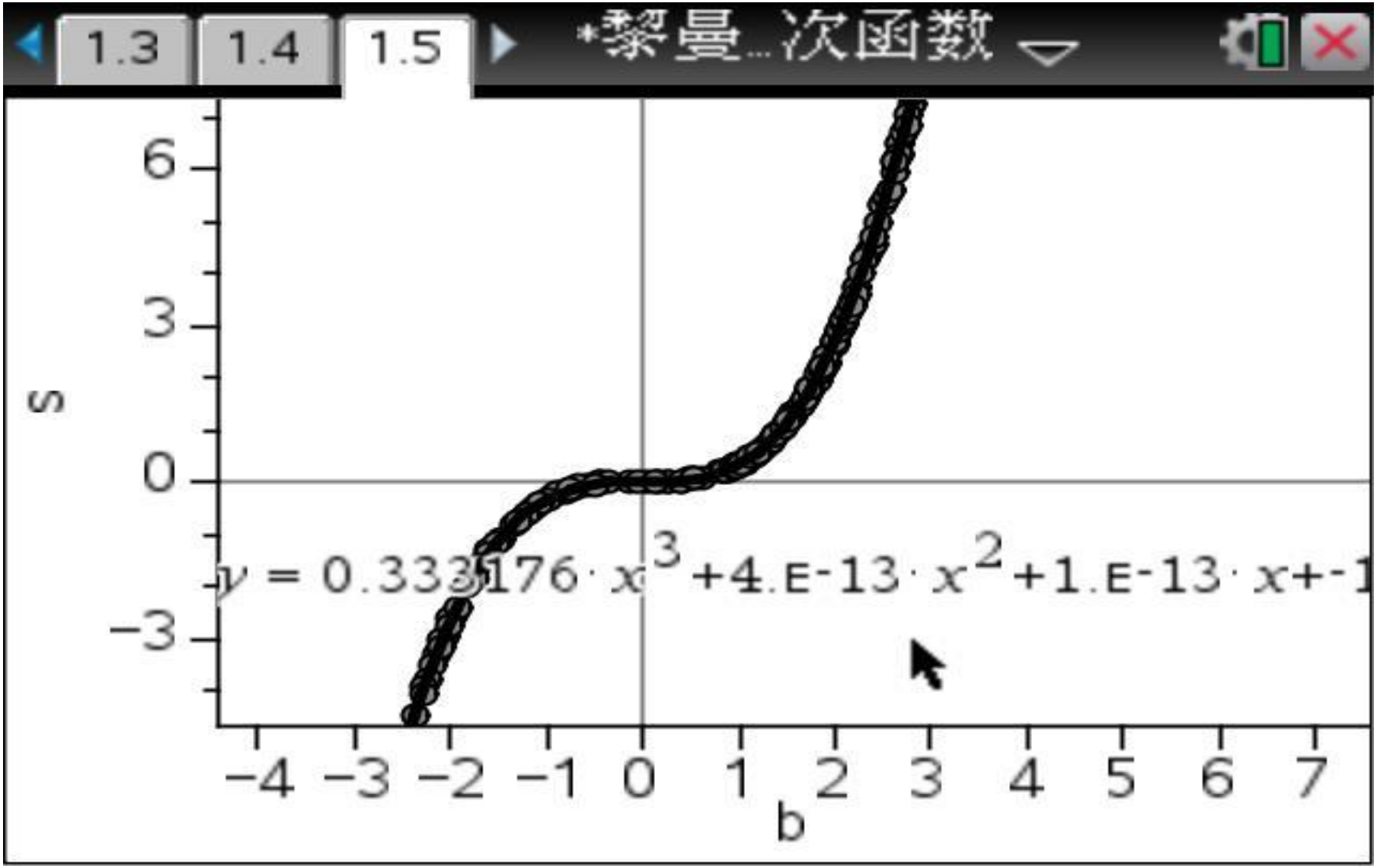
表格呈现数据


1.3
1.4
1.5
*黎曼...次函数
A b
B s
C
=capture('xb,1)
=capture(sab,1)
1 2.51311 5.2882
2 2.69038 6.48804
3 2.79167 7.24882
4 2.817 7.44789
5 2.84232 7.65056
6 2.89297 8.06687
B1
=5.2881979871425

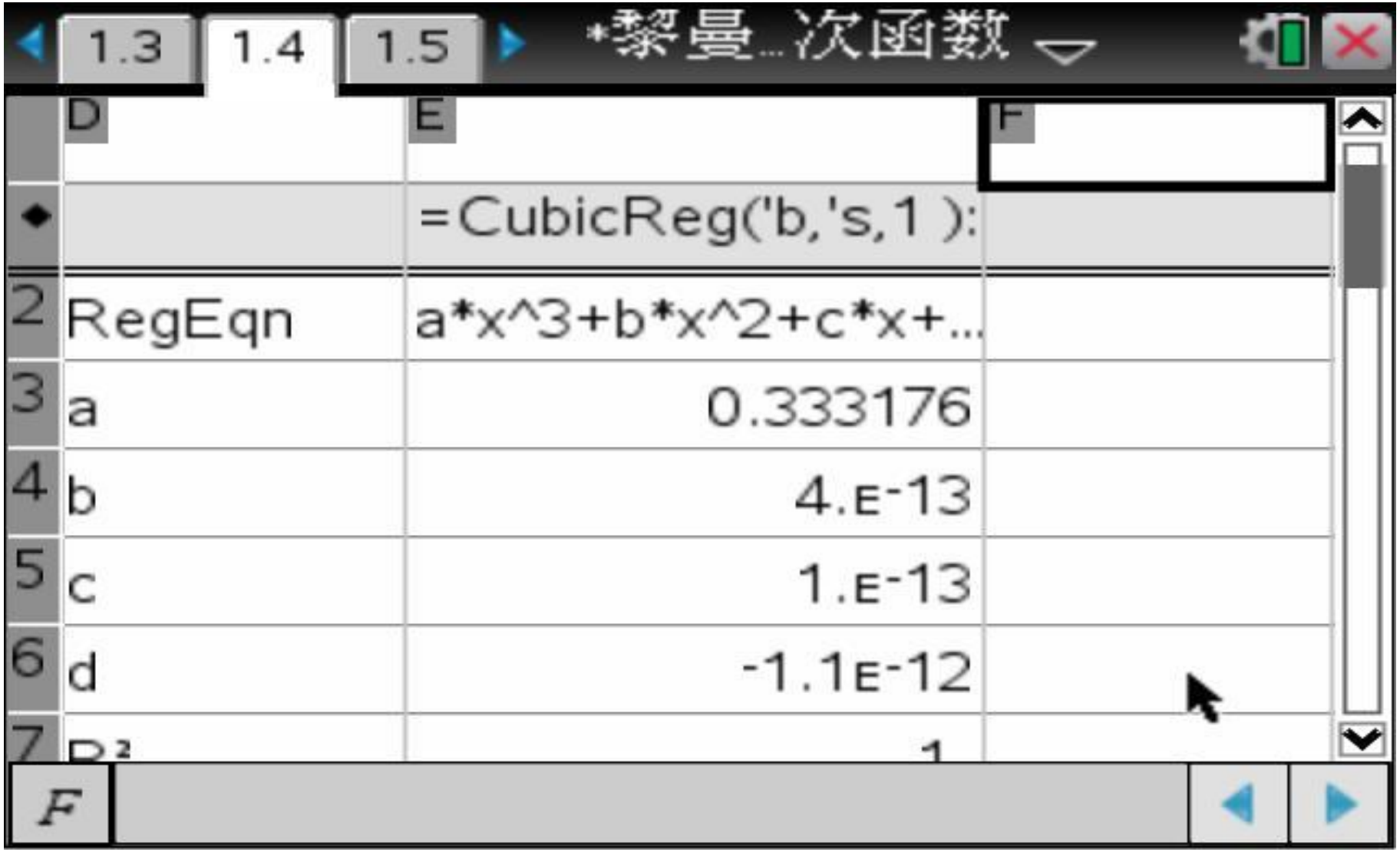
画散点图



拟合


1.3
1.4
1.5
*黎曼...次函数
6
3
0
−3
s
y = 0.333176 · x^3 +4.E-13 · x^2 +1.E-13 · x+-1
−4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 5 6 7
b

观察拟合程度


1.3
1.4
1.5
*黎曼...次函数
D
E
F
=CubicReg('b,'s,1):
2 RegEqn a*x^3+b*x^2+c*x+...
3 a 0.333176
4 b 4.E-13
5 c 1.E-13
6 d -1.1E-12
7
F

猜想结论

通过上述实验，我们发现数据是完全拟合，因此得到如下函数关系：

$$S = \frac{1}{3}b^3$$

考虑到$S = \int_0^b x^2 \mathrm{d}x$，所以我们得到

$$\int_0^b x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{3}b^3$$

当积分下限a变化时，有如下结论

$$\int_a^b x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{3}a^3$$

教学目标

- 了解微积分基本定理的内容，能结合物理意义了解微积分基本定理的“证明”，会用微积分基本定理求简单的定积分。
- 通过探究定积分对积分上限变化的依赖关系，经历定理的发现过程，培养分析问题、解决问题的能力，体会从局部到整体，从具体到一般的研究问题方法。
- 通过建立微分与定积分之间的联系，体会微积分基本定理的威力，体会“以直代曲”、“无限逼近”的思想。

重难点

- 教学重点

  探究和了解微积分基本定理的含义，初步运用基本定理计算简单的定积分。

- 教学难点

  了解微积分基本定理的含义

教学过程

一、课题引入

二、新课探究

（一）问题提出

（二）思路分析

（三）实验过程

（四）形成猜想

（五）解释猜想

（六）形成命题

（七）定理应用

三、归纳小结

四、课后作业

一、课题引入

问题一:如何用定义计算$\int_1^b \frac{1}{x}\mathrm{dx}$?

设计意图：引起认知冲突，激发寻求计算定积分新方法的认知需求。

取$b=2$，计算$\int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{dx}$

用定义的“四步曲”(分割、近似代替、求和、取极限)求解$\int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{dx}$，当运算到“求和”时，就会发现，这个和$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n-1}$是求不出来的

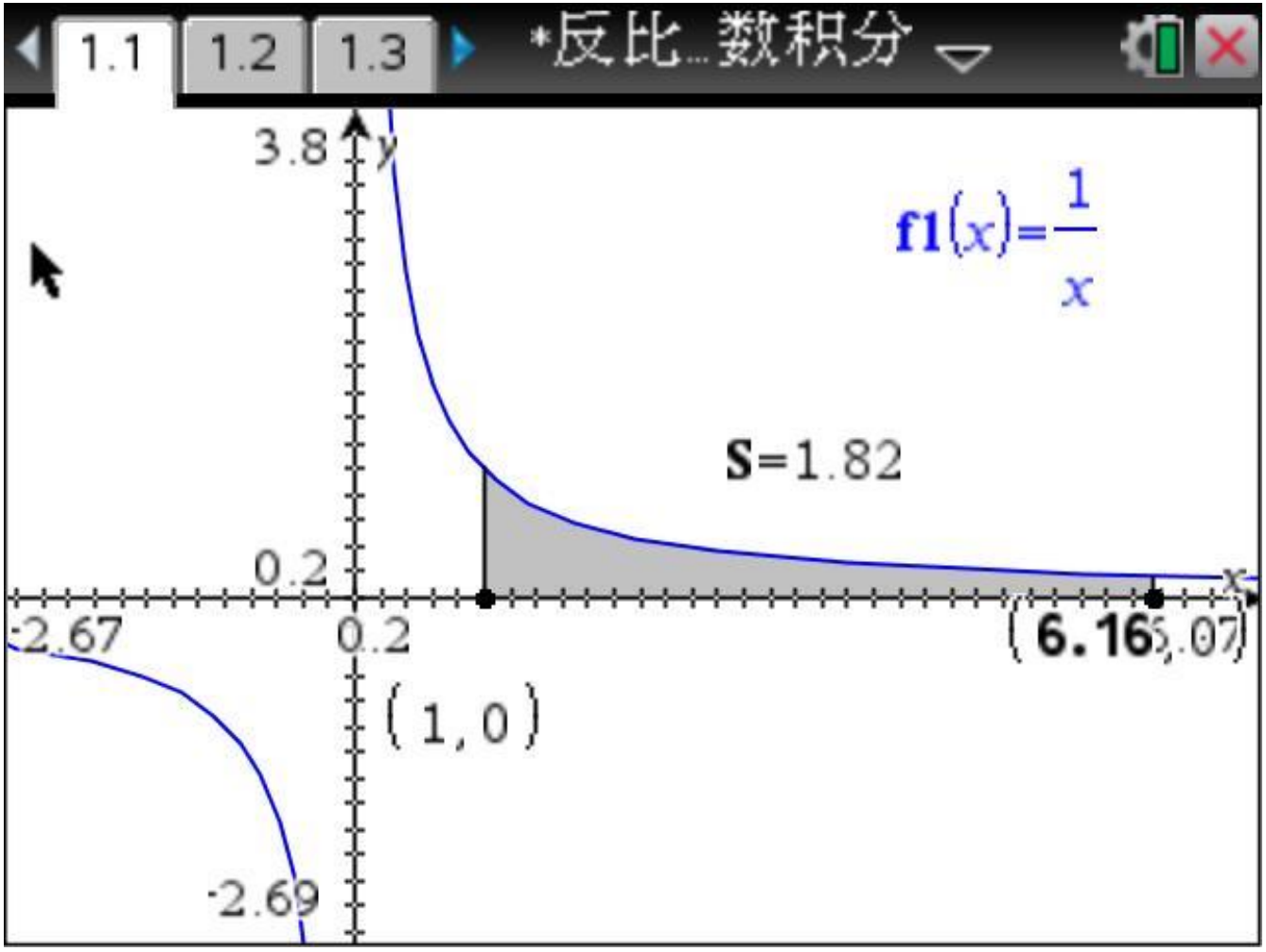
教材上是由$\int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$引入

思路分析

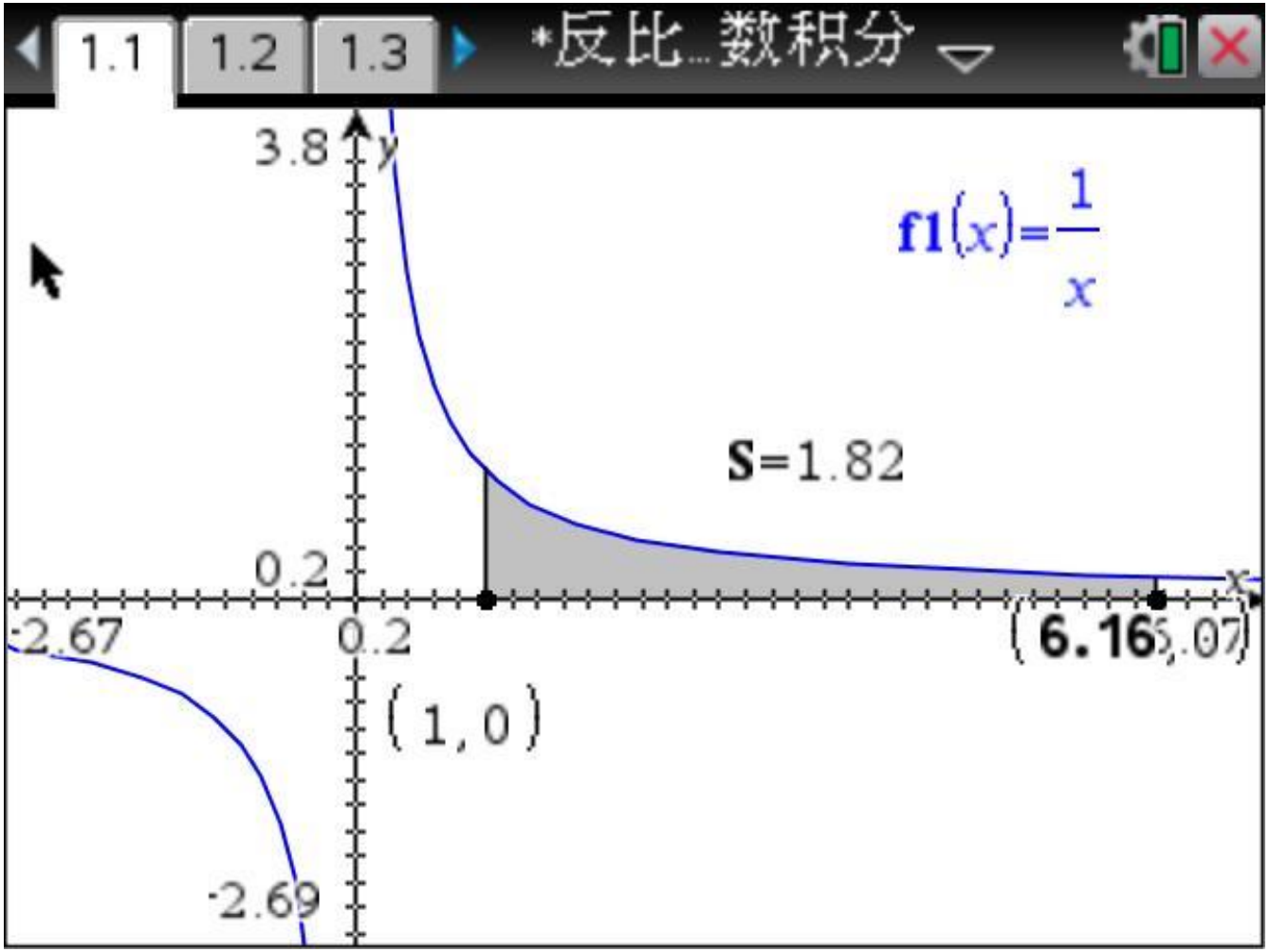
$$S = F(b) = \int_1^b \frac{1}{x}\mathrm{dx}\ （b > 0）$$

由于对每个确定的b，如何得到$S = \int_1^b \frac{1}{x}\mathrm{dx}$的近似值？

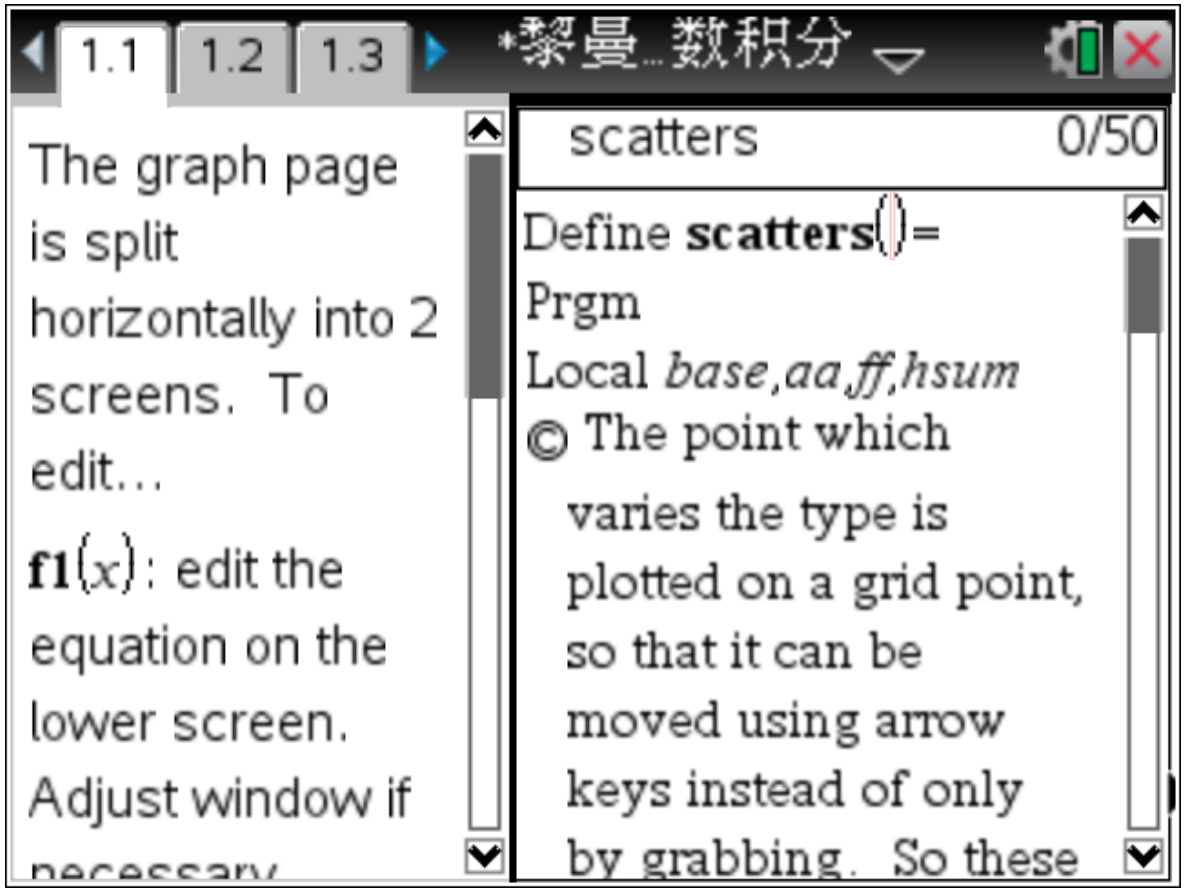
TI自带的功能



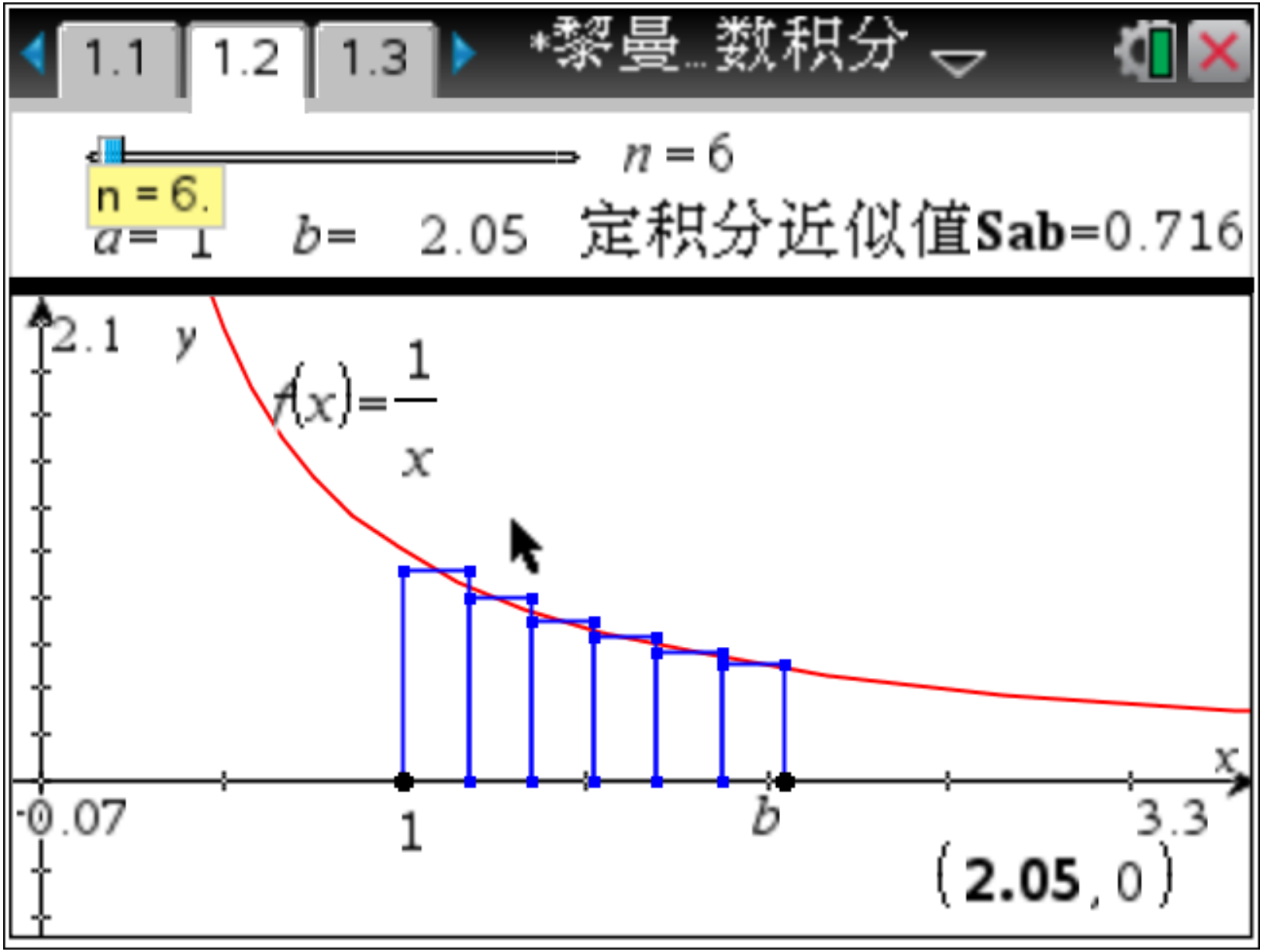
TI自带的功能

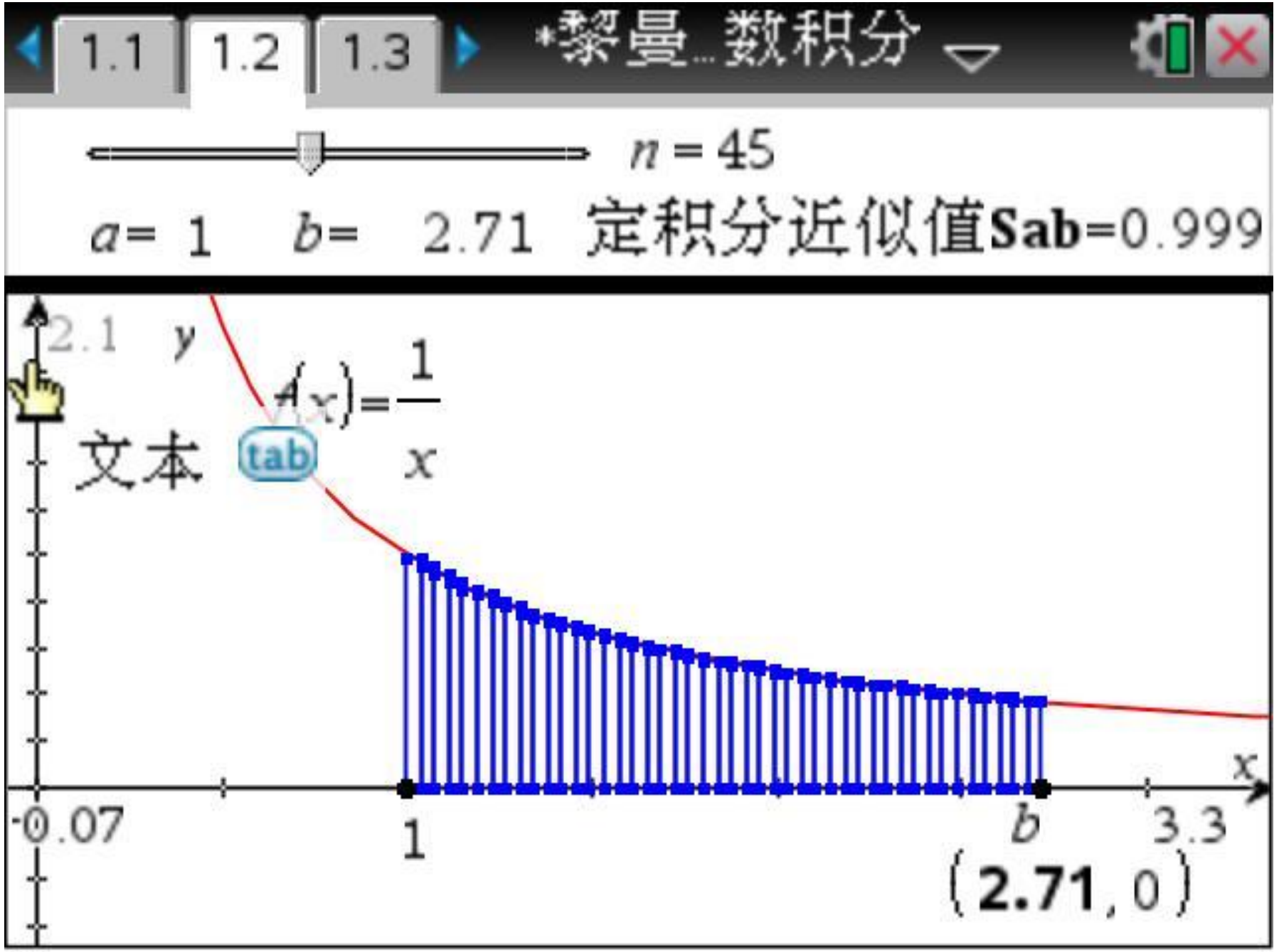


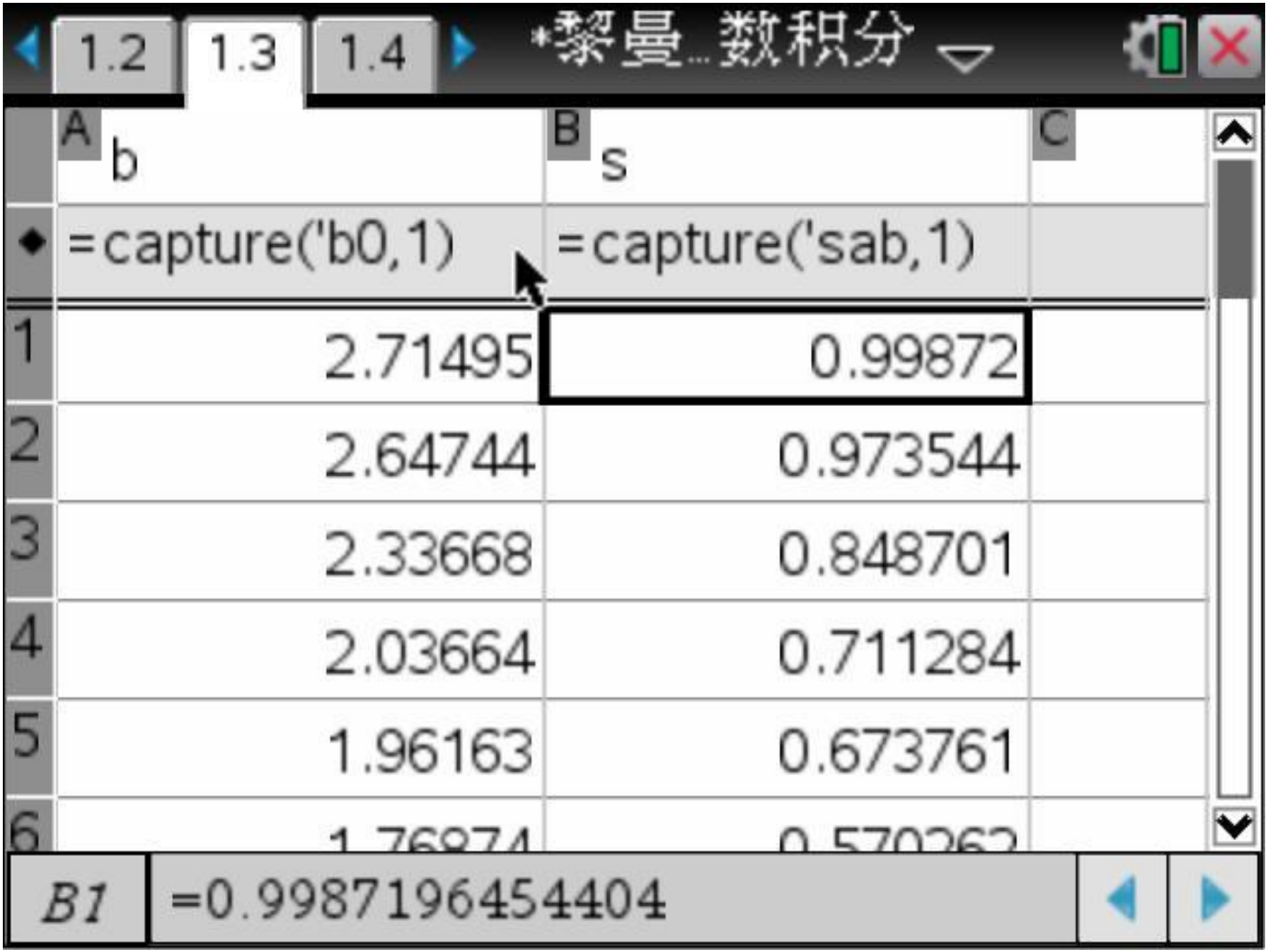
会有什么问题？

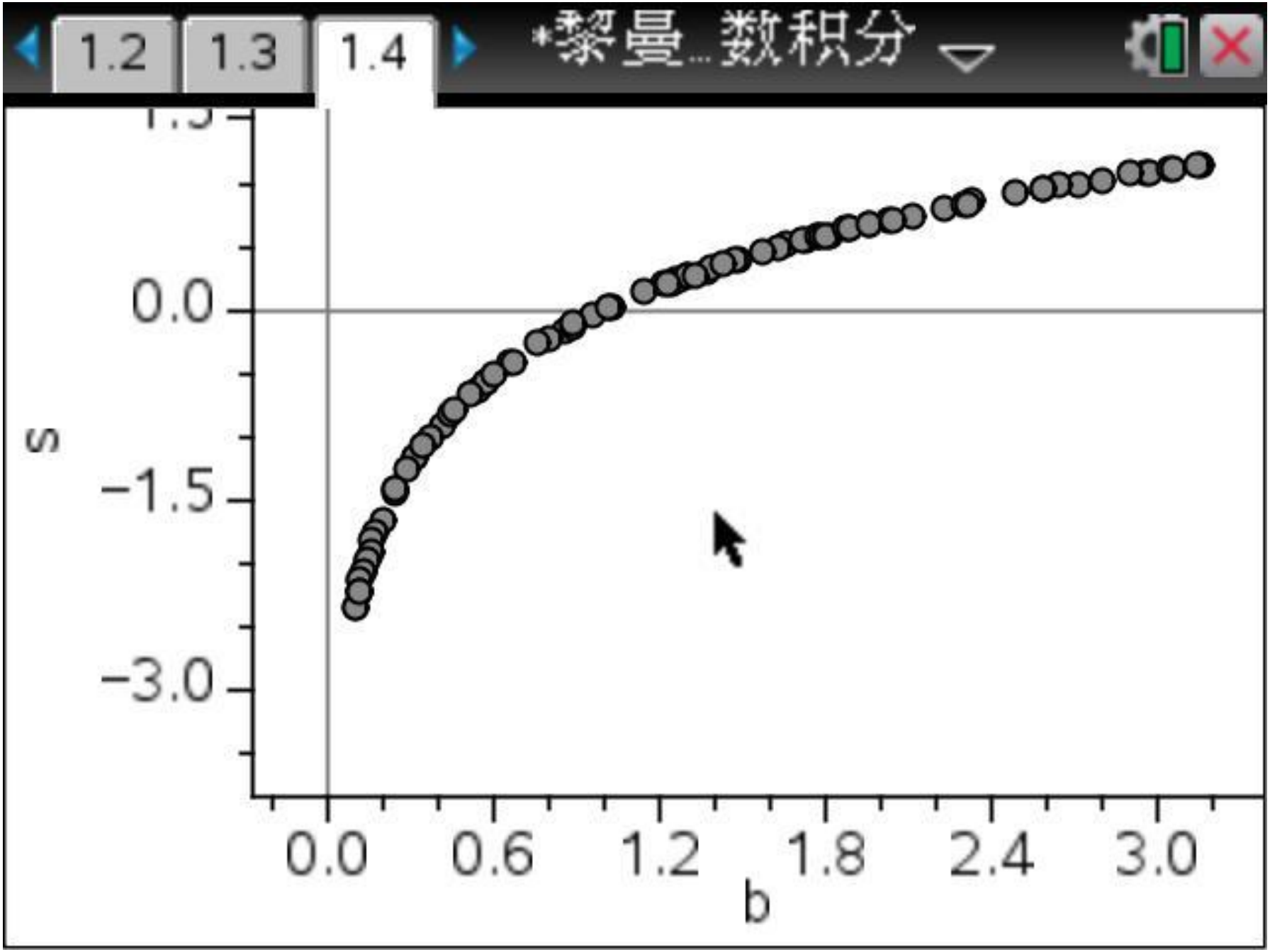


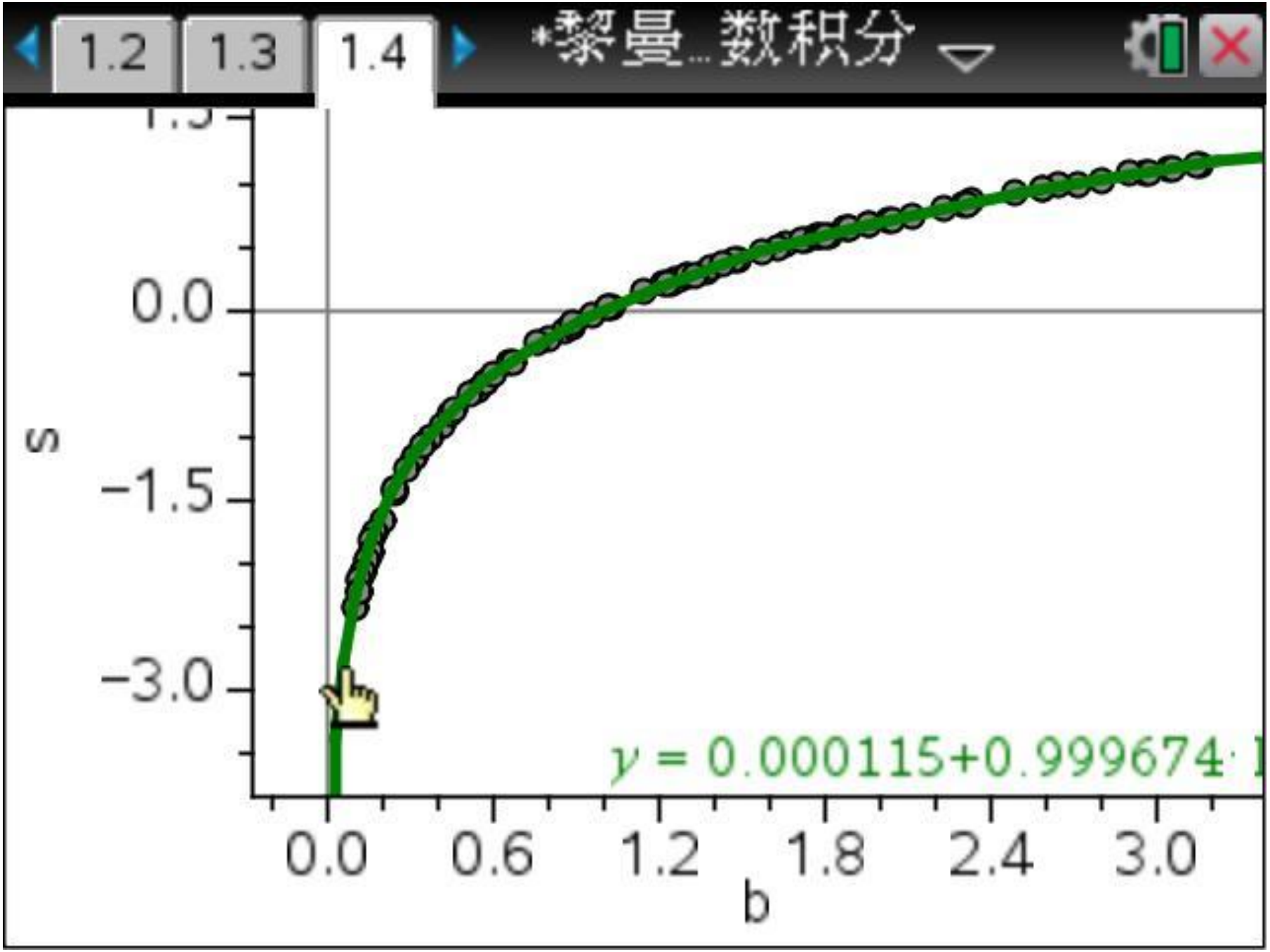
$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} f(\xi_i) = \int_a^b f(x)dx$$

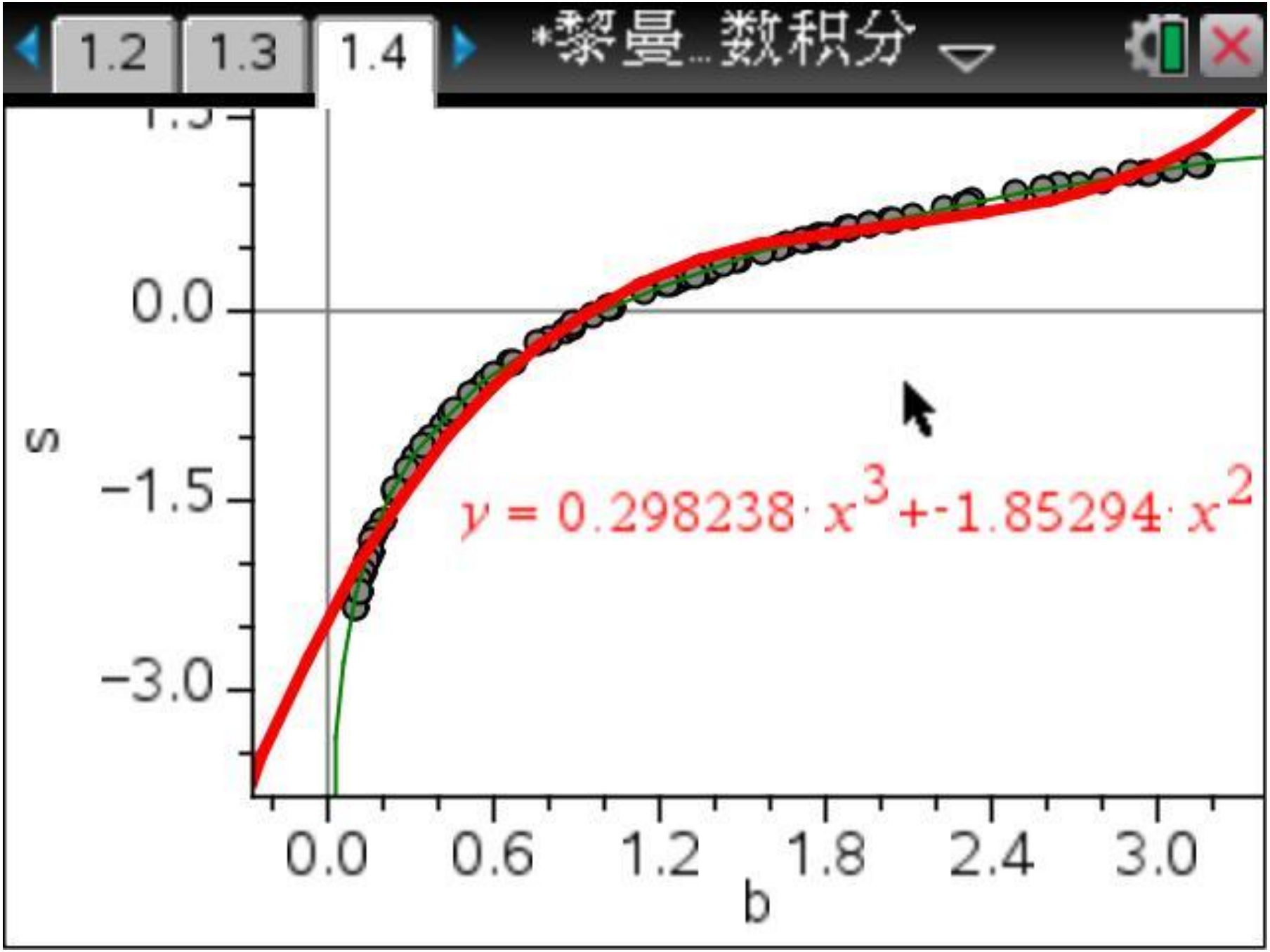

1.1
1.2
1.3
*黎曼...数积分
n = 6
n = 6.
a= 1
b= 2.05
定积分近似值Sab=0.716
2.1
y
f(x)=1/x
x
-0.07
1
b
3.3
(2.05, 0)


1.1
1.2
1.3
*黎曼...数积分
n = 45
a= 1
b= 2.71
定积分近似值Sab=0.999
2.1
y
f(x)=1/x
文本
tab
x
-0.07
1
b
3.3
(2.71, 0)


1.2
1.3
1.4
*黎曼...数积分
A
b
B
s
C
=capture('b0,1)
=capture('sab,1)
1
2.71495
0.99872
2
2.64744
0.973544
3
2.33668
0.848701
4
2.03664
0.711284
5
1.96163
0.673761
6
B1
=0.9987196454404


1.2
1.3
1.4
*黎曼...数积分
0.0
−1.5
−3.0
s
0.0
0.6
1.2
1.8
2.4
3.0
b


1.2
1.3
1.4
*黎曼...数积分
0.0
−1.5
−3.0
s
y = 0.000115+0.999674·
0.0
0.6
1.2
1.8
2.4
3.0
b


1.2
1.3
1.4
*黎曼...数积分
0.0
−1.5
−3.0
s
$y = 0.298238 \cdot x^3 + -1.85294 \cdot x^2$
0.0
0.6
1.2
1.8
2.4
3.0
b

1.2
1.3
1.4
*黎曼...数积分
F
G
H
I
=LnReg('b,'s,1): C
1
标题
对数回归
2
RegEqn
a+b*ln(x)
3
a
0.000115
4
b
0.999674
5
r²
1.
6
B1
=0.9987196454404

1.2 | 1.3 | 1.4 | *黎曼...数积分

	D	E	F
◆		=CubicReg('b,'s,1): Copy'	
=	RegEqn	a*x^3+b*x^2+c*x+d	
3	a	0.298238	
4	b	-1.85294	
5	c	4.0696	
6	d	-2.45529	
7	R^2	0.989598	

H2 ="a+b· ln(x)"

从拟合结果的比较我们可以看出对数函数的拟合效果最好，是完全拟合，因此我们猜想$S = F(b)$的解析式可以用初等函数表示为

$$F(b) = \int_1^b \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln b \ (b > 0)$$

从拟合结果的比较我们可以看出对数函数的拟合效果最好，是完全拟合，因此我们猜想$S = F(b)$的解析式可以用初等函数表示为

$$F(b) = \int_1^b \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln b \ (b > 0)$$

为计算$\int_a^b \frac{1}{x}\mathrm{dx}$，是否要对积分下限 a 进行归纳？

更进一步，由定积分性质可以得到：

$$\int_a^b \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \int_1^b \frac{1}{x}\mathrm{d}x - \int_1^a \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln b - \ln a \,(b > 0, a > 0)$$

这样我们得到反比例函数的积分公式，由此公式我们可以方便的计算出反比例函数在x轴正半轴任一闭区间上的定积分。

（二）新课探究

（一）问题提出：

由问题一出发，你能提出更一般性的问题吗？

问题二：对一般函数$f(x)$，固定积分下限，使积分上限变化得到的函数

$$F(b)=\int_{c}^{b} f(x)\mathrm{d}x，\ (\text{其中}c\text{为常数})$$

可不可以用初等函数表示？

如果这一问题得到解决，由定积分性质：

$$\int_{\mathbf{c}}^{a} f(x)\mathrm{d}x + \int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \int_{c}^{b} f(x)\mathrm{d}x$$

有：

$$\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \int_{c}^{b} f(x)\mathrm{d}x - \int_{c}^{a} f(x)\mathrm{d}x$$

我们实际上相当于给出一般函数的积分公式。

$$\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

$$F(b)=\int_1^b \frac{1}{x}dx \ \ (b>0)$$

$$F(b)=\ln b\ (b>0)$$

$$\int_1^b \frac{1}{x}dx=\ln b \quad (b>0)$$

$$\int_a^b \frac{1}{x}dx=\ln b-\ln a \quad (a,b>0)$$

反比例函数的积分公式

$$F(b)=\int_c^b f(x)dx \quad (b\in \mathrm{A},\ \mathrm{c}\text{为常数})$$

$F(b)$有初等函数表示的解析式

$$\int_c^b f(x)dx=F(b) \quad (b\in \mathrm{A})$$

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a) \quad (a,b\in \mathrm{A})$$

一般函数的积分公式

（二）思路分析：

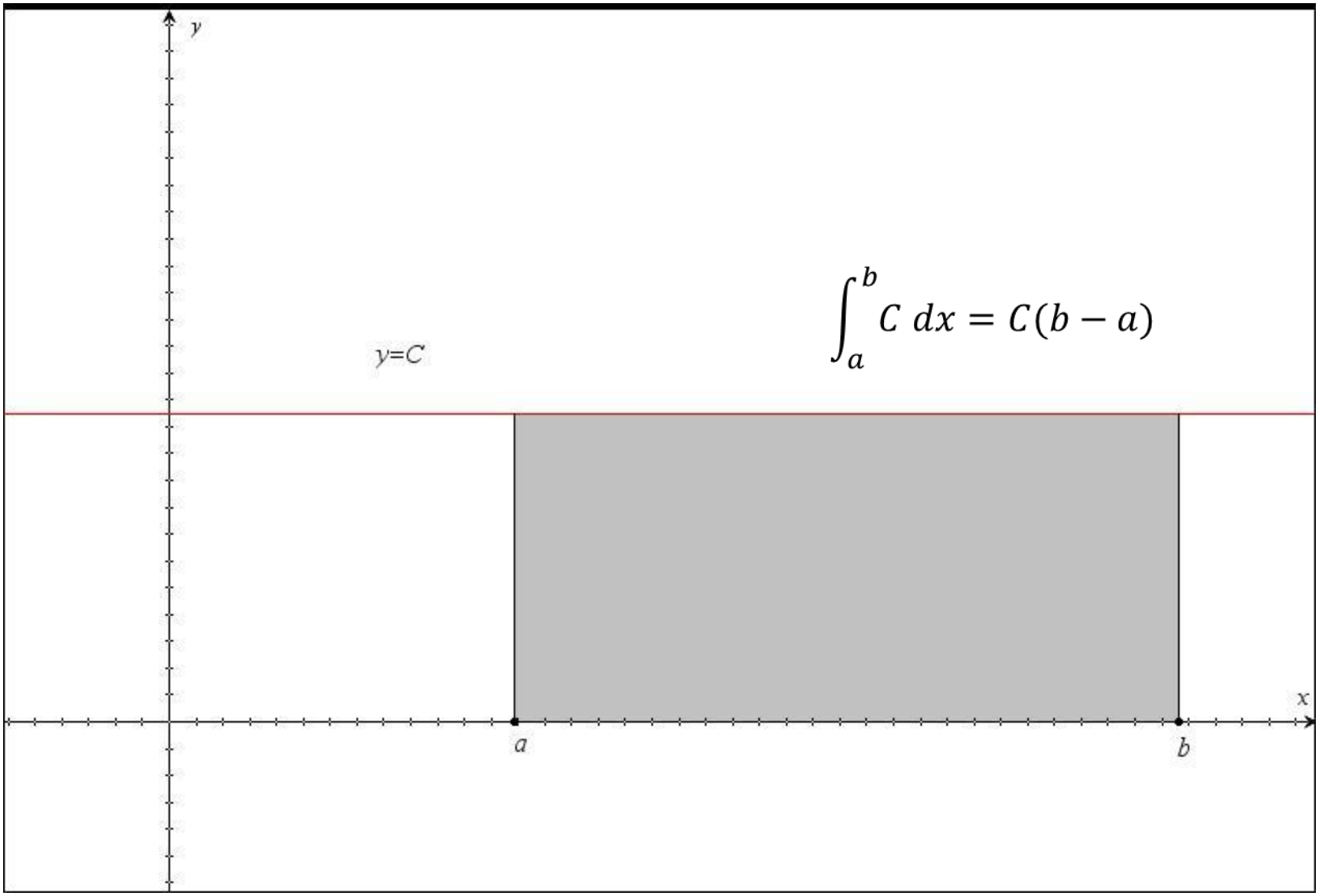
问题三：为解决问题二，可以从哪方面入手？

学生活动：小组讨论并汇报思路。

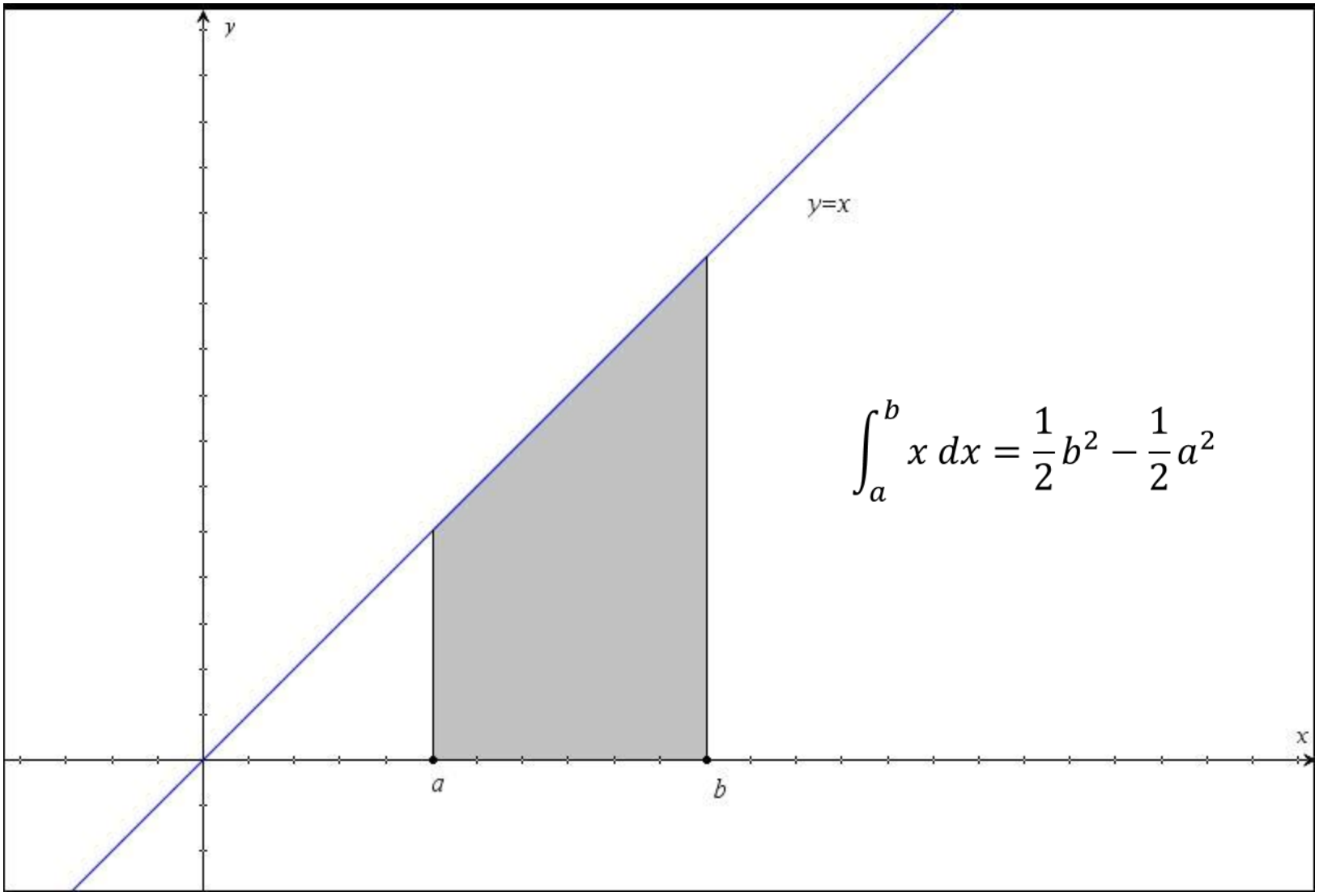
对于常函数和一次函数，由定积分的几何性质，我们之前已经得到如下的简单公式：

$$\int_a^b \mathrm{C}\,\mathrm{d}x = \mathrm{C}(b-a)$$

$$\int_a^b x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(b^2-a^2)$$

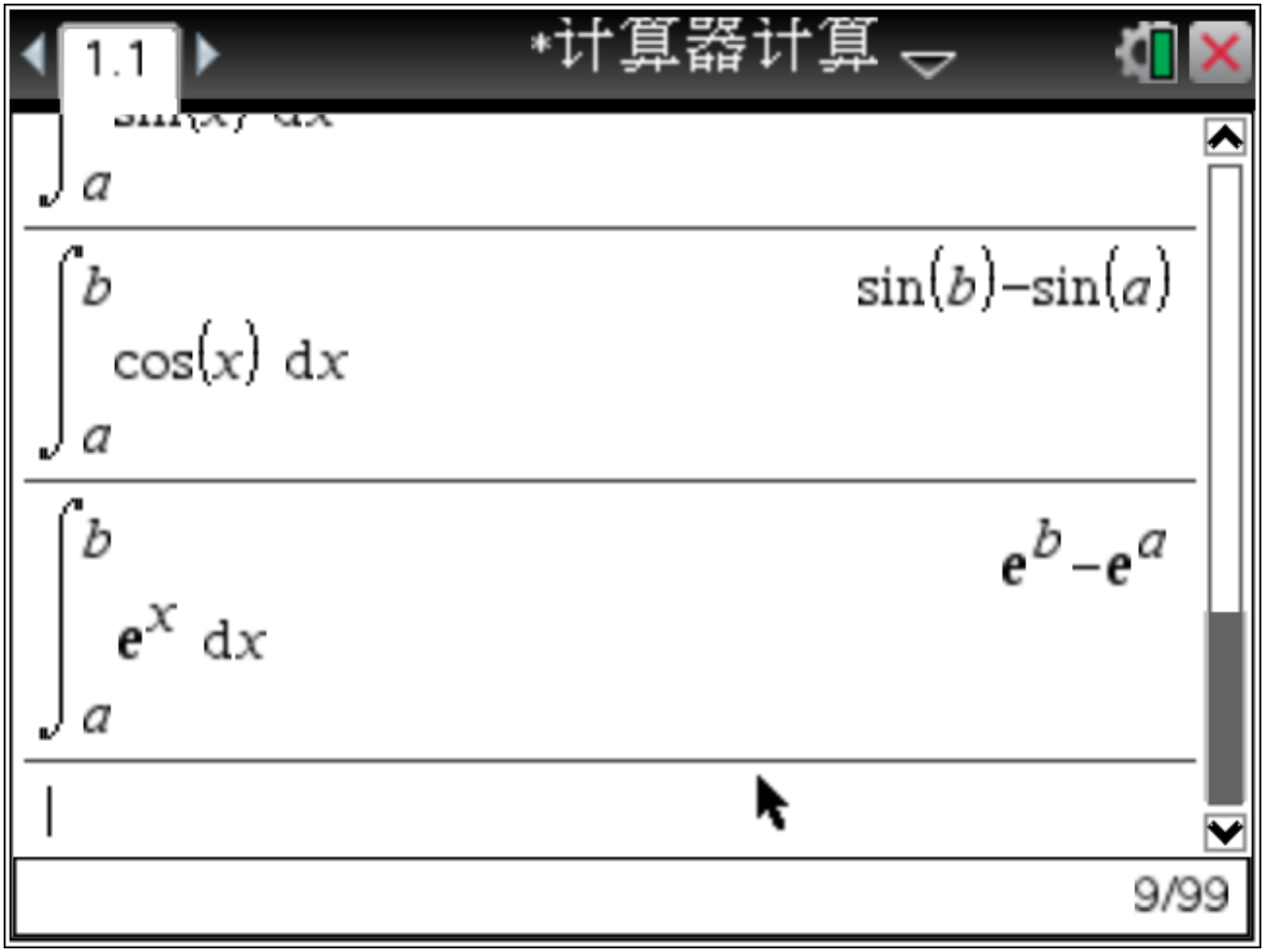


$$\int_a^b C\,dx = C(b-a)$$



$$\int_a^b x\,dx = \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}a^2$$

一种想法


1.1
*计算器计算
$\int_a^b \sin(x)\,dx$
$\sin(b)-\sin(a)$
$\int_a^b \cos(x)\,dx$
e^b-e^a
$\int_a^b e^x\,dx$
9/99

对其他初等函数，例如最简单最熟悉的$f(x)=x^2$的积分，可以完成类似于问题一的实验：令积分下限固定，例如$a=0$，考虑函数$S=F(b)=\int_0^b x^2\mathrm{d}x$的初等函数表示。更进一步，通过对不同的被积函数进行实验，归纳和猜想一般结论。

（三）实验过程：

学生活动：各小组选取不同的被积函数进行实验，并填写实验报告册，实验结束后汇报实验结果。

（四）形成猜想

问题四：对比各小组的实验结果，你能归纳猜想出一般结论吗？

学生活动：小组讨论并猜想一般结论。

被积函数	积分公式
三次函数	
正弦函数	
余弦函数	
指数函数	
反比例函数	

猜想 1:对满足一定性质的函数$f(x)$,存在函数$F(x)$，有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

追问：函数$f(x)$和函数$F(x)$之间有什么关系？

（五）解释猜想

问题五：以变速直线运动为例，如何理解猜想 1？

小问题：

（1）如果做直线运动的物体的运动规律是$y = y(t)$如何表示物体在$[a, b]$内的位移s？

（2）物体在时刻t的速度如何表示？

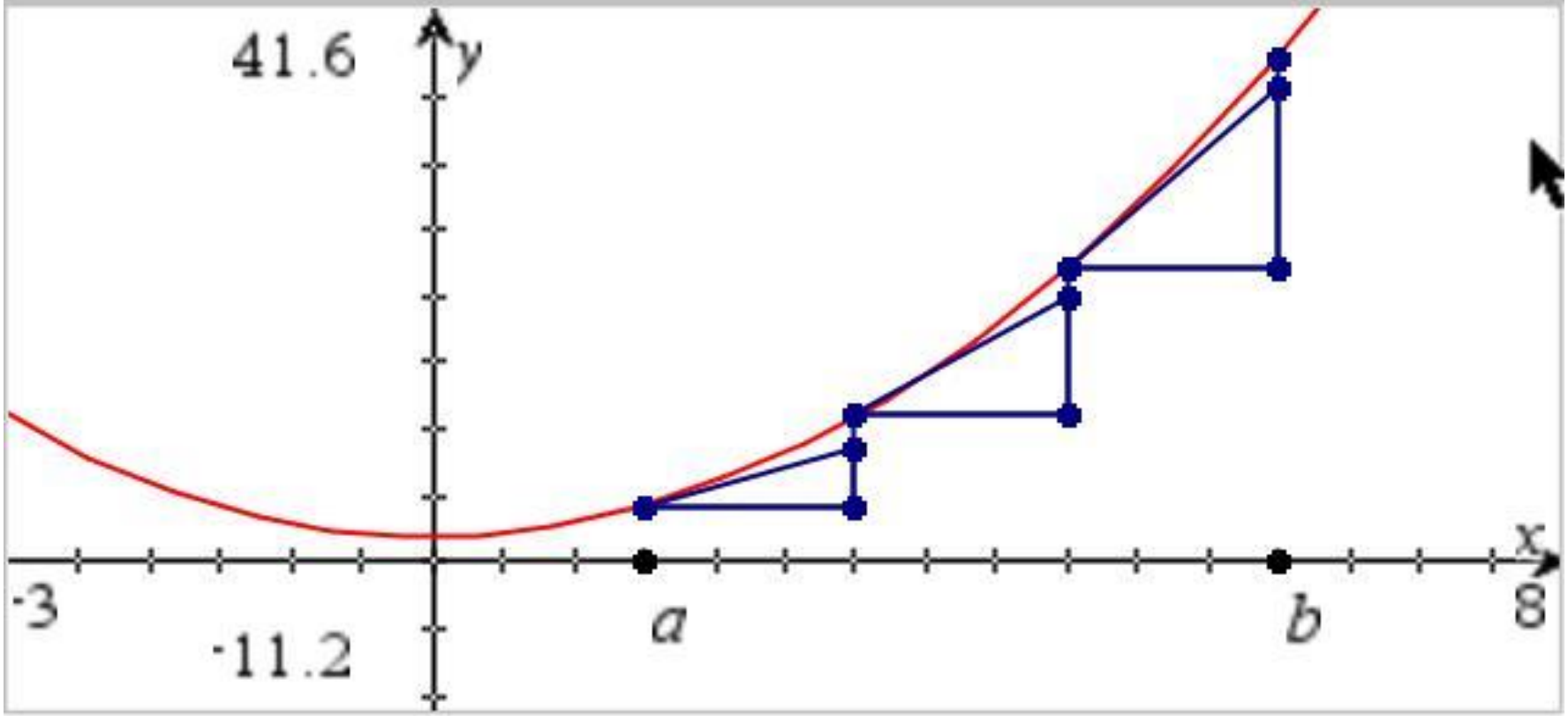
（3）如何用$v(t)$]表示物体在$[a, b]$内的位移s?

$n = 3.$

$a = 1.5$

$b = 6$

exact= 33.8 approx= 27.



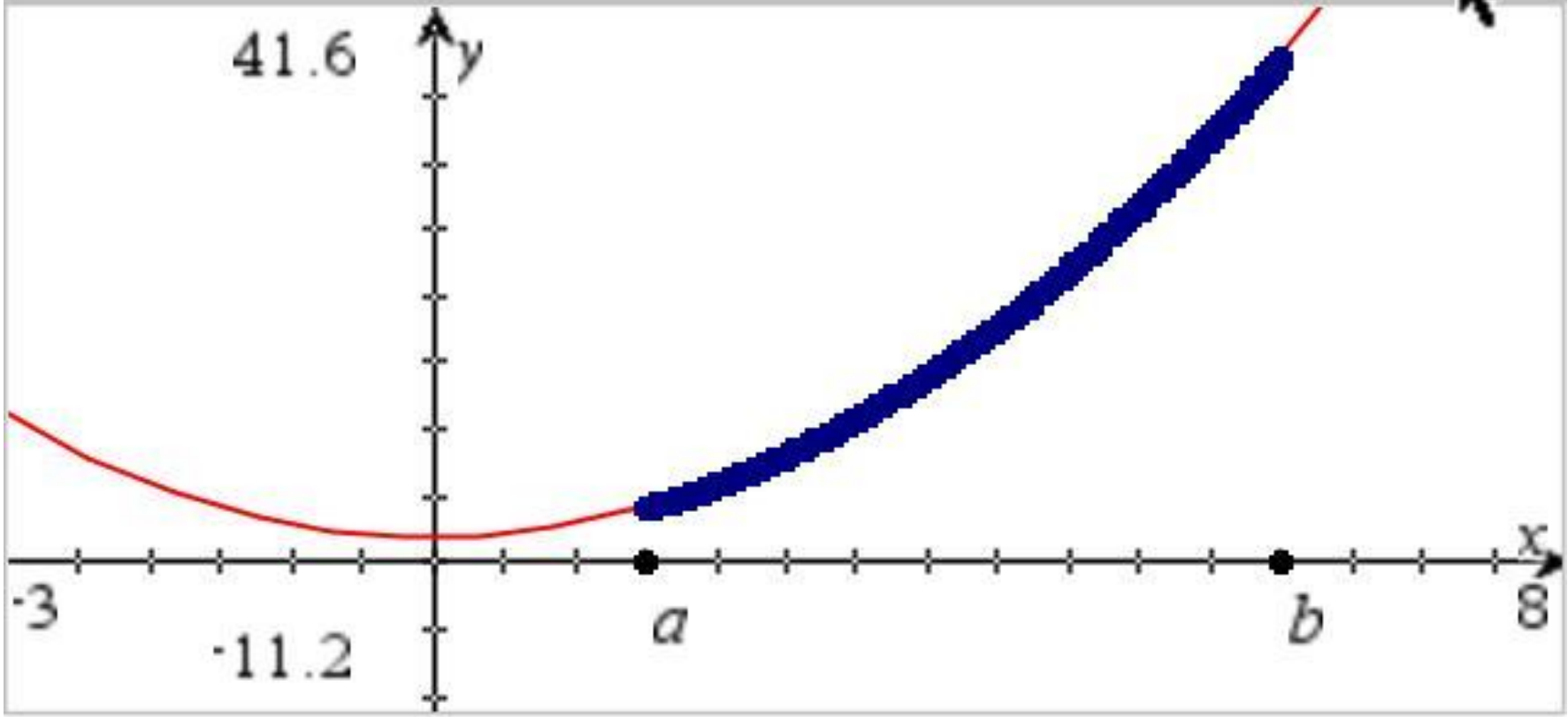
1.1 1.2 *微积...解释2

$n = 91.$

$a = 1.5$

$b = 6$

exact= 33.8 approx= 33.527472527



（六）形成命题

定理：如果函数$f(x)$是$[a,b]$上的连续函数，并且$F'(x)=f(x)$（称满足这一个关系的$F(x)$为$f(x)$的原函数），则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)|_a^b = F(b)-F(a)$$

该定理称为微积分基本定理。

对定理地位的评论

“17 世纪的前半叶是微积分学的酝酿时期，观念在摸索中，计算是个别的，应用也是个别的。而后戈特弗里德·威廉·莱布尼茨和艾萨克·牛顿两人几乎同时使微积分观念成熟，澄清微、积分之间的关系，使计算系统化，并且把微积分大规模使用到几何与物理研究上”（来自维基百科），因此这个公式也称为牛顿—莱布尼兹公式。

它指出了求连续函数定积分的一般方法，把求定积分的问题，转化成求原函数的问题，使得导数与定积分之间，更进一步微分学与积分学之间建立联系，并发展成为微积分学。微积分学的发展与应用几乎影响了现代生活的所有领域。它与大部分科学分支关系密切，特别是物理学；经济学亦经常会用到微积分学。几乎所有现代技术，如建筑、 航空等都以微积分学作为基本数学工具。

（七）定理应用：

例 1．计算下列定积分：

（1）$\int_1^2 \frac{1}{x}dx$；

（2）$\int_1^3 (2x-\frac{1}{x^2})dx$。

教学追求

- 更有意义
- 更求本质
- 更加融合

教学追求

- 更有意义
- 更求本质
- 更加融合

信息技术

更有意义的数学

对学生长期发展的意义

- 计算定积分的一种有效方法
- 研究问题的一般方法，包括特殊到一般的思想，研究变量之间关系的一般方法，统计方法的应用，编程的意识等

更有意义的数学学习过程

- “一有想法就试试看”
- 直接自然的思路，避免过分技巧化
- “可操作”、“可视化”
- 即时互动、共同学习的环境
- 课堂生成的教学资源

设计更有效的探究活动

- 在活动中培养学生提出问题、分析问题、解决问题的能力，发展数学思维能力
- 强大的信息技术支持有利于设计和实施过去课堂中完全做不到的数学实验。

与现实更加紧密的结合

- 扩展教学中可作为研究事例的范围
- 现实发生、包含复杂数据的问题
- 更为复杂和现实的方式模拟情境和问题
- 研究的问题更加贴近生活、生产实际，使解答更加具有实际意义

更求本质的数学

追求对数学本质的理解

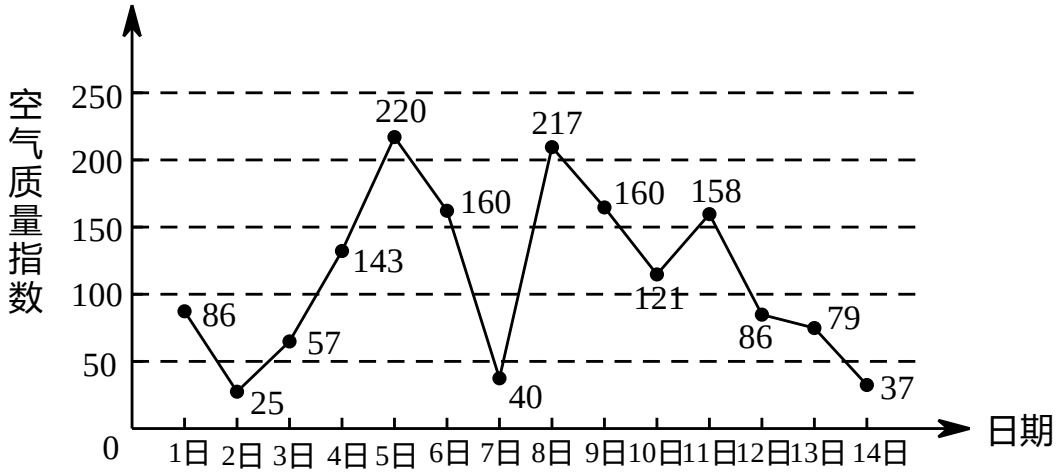
- 技术代替手工进行冗长而复杂的计算
- 学生能将注意力集中在理解数学的概念，体会数学的思想，选择解决问题更有效的方法和策略的研究上，设计更优的算法，
- 从砖瓦匠到设计师。

降低计算能力在数学理解中的作用

- 对那些在运算技巧上有困难的学生提供切实帮助
- 很多学生知道用什么概念、原理解题，但他们往往因为运算的问题而止步不前；

评价体系的导向作用

下图是某市 3 月 1 日至 14 日的空气质量指数趋势图，空气质量指数小于 100 表示空气质量优良，空气质量指数大于 200 表示空气重度污染．某人随机选择 3 月 1 日至 3 月 15 日中的某一天到达该市，并停留 2 天．



（Ⅲ）由图判断从哪天开始连续三天的空气质量指数方差最大？（结论不要求证明）

中山市2012—2013学年度第二学期期末统一考试高二数学试卷

19. （14 分）已知直线 l：$y=x+2$ 与抛物线 $x^2=y$ 交于 $A(x_A,y_A)$、$B(x_B,y_B)$ 两点，l 与 x 轴交于点 $C(x_C,0)$.

（1）求证：$\frac{1}{x_A}+\frac{1}{x_B}=\frac{1}{x_C}$；

（2）求直线 l 与抛物线所围平面图形的面积；

（3）某同学利用 TI-Nspire 图形计算器作图验证结果时（如图 1 所示），尝试拖动改变直线 l 与抛物线的方程，发现 $\frac{1}{x_A}+\frac{1}{x_B}$ 与 $\frac{1}{x_C}$ 的计算结果依然相等（如图 2、图 3 所示），你能由此发现出关于抛物线的一般结论，并进行证明吗？

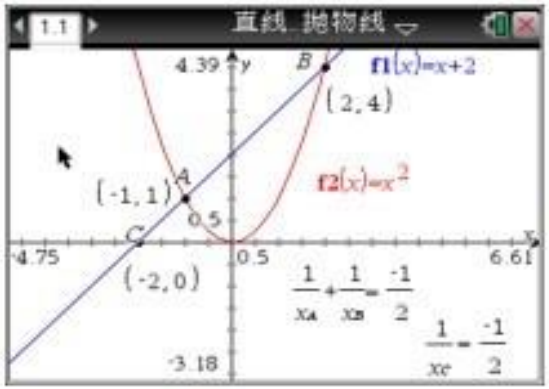


图 1

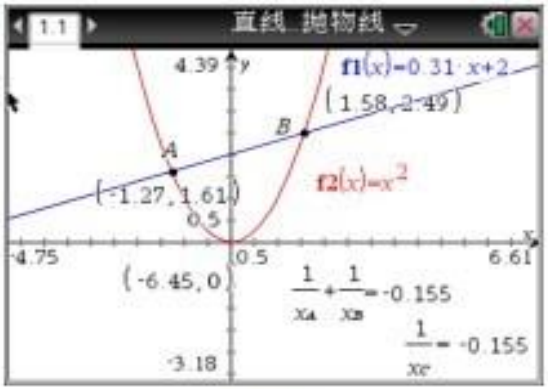


图 2

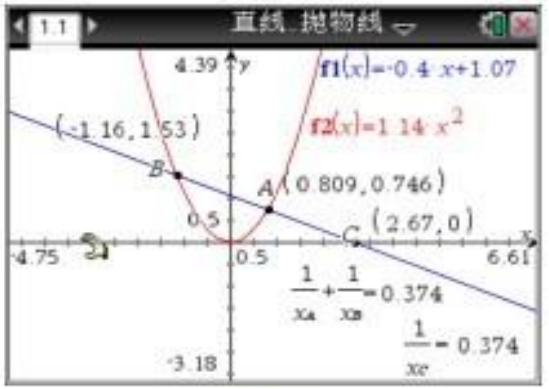


图 3

更加融合的数学

为数学学习提供“应用套件”，形成数据、图形、方程、模型（函数）、程序等的联动，真正实现代数、几何、数据处理等不同数学分支的融合，允许学生同时运用不同的数学表达来进行数学探索，为有不同认知风格、不同表达习惯的学生提供数学理解的机会；

机遇和挑战

- 一方面，为教师设计教学提供了更多样化的途径，更丰富的教学资源；

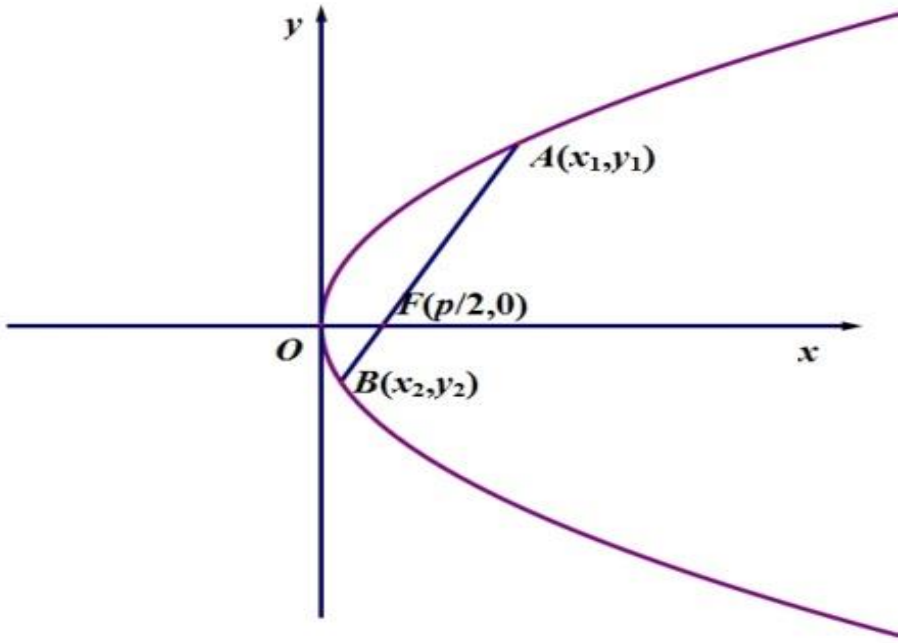
- 另一方面，也需要形成合力，共同对教学整合中应当遵循的原则、运用的方法等开展深入研究，开发大量教学案例、课件等，建设更多的、恰当的教学资源。

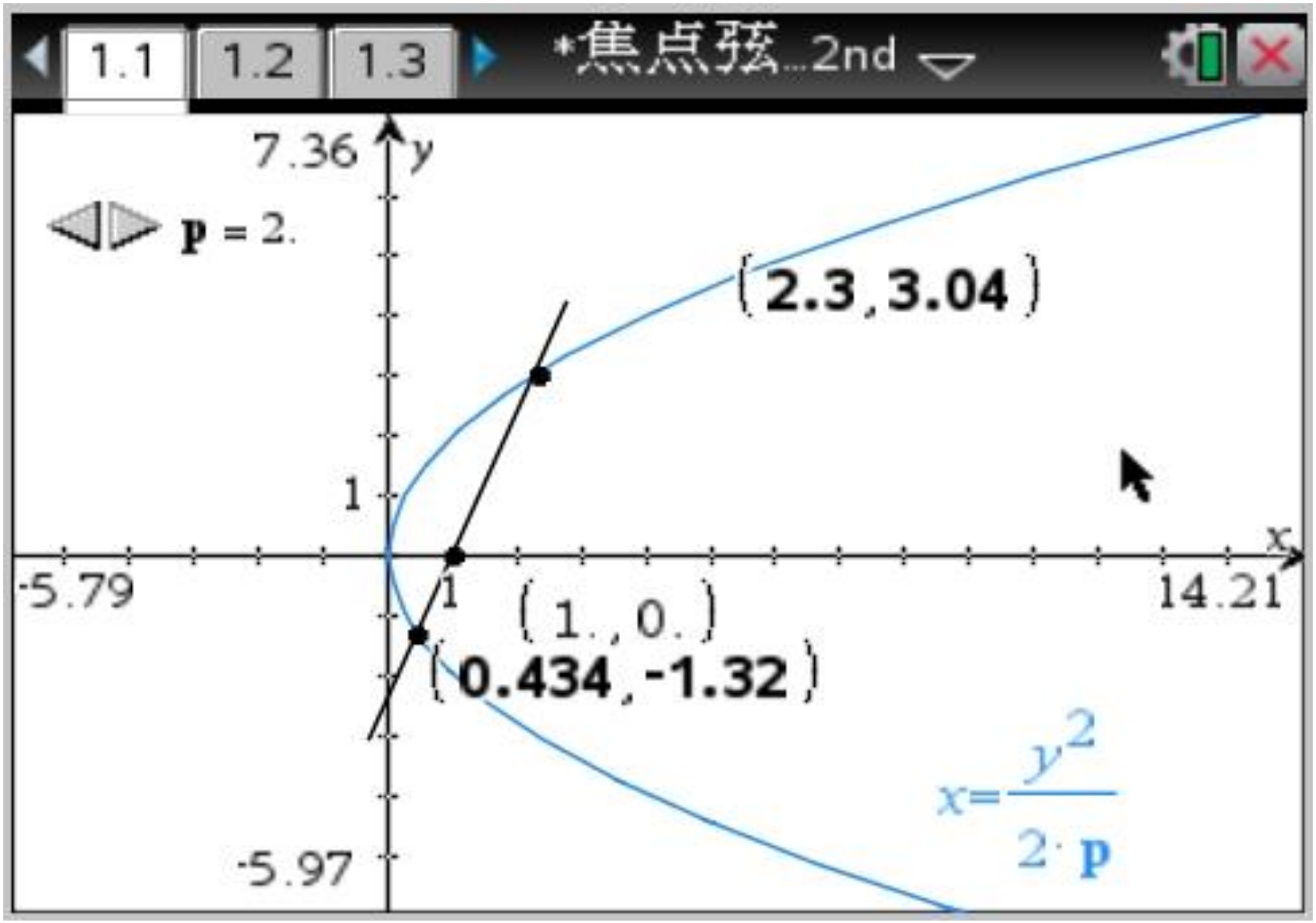
谢谢！

- 赵存宇
- 北京市第八十中学
- **15120094952**
- **15120094952@139.com**

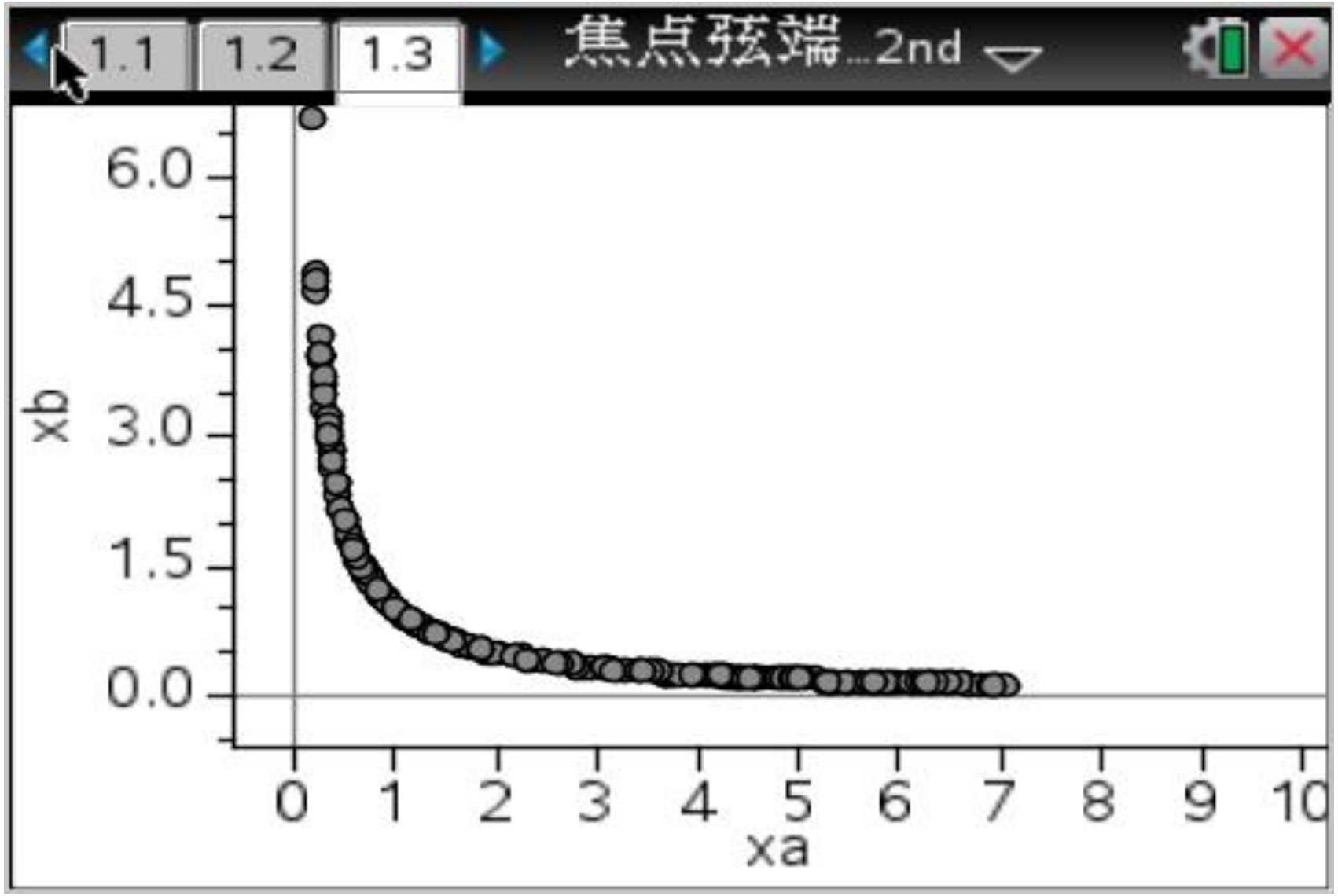
过抛物线 $y^2 = 2px(p > 0)$ 的焦点 F 的弦为 AB，$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$，则有

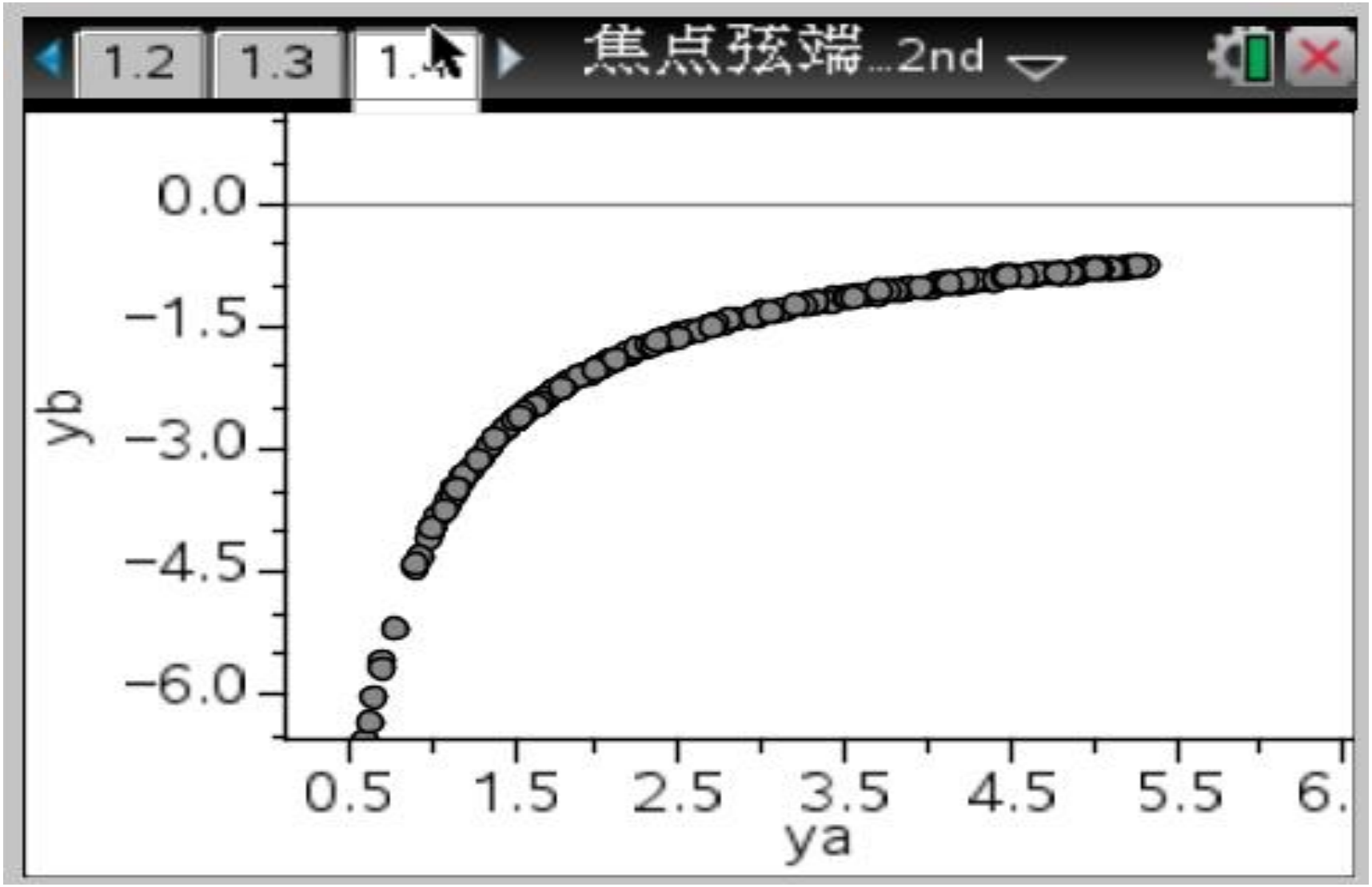
$$y_1 \cdot y_2 = -p^2, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{p^2}{4}.$$

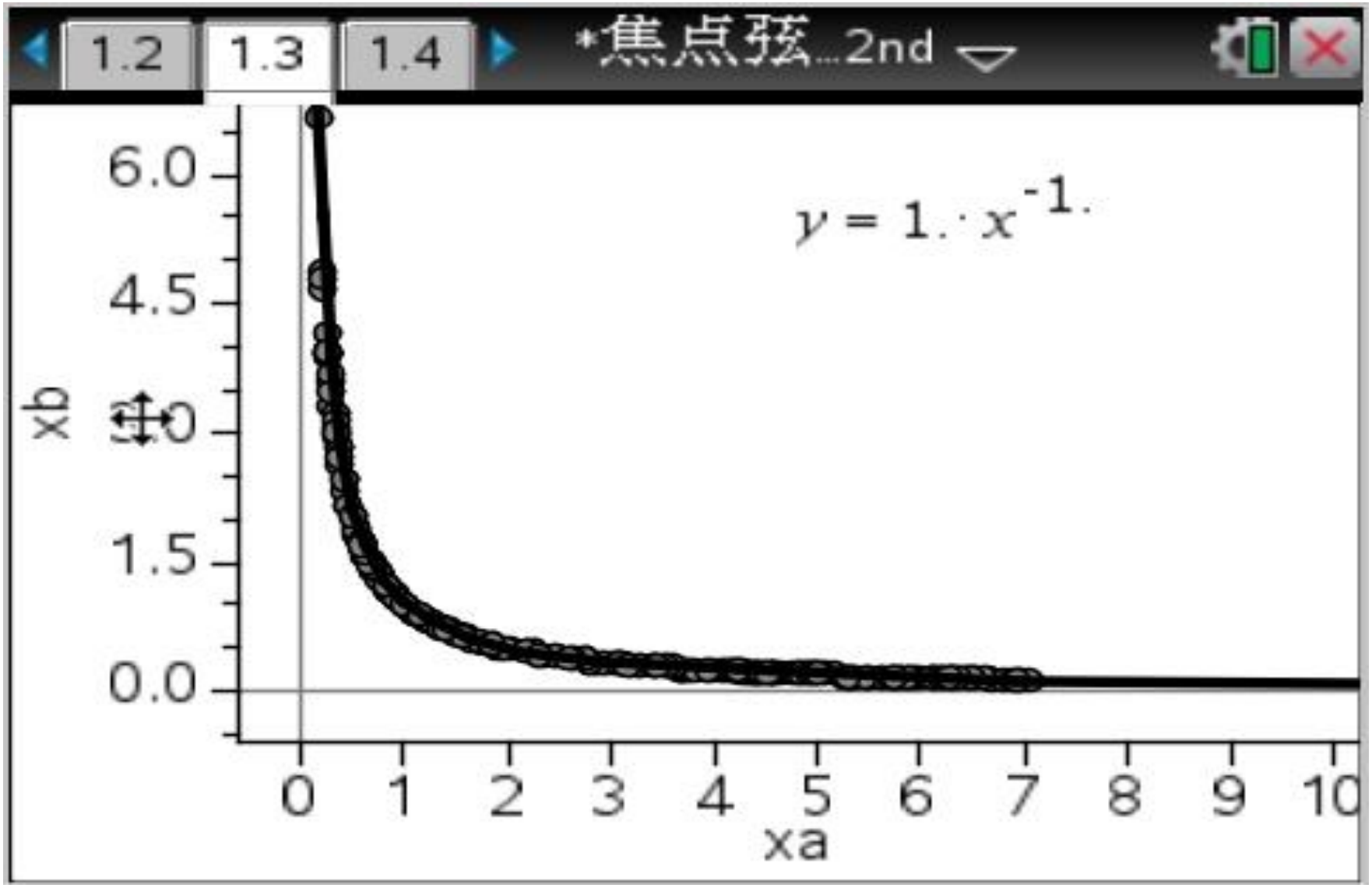



1.1
1.2
1.3
*焦点弦...2nd
7.36
y
p = 2.
(2.3, 3.04)
1
x
-5.79
1
14.21
(1., 0.)
(0.434, -1.32)
-5.97
$x=\frac{y^2}{2\cdot p}$

1.1
1.2
1.3
*焦点弦...2nd
A xa
B xb
C ya
D yb
=capture('
=capture('
=capture('
=capture('
1 2.23459 0.44751 2.98971 -1.33792
2 2.02546 0.493716 2.84637 -1.4053
3 1.77124 0.564576 2.66176 -1.50276
4 1.68981 0.591783 2.59985 -1.53855
5 1.60389 0.623485 2.53289 -1.57922
D
yb:=capture('y2,1,'y1)


1.1
1.2
1.3
焦点弦端...2nd
6.0
4.5
3.0
1.5
0.0
xb
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
xa


1.2
1.3
1.4
焦点弦端...2nd
0.0
−1.5
−3.0
−4.5
−6.0
yb
0.5
1.5
2.5
3.5
4.5
5.5
6.
ya


1.2
1.3
1.4
*焦点弦...2nd
y = 1.·x^-1.
6.0
4.5
3.0
1.5
0.0
xb
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
xa

1.1
1.2
1.3
*焦点弦...2nd
F
G
H
I
=PowerRe
1
标题
幂回归
2
RegEqn
a*x^b
3
a
1.
4
b
-1.
5
r²
1.
6
H
=PowerReg(xa,xb,1): CopyVar Stat.

- 问题解决
- 提出问题→分析问题→解决问题→理性归纳

（一）问题提出：过抛物线 $y^2 = 2px(p > 0)$ 的焦点 F 的弦为 AB，$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$，探究变量 x_1 与 x_2，y_1 与 y_2 之间的关系.

（二）思路分析：对于两个变量，我们不知道他们之间有什么样的关系，通过什么样的过程可以寻找他们之间的关系呢？

实验观察——获取数据——分析数据——猜想结论——验证和证明

（三）实验过程：

以一个具体的抛物线为例进行实验。

（四）形成猜想

从实验过程我们发现数据是完全拟合，因此两个变量之间是函数关系，由此得到两个横坐标乘积为定值，对一般的抛物线有类似的规律吗？如何表述这一数学结论？

猜想 1:过抛物线 $y^2 = 2px(p > 0)$ 的焦点 F 的弦为 AB，$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$，则有 $x_1 \cdot x_2$ 是定值，$y_1 \cdot y_2$ 也是定值.

（五）证明猜想

（1）代数证明:

机器证明

$$\text{solve}\left(\begin{cases} y^2=2\cdot p\cdot x \\ y=k\cdot\left(x-\dfrac{p}{2}\right) \end{cases},\{x,y\}\right)$$

$$x=\frac{\left(\sqrt{k^2+1}+1\right)^2\cdot p}{2\cdot k^2} \text{ and } y=\frac{\left(\sqrt{k^2+1}+1\right)\cdot p}{k} \text{ or } x=\frac{\left(\sqrt{k^2+1}-1\right)^2\cdot p}{2\cdot k^2} \text{ and } y=\frac{-\left(\sqrt{k^2+1}-1\right)\cdot p}{k}$$

$$y1:=\frac{\left(\sqrt{k^2+1}+1\right)\cdot p}{k} \qquad \frac{\left(\sqrt{k^2+1}+1\right)\cdot p}{k}$$

$$y2:=\frac{-\left(\sqrt{k^2+1}-1\right)\cdot p}{k} \qquad \frac{-\left(\sqrt{k^2+1}-1\right)\cdot p}{k}$$

$$y1\cdot y2 \qquad -p^2$$

（六）形成命题

命题 1 过抛物线 $y^2 = 2px(p > 0)$ 的焦点 F 的弦为 AB，$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$，则有

$$y_1 \cdot y_2 = -p^2, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{p^2}{4}.$$

环节二

问题二:你觉得上述结论可以做怎样的推广？

猜想 2:过点 $(t,0)\ \ (t>0)$ 的直线交抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 于

$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ 两点，$x_1\cdot x_2$ 和 $y_1\cdot y_2$ 是定值吗？若是请求出不是请说明理由.