角度及坐标的计算与应用

主讲人：王中伟（湖南交通职业技术学院）

【课程目的】

1．熟悉角度的三种单位；

2．掌握 TI-nspire 计算器的角度的设置及角度转换计算；

3．熟悉 TI-nspire 计算器的度分秒输入功能；

4．掌握 TI-nspire 计算器的坐标计算操作及相关计算函数的应用。

一、　角度单位及相互转换

土木工程及测量工作中，常用的角度单位有：角度制（Deg），弧度制（Rad），百分度制（Grad）。

1．角度制（Deg）

角度制是我们最常见角度单位，在工程中通常用来显示角度结果，比如全站仪就是以度、分、秒来表示水平方向和竖直方向的角度测量结果。

角度的定义：1 圆周=360 度，1 度=60 分，1 分=60 秒。

一个角度一般表示如“23 度 52 分 30 秒”（或 23°52′30″）的格式，这是 60 进制的角度格式，也可以转换为十进制的浮点数角度来表示，如：

$$23^\circ 52'30'' = 23^\circ + \left(\frac{52}{60}\right)^\circ + \left(\frac{30}{60\times 60}\right)^\circ = 23.875^\circ$$

2．弧度制（Rad）

在推导测量学的公式或进行计算时，经常用弧度来表示角度（或进行弧度的转换），计算机运算中的角度值也往往以弧度表示。

弧度的几何意义是：一个圆心角的弧度为该角所对圆弧长度与半径之比。因此，1 圆周=2π弧度≈6.2831853 弧度。

弧度实质上是一个无量纲的数字，在需要表明为弧度的地方，通常在数字后面加个字母 r 来表示，如：6.2831853r。

弧度与角度的关系：$360^\circ = 2\pi \mathrm{r}$，$1^\circ = \left(\dfrac{\pi}{180}\right)\mathrm{r}$。

一个弧度对应的角度值通常用 ρ 来表示：

$$\rho^\circ = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ = 57.2957795^\circ \approx 57.3^\circ$$

$$\rho' = \left(\frac{180}{\pi}\times 60\right)' = 3437.74677' \approx 3438'$$

$$\rho'' = \left(\frac{180}{\pi}\times 3600\right)'' = 206264.806'' \approx 206265''$$

ρ 在测量计算公式中经常出现，也可用于弧度和角度的转换计算中。如：

$$23^\circ 52'30'' = 23.875^\circ = \frac{23.875^\circ}{57.3^\circ} = 0.4167\mathrm{r}$$

3．百分度制（Grad）

百分度的单位通常称为梯度（有文献也称之为新度），用字母 g 表示。

百分度的定义是：1 圆周=400g。

各种角度的关系可以用这个等式来理解：$\frac{1}{4}$圆周=直角=90°=100g$=\frac{\pi}{4}$。

总的来说，角度有三种单位制式，在我国工程应用和科学研究中，通常用度分秒来表示角度值，而在计算式和计算过程中通常使用弧度，而百分度在我国几乎不用。

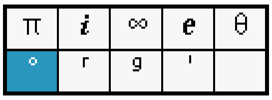
4．TI-nspire 计算器中角度单位的设置与相关操作

（1）角度单位的标注与设置

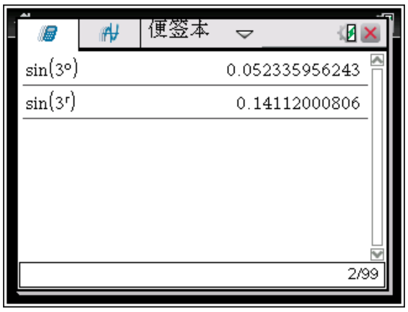
在 TI-nspire 计算器中，如果遇到涉及到角度的计算，一定要明确其角度单位，比如计算三角函数 sin(3)，角度参数“3”的单位是“度”还是“弧度”，其计算结果是完全不同的。

TI-nspire 计算器中的角度单位，有特别标注和缺省标注两种方法。

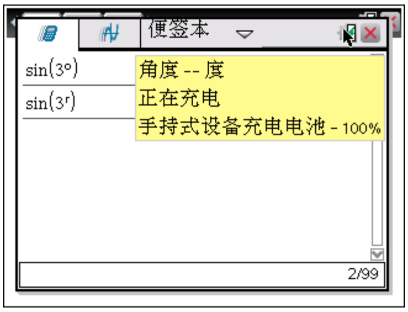
特别标注，就是在角度数字后面明确标注角度单位符号。按键，在弹出的数学常数和数学符号面板中，第二行的四个符号，分别是度、弧度、梯度、分的角度单位符号。

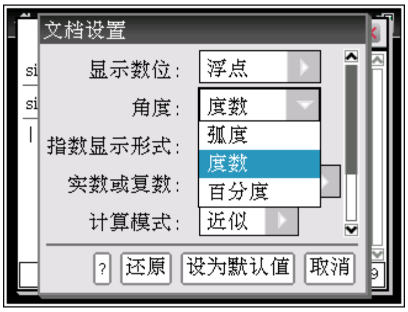


这样，在角度数字后面加上相应的角度单位符号即可，这就是特别标注。



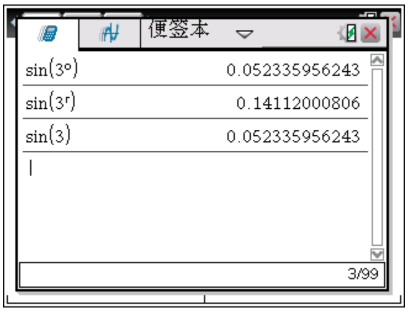
缺省标注，就是在文档设置中，设置好某种角度单位。滑动鼠标，使鼠标指向屏幕右上角处，此时会显示当前的缺省的角度单位和电池信息，按方向键中心的键，在弹出的菜单中选择“2:文档设置...”，即弹出“文档设置”对话框，第二项设置就是“角度”，有三个选项：弧度、度数、百分度，根据需要选择其一即可，比如，选择“度数”。





以上设置，如果是在便签本中进行，设置完成后点击“设为默认值”，这样不论是便签本还是今后新建的文档，均把此设置作为默认设置。当然，也可以为每个不同的文档进行各自不同的设置。

当前角度单位设置为“度数”后，在角度相关的计算中，如果角度数值后面不标定单位，则按设置的角度单位进行计算。



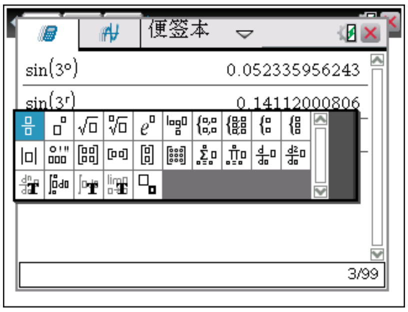
按缺省标注，确实要方便一点，但用户不能马虎，在计算之前一定要确定当前的缺省角度单位，以免造成计算错误。

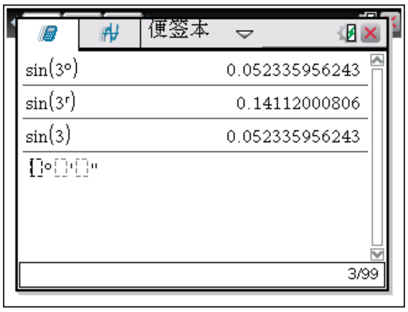
（2）度分秒角度数值的输入

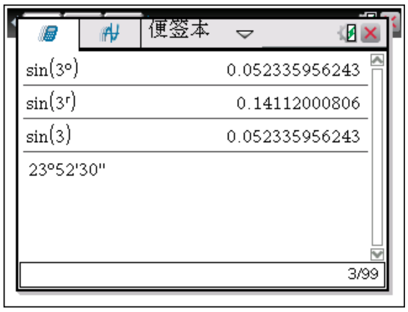
各种角度单位中，以度分秒表示的角度最符合人们的习惯，最直观，但也是输入最繁琐的方式。

度分秒的输入方法有两种，一种是按键在“数学常数和数学符号”面板上的角度单位输入，注意到其中只有度（°）和分（′），没有秒（″），按出秒（″）的方法是按两个分（′）。另一种方法，是按键在“数学模板”面板上选择度分秒模板，利用模板进行输入。

现在操作一下，练习输入：23°52'30"。







度分秒角度输入的几点技巧或注意事项：

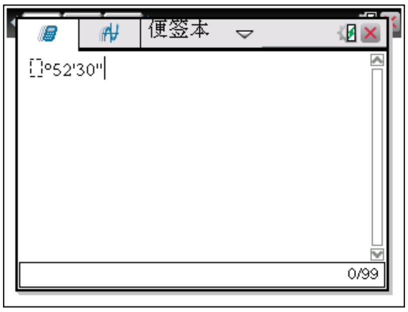
1）利用“数学常数和数学符号”面板上的角度单位输入度分秒数值，这些角度值是不合法的：30″，52'30"，23°30"，合法的输入格式分别是：0°0'30"，0°52'30"，23°0'30"，此外，合法的输入还可以有：23°，23°52'；

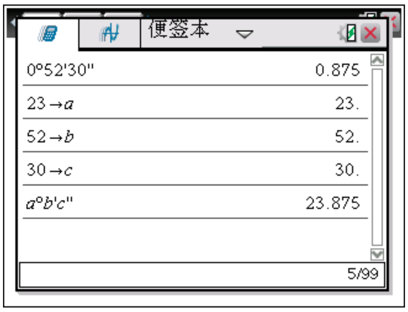
2）利用“数学模板”面板上选择度分秒模板输入度分秒数值，如果度、分、秒三个位置中有为 0 的，可以输入 0，也可以空缺不输，确定后可自动转为合法的角度格式；

3）如果先输入一个数字，再点击度分秒模板，则该数字会视为度的数字；

4）利用“数学模板”面板上选择度分秒模板输入度分秒数值，除用左右方向键确定位置外，还可以按 tab 键向后跳转，按 ⇧shift tab 键向前跳转；

5）度分秒三个数字可以用变量表示。





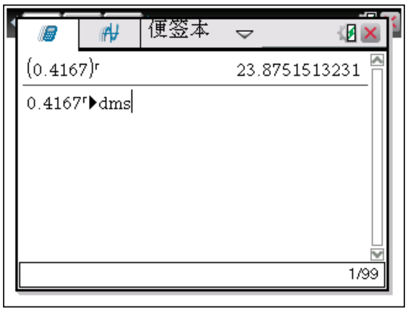
（3）角度的转换操作

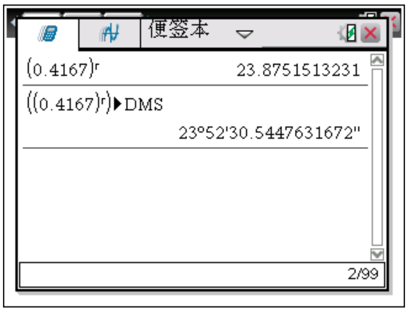
三种单位的角度之间进行转换，除了按照相互的数学关系进行计算外，还可以使用一些转换函数，下面以几个练习题来讲解（当前角度单位设置为“度数”）。

【练习 1】把“0.4167 弧度”转换为度分秒。

输入 0.4167，带上弧度单位符号 r，按 enter 键确认后，可得一个小数值，由于当前缺省角度单位为“度数”，因此该小数就是十进制的浮点数度数。

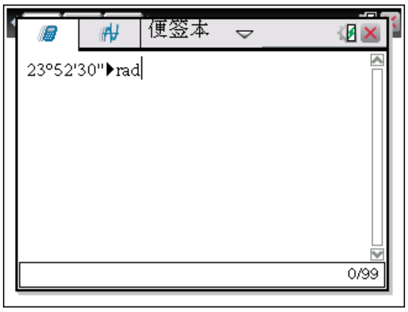
但题意是要转换为度分秒，可利用▸DMS 函数来转换，其中符号“▸”可以按 ctrl 键调出字符面板选择输入。

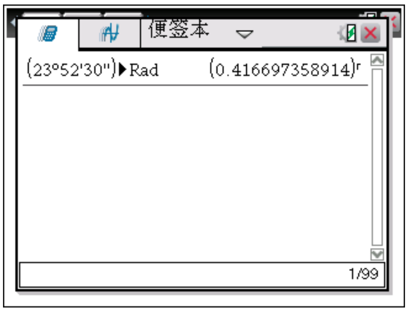




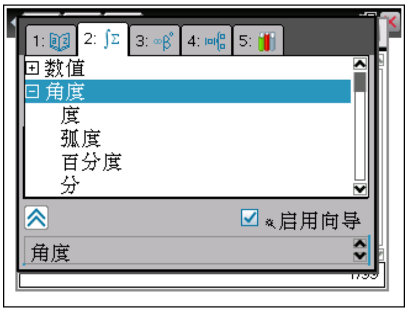
【练习 2】把 $23^{\circ}52'30''$ 转换为弧度。

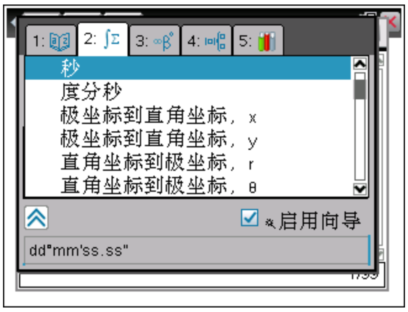
先利用度分秒模板输入 $23^{\circ}52'30''$，然后利用▸Rad 函数进行转换计算。

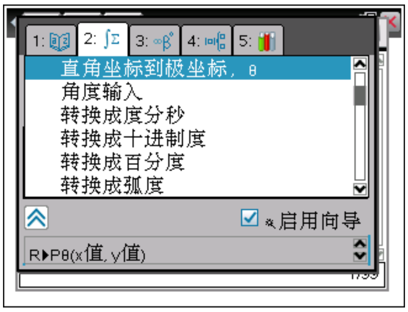




还有一些类似的角度转换函数，可按 [📖][2] 键，在按照数学运算功能排列的“命令与函数面板”中找到“角度”类，展开后查找所有与角度有关的函数或命令。







二、 测量坐标系及坐标计算原理

1．测量坐标系简介

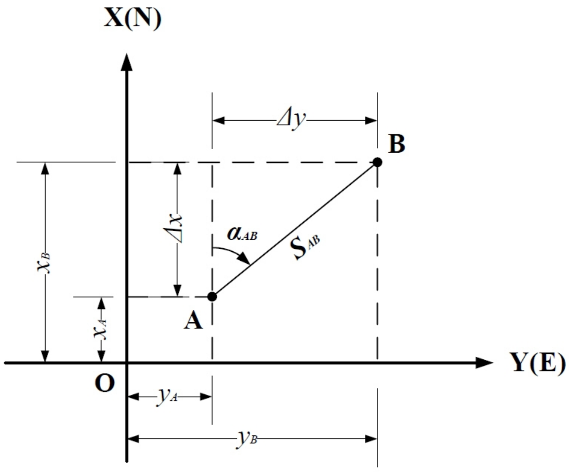


图 1 测量坐标系及方位角

测量工作中采用的直角坐标及角度方向规定为：

（1）南北方向为纵轴，记为 X 轴（又称 N 轴），向北为正；

（2）东西方向为横轴，记为 Y 轴（又称 E 轴），向东为正；

（3）以北方向为 0 角度方向，角度顺时针旋转为正，该角度又称坐标方位角，记为α。

测量坐标系的 X 轴与 Y 轴和数学坐标系的规定互换，其目的是为了定向方便，并且可将数学上的相关公式直接照搬到测量的计算工作中，不需作任何变更。

需要强调的是，有几个数量的下标，标记和理解一定要正确：

1）坐标差：$\begin{cases}\Delta x_{AB}=x_B-x_A\\ \Delta y_{AB}=y_B-y_A\end{cases}$，切记：$\Delta x_{AB}$和$\Delta x_{BA}$的含义是不同的，容易理解，它们数值相等，符号相反，即：$\Delta x_{AB}=-\Delta x_{BA}$，同样：$\Delta y_{AB}=-\Delta y_{BA}$；

2）方位角：$\alpha_{AB}\neq\alpha_{BA}$，$\alpha_{AB}$和$\alpha_{BA}$互为正反方位角，它们之间的关系，并非符号相反的关系，而是：$\alpha_{AB}=\alpha_{BA}\pm180^\circ$，其中的加减 180，加还是减的原则，是保证结果在方位角的值域 0~360 范围内。

2．坐标计算原理

（1）坐标正算

如图 1，已知 A 点坐标（x_A,y_A）、AB 边坐标方位角α_{AB}、AB 边水平距离S_{AB}，计算 B 点坐标（x_B,y_B）。

计算公式为：

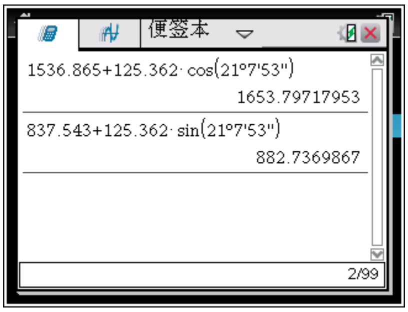
$$\begin{cases}x_B=x_A+\Delta x_{AB}\\ y_B=y_A+\Delta y_{AB}\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}x_B=x_A+S_{AB}\cdot\cos\alpha_{AB}\\ y_B=y_A+S_{AB}\cdot\sin\alpha_{AB}\end{cases}$$

坐标正算也是全站仪坐标测量的基本原理。

【练习 3】已知直线 AB 的边长为 125.362m，坐标方位角 $\alpha_{AB}=21^{\circ}07'53''$，其中 A 点的坐标为（1536.865，837.543），求 B 的坐标 (x_B, y_B)。

计算结果：$x_B=1653.797m$，$y_B=882.737m$。

使用 TI-nspire 计算器操作截图如下（角度单位设置为“度数”）：



关于坐标正算，还可以使用计算器中的两个计算函数：

1）极坐标到直角坐标 x：P▶Rx(r,θ)

2）极坐标到直角坐标 y：P▶Ry(r,θ)

这两个函数，可按 $\boxed{2}$ 键，在按照数学运算功能排列的“命令与函数面板”中的“角度”类中找到并调用。该函数实质上是根据某边的距离和方位角计算坐标差。

（2）方位角的推算

坐标正算，计算两点间的坐标差是关键，坐标差的计算需要两点间水平距离和方位角。其中，方位角不能直接测量，而是通过已知边的方位角和两导线的水平角来推算，基本计算公式是：

$$\begin{cases}\alpha_{前}=\alpha_{后}+\beta_{左}\pm180^{\circ}\\ \alpha_{前}=\alpha_{后}-\beta_{右}\pm180^{\circ}\end{cases}$$

一个计算口诀：左加右减，加减 180。其中的加减 180，加还是减的原则，是保证结果在方位角的值域 0~360 范围内。

【练习 4】如图 2，已知 12 边的方位角 $\alpha_{12}=67^{\circ}23'12''$，沿 1-2-3-4 方向测量，分别测得 2 点的水平角 $\beta_2=154^{\circ}43'33''$（右角）、3 点的水平角 $\beta_3=162^{\circ}41'05''$（左角），试推算 23 边

的方位角α_{23}、34 边的方位角α_{34}。

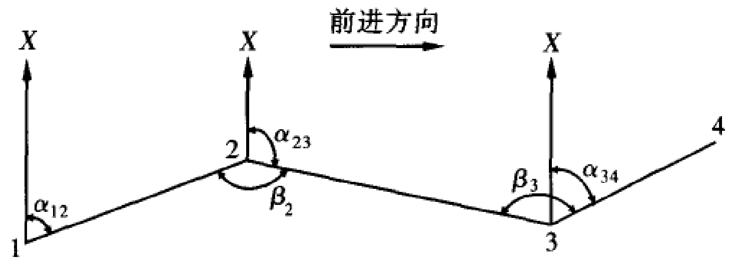
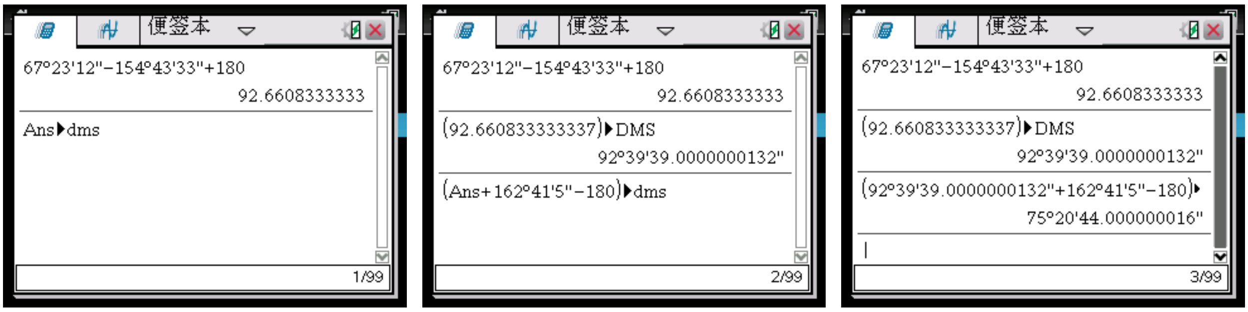


图 2 方位角的推算

$$\begin{aligned}\alpha_{23} &= \alpha_{12} - \beta_2 + 180^\circ \\ &= 67^\circ 23'12'' - 154^\circ 43'33'' + 180 \\ &= 92^\circ 39'39''\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_{34} &= \alpha_{23} + \beta_3 - 180^\circ \\ &= 92^\circ 39'39'' + 162^\circ 41'05'' - 180^\circ \\ &= 75^\circ 20'44''\end{aligned}$$



（3）坐标反算

如图 1，已知 A 点坐标（x_A, y_A）和 B 点坐标（x_B, y_B），计算 AB 边坐标方位角α_{AB}、AB 边水平距离S_{AB}。

前面提到过的已知边方位角，通常就是根据两已知导线点的坐标来反算的。全站仪设站，根据测站点坐标和后视点坐标定方向，也是这个原理。

水平距离S_{AB}的计算公式根据勾股定理来推导。先计算 AB 边的坐标增量：

$$\begin{cases}\Delta x_{AB} = x_B - x_A \\ \Delta y_{AB} = y_B - y_A\end{cases}$$

再计算水平距离：

$$S_{AB} = \sqrt{\Delta x_{AB}^2 + \Delta y_{AB}^2}$$

方位角的计算就有点麻烦了，虽然有个反三角函数计算式$\arctan\dfrac{\Delta y_{AB}}{\Delta x_{AB}}$能算出一个类似

的角度，但它的意义与方位角迥异，值域 $-90^\circ \sim 90^\circ$ 也与方位角的 $0^\circ \sim 360^\circ$ 大相径庭。

以点 A 为原点，建立直线 AB 的增量坐标系，定义直线 AB 的坐标象限及象限角如图 3 所示。

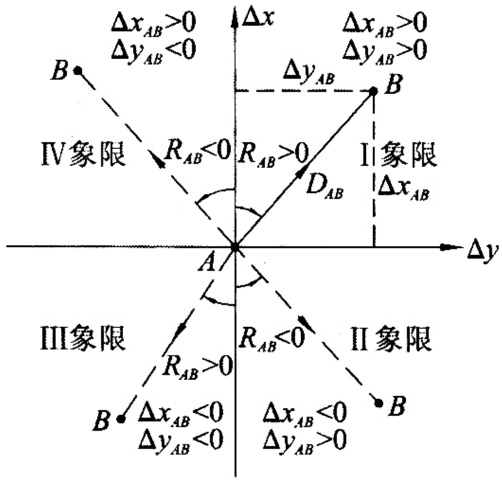


图 3 直线的象限和象限角

象限角计算公式：$R_{AB} = \arctan \dfrac{\Delta y_{AB}}{\Delta x_{AB}}$

根据三角函数的性质可知，象限角 R_{AB} 的定义为：直线 AB 与 $+\Delta x$ 轴向或 $-\Delta x$ 轴向的锐角，取值范围 $-90^\circ \sim 90^\circ$，将 R_{AB} 转换为坐标方位角 α_{AB} 时，需要根据 Δx_{AB} 和 Δy_{AB} 的正负、参照图 3 来判断，规则如表 1 所示。

表 1 直线 AB 的象限角 R_{AB} 与坐标方位角 α_{AB} 的关系

象限	坐标增量	坐标方位角公式	象限	坐标增量	坐标方位角公式
I	$\Delta x_{AB} > 0$ $\Delta y_{AB} > 0$	$\alpha_{AB} = R_{AB}$	III	$\Delta x_{AB} < 0$ $\Delta y_{AB} < 0$	$\alpha_{AB} = R_{AB} + 180^\circ$
II	$\Delta x_{AB} < 0$ $\Delta y_{AB} > 0$	$\alpha_{AB} = R_{AB} + 180^\circ$	IV	$\Delta x_{AB} > 0$ $\Delta y_{AB} < 0$	$\alpha_{AB} = R_{AB} + 360^\circ$

【练习 5】已知 A 点坐标为（7228.568，1337.337），B 点坐标为（7188.043，1377.210），求 AB 两点的水平距离 S_{AB} 和坐标方位角 α_{AB}。

计算结果：$S_{AB} = 56.852\text{m}$，$\alpha_{AB} = 135^\circ 27' 53''$。

$$\Delta x_{AB} = x_B - x_A = 7188.043 - 7228.568 = -40.525\text{m}$$
$$\Delta y_{AB} = y_B - y_A = 1377.210 - 1337.337 = 39.873\text{m}$$

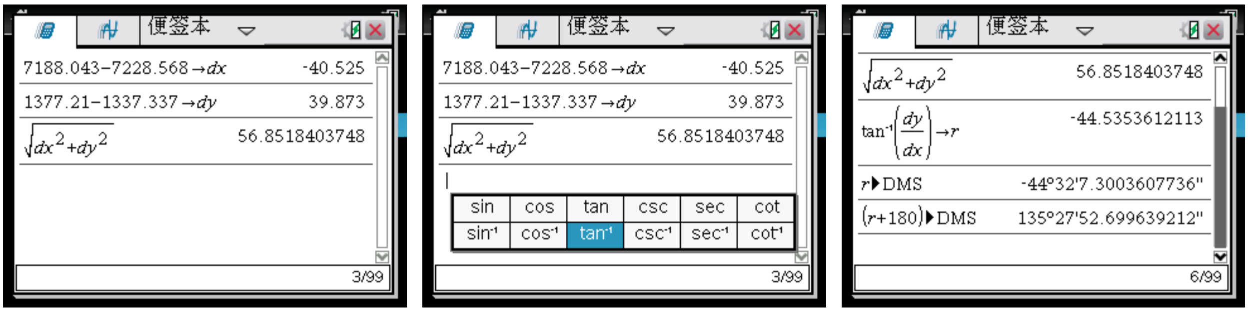
水平距离：$S_{AB} = \sqrt{\Delta x_{AB}^2 + \Delta y_{AB}^2} = \sqrt{(-40.525)^2 + 39.873^2} = 56.852\text{m}$

象限角：$R_{AB}=\arctan\dfrac{\Delta y_{AB}}{\Delta x_{AB}}=\arctan\left(\dfrac{39.873}{-40.525}\right)=-44.53536121^{\circ}=-44^{\circ}32'07''$

因为$\Delta x_{AB}<0$， $\Delta y_{AB}>0$，AB 边方向位于增量坐标系的第 II 象限，则坐标方位角：

$\alpha_{AB}=R_{AB}+180^{\circ}=-44^{\circ}32'07''+180^{\circ}=135^{\circ}27'53''$

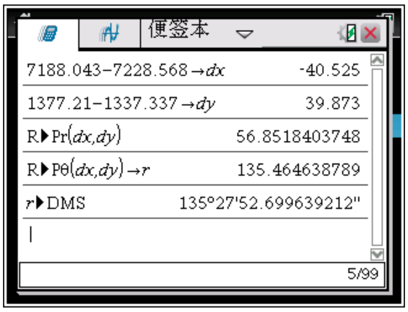
使用 TI-nspire 计算器操作截图如下（角度单位设置为“度数”）：



坐标反算，也可以使用计算器中的两个计算函数：

1）直角坐标到极坐标r：R▸P$r\,(x,y)$

2）直角坐标到极坐标θ：R▸P$\theta\,(x,y)$



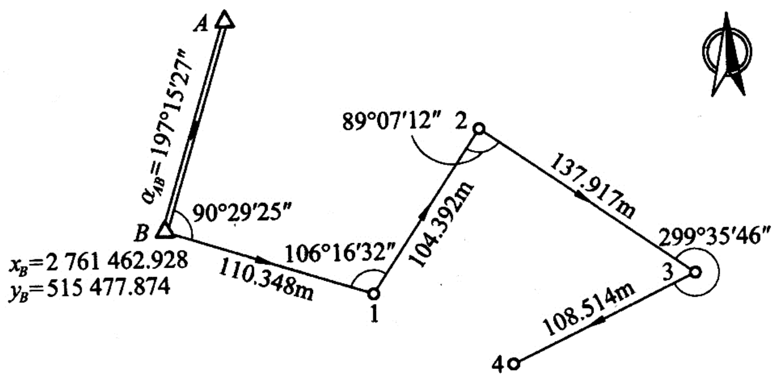
需要说明的是，利用 R▸P$\theta\,(x,y)$函数计算出的极坐标角度，即为方位角，而非象限角，只不过因为它的取值范围为$-180^{\circ}\sim180^{\circ}$，若计算结果为负，需要加 360° 。因此，利用这两个计算器函数进行坐标反算，无需象限判别及象限角到方位角的换算，计算过程很简洁。

课后练习题：

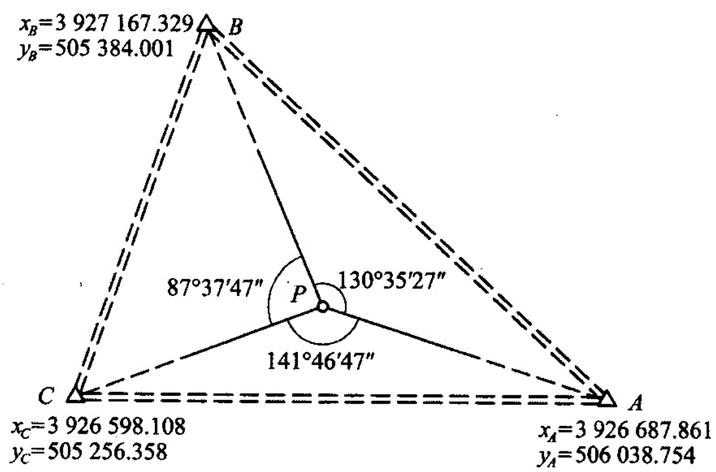
【课后练习 1】已知 A、B、C 三点的坐标列于下表，试计算边 AB、AC 的水平距离 S 与坐标方位角α，计算结果填入下表中。

点名	x(m)	y(m)	AB 边	AC 边
A	4967.766	3390.405	$s_{AB}=$	$s_{AC}=$
B	4955.270	3410.231	$\alpha_{AB}=$	$\alpha_{AC}=$
C	5022.862	3367.244		

【课后练习 2】如下图，已知 AB 边的坐标方位角，观测了图中 4 个水平角与 4 条边长，试计算 B1、12、23、34 边的坐标方位角，并计算 1、2、3、4 点的坐标。



【课后练习 3】计算下图所示的测角后方交会点 P 的平面坐标。



提示：设在 P 点面对 BC、CA、AB 边观测的水平角分别为α、β、γ，令：

$$P_A=\frac{1}{\cot\angle A-\cot\alpha}=\frac{\tan\alpha\cdot\tan\angle A}{\tan\alpha-\tan\angle A}$$

$$P_B=\frac{1}{\cot\angle B-\cot\beta}=\frac{\tan\beta\cdot\tan\angle B}{\tan\beta-\tan\angle B}$$

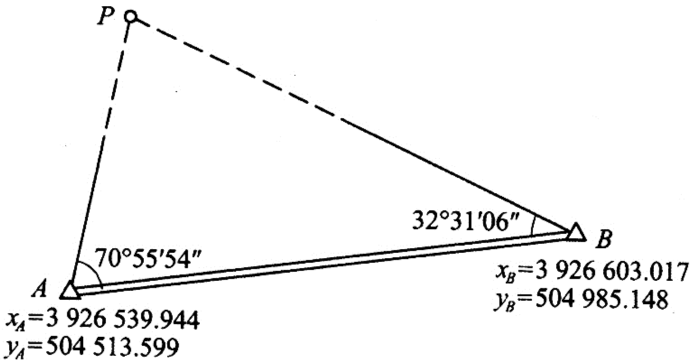
$$P_C = \frac{1}{\cot\angle C - \cot\gamma} = \frac{\tan\gamma \cdot \tan\angle C}{\tan\gamma - \tan\angle C}$$

则 P_1 点的坐标计算公式为：

$$x_{P1} = \frac{P_A x_A + P_B x_B + P_C x_C}{P_A + P_B + P_C}$$

$$y_{P1} = \frac{P_A y_A + P_B y_B + P_C y_C}{P_A + P_B + P_C}$$

【课后练习 4】计算下图所示的前方交会点 P 的平面坐标。



提示：设在 A、B 点观测的水平角分别为α 、 β，则 P 点坐标计算公式为：

$$x_P = \frac{x_A \cot\beta + x_B \cot\alpha + (y_B - y_A)}{\cot\alpha + \cot\beta}$$

$$y_P = \frac{y_A \cot\beta + y_B \cot\alpha + (x_A - x_B)}{\cot\alpha + \cot\beta}$$

【课后练习 5】试完成下表的三角高程测量计算，大气折光系数取$k = 0.14$。

起算点	A	
待定点	B	
往返测	往	返
水平距离 D（m）	581.391	581.391
竖直角α	$+11^\circ 38' 30''$	$-11^\circ 24' 00''$
仪器高 i（m）	1.44	1.49
觇牌高 v（m）	2.50	3.00
球气差改正（m）		
单向高差（m）		
往返高差平均值（m）		

提示：往返对向观测计算公式：

$$h_{AB} = D_{AB} \cdot \tan\alpha_A + i_A - v_B + f_{AB}$$

$$h_{BA} = D_{BA} \cdot \tan\alpha_B + i_B - v_A + f_{BA}$$

其中，f 为球气差改正数，可认为 $f_{AB} = f_{BA}$

$$f = (1-k)\frac{D^2}{2R}$$

R 为地球平均曲率半径，R=6371km。