

数列是一种特殊的函数, 涉及的问题形式多样, 解法各异, 它与函数、极限、概率、解析几何等有着密切的联系. 图形计算器的数列、数组计算和数组运算等功能为解决数列问题提供了多样化的视角, 其中数据统计中的生成序列、数据捕获、频率图表、快速绘图等功能能极大拓展了解决问题的途径和方法.

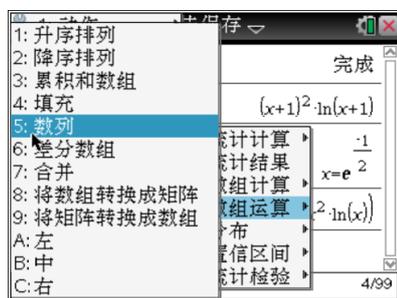
本节的学习内容主要有: 1 数列的通项、2 数列的运算、3 数列的图象、4 数列的迭代、5 数列的最大值与最小值, 以及数列的初步应用.

1 数列的通项

例 1 已知数列 $\{a_n\}$, $a_n = 3n + 1$, 求数列 $\{a_n\}$ 的前 10 项.

操作程序

1. 添加一个计算器页面.
2. 按键 **菜单** **6** (统计) **4** (数组运算) **5** (数列), 按键 **enter** (如图 8-4), 在数列提示符 seq 后面输入 $3n+2$, n , 1, 10, 得到数列的前 10 项分别为: 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31 (如图).



图



图

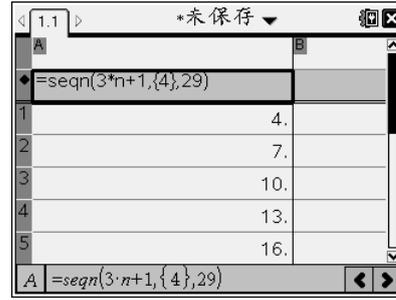
说明

1. 已知数列的通项求数列的某一项可以利用“序列” (seq) 命令求解. 其中数列的命令格式是: seq (表达式, 变量, 下界, 上界, 公差). 例如, 已知数列 $a_n = n^2 + n - 1$, 求 a_{102} . 在计算器页面上输入 $seq(n^2 + n + 1, n, 102, 102)$, 按键 **enter**, 得到 $a_{102} = 10507$.

2. 本例也可以通过另一种方法求解, 即 按键 **菜单** **3** (动作) **enter** **1** (生成序列) **enter**, 在出现的框中输入相关的数值, 按键 **enter**, 得到数列 $\{3n + 1\} (n = 1, 2, \dots, 29)$ (如图).



图



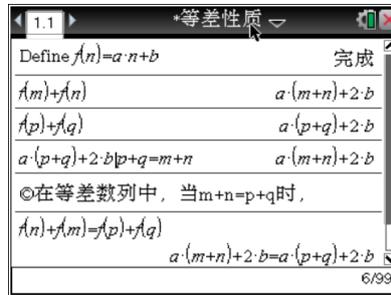
图

试试身手—— 一个等差数列性质的证明

问题：设 $\{a_n\}$ 为等差数列，证明：当 $m+n=p+q$ ($m,n,p,q \in N^*$) 时，

$$a_m + a_n = a_p + a_q.$$

解析：根据等差数列定义，可以设 $a_n = f(n) = an + b$ ，利用自定义函数和赋值方法，添加一个计算器页面，输入 $f(m) + f(n)$ ，按键 **enter**，得到 $a(m+n) + 2b$ ，输入 $f(p) + f(q)$ ，按键 **enter**，得到 $a(p+q) + 2b$ ，根据 $m+n=p+q$ ，证得 $f(m) + f(n) = f(p) + f(q)$ （如图）。



图

试试身手—— 一个取整数列性质的研究

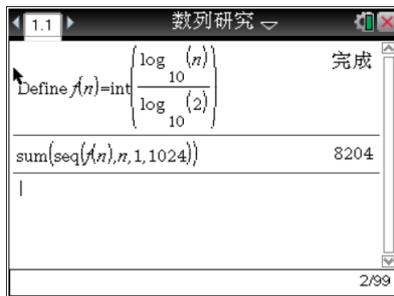
问题：设 $m \in N^*$, $\log_2 m$ 的整数部分用 $f(m)$ 表示，则 $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(1024)$ 的值是（ ）

- 8204 B. 8192 C. 9218 D. 以上均不对

解析：利用自定义函数、int、sum、seq 等命令求解，通过 $define f(n) = \text{int}(\frac{\log_{10}(n)}{\log_{10}(2)})$,

$sum(seq(f(n),n,1,1024))$ ，得到 $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(1024) = 8024$ ，因此应选 A（如

图)。



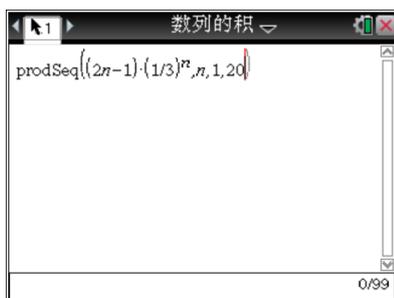
图

2 数列的运算

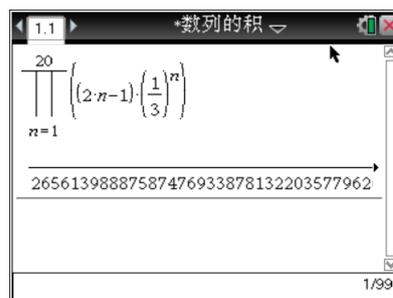
例 2 已知 $a_n = 2n - 1$, $b_n = (\frac{1}{3})^n$, 求数列 $\{a_n \cdot b_n\}$ 的前 20 项乘积.

■ 操作程序

1. 添加一个计算器页面.
2. 按键 **菜单** **6** (统计) **3** (数组计算) **6** (各元素的积), 输入 $((2n-1) \times (1/3)^n, n, 1, 20)$ (如图), 按键 **enter**, 得到数列 $\{a_n \cdot b_n\}$ 的前 20 项乘积为 26561398887587476933878132203577962 (如图).



图



图

说明

1. 数列相乘也可以利用模板图 8-13 中高亮模块方法输入.



图 8-13

2. 求数列前 n 项积的命令格式是: `prodSeq(表达式, 变量, 下限, 上限)`. 利用模板输入数学表达式是一种简便的方法, 从模板中可以输入分式, 指数式, 根式, 对数式, 分段函数、矩阵, 导数, 求和, 求积, 积分, 等等.

试试身手——一道高考题的快解

例 数列 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n = n^2 \left(\cos^2 \frac{n\pi}{3} - \sin^2 \frac{n\pi}{3} \right)$, 其前 n 项和为 S_n , 则 S_{30} 为 ()

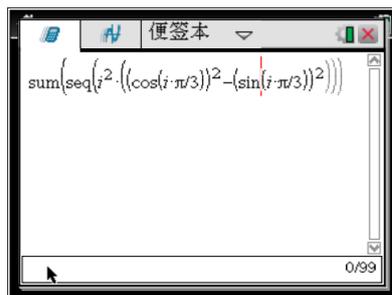
- A. 470 B. 490 C. 495 D. 510

操作程序

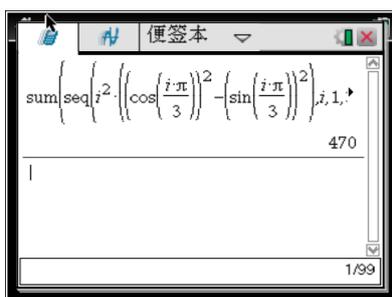
1. 添加一个计算器页面.
2. 按键 **菜单** **6** (统计) **3** (数组计算) **5** (各元素的和) (如图 8-14), 按键 **菜单** **6** (统计) **4** (数组运算) **5** (数列), 输入 “ $i^2 \cdot \left(\left(\cos\left(\frac{i \cdot \pi}{3}\right) \right)^2 - \left(\sin\left(\frac{i \cdot \pi}{3}\right) \right)^2 \right)$, $i, 1, 30$ ” (如图 8-15), 按键 **enter**, 得到 $S_{30} = 470$ (如图).



图



图



图

说明

本题也可以通过模板形式输入数列求和,即按键 $\boxed{=}$,在出现的模板中选择数列求和模块,按键 $\boxed{\text{enter}}$,在出现的模板框中输入相关的数据即可.如果熟悉命令格式,直接在页面上输入命令更为简捷.

试试身手——用解方程组方法求特殊数列的前 n 和

问题:给出定理:数列 $1^k, 2^k, 3^k, \dots$ 的前 n 项和 $1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k$ 是 n 的一个常数项为 0 的 k+1 次多项式.根据这个定理可以利用解方程组的方法求特殊数列前 n 项的和.例如,求数列 $1 \cdot 2, 2 \cdot 3, 3 \cdot 4, \dots, n(n+1), \dots$ 的前 n 项和.由上述定理可设 $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = xn + yn^2 + zn^3$,令 $n=1, 2, 3$ 分别代入得

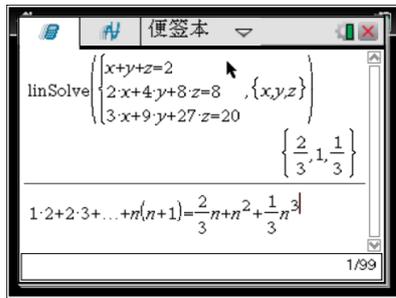
$$\begin{cases} x+y+z=2, \\ 2x+4y+8z=8, \\ 3x+9y+27z=20, \end{cases} \quad \text{利用解方程组方法(参见第四章方程与不等式),解得}$$

$$x = \frac{2}{3}, y = 1, z = \frac{1}{3} \quad (\text{如图}).$$

$$\text{即 } 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{2}{3}n + n^2 + \frac{1}{3}n^3.$$



图



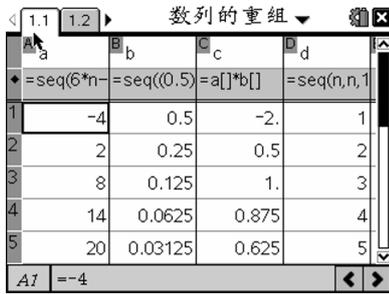
图

实用技术——如何使用电子列表进行数列的有关运算

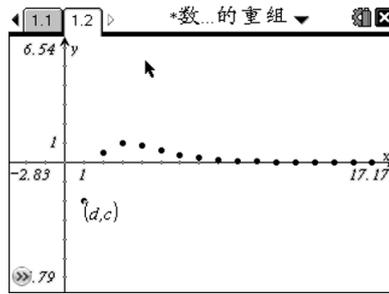
对已知数列进行有关的计算后观察新数列与已知数列的关系,对已知数列进行一系列的处理(如加、减、乘、除等)是数列应用中常见的问题.图形计算器在处理上提供了方便简明的方法,即可以直接在新的一列中对已知的数列进行有关的数学运算和组合,如已知数列

$\{a_n\}, \{b_n\}$ 分别为 $a_n = 3n + 1, b_n = (\frac{1}{2})^n$,求 $\{a_n b_n\}$ 的最大值,由图 8-19 可知当 $n=4$ 时, $a_n b_n$

的最大值为 0.875. 由此我们还可以进行一系列深入的研究, 如研究数列 $\{a_n b_n\}$ 的图象问题 (如图)



图



图

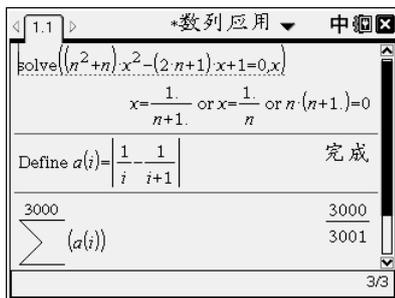
试试身手——数列与解析几何的交汇问题

问题: 对于任意 $n \in N^*$, 抛物线 $y = (n^2 + n)x^2 - (2n - 1)x + 1$ 与 x 轴相交于 A_n, B_n 两点, 求 (1) S_{3000} ; (2) $S_n = |A_1 B_1| + |A_2 B_2| + \dots + |A_n B_n|$ 关于 n 的通项公式.

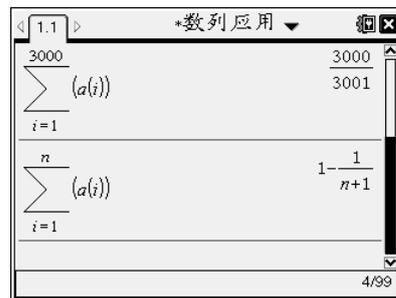
解析: 通过方程求解命令 solve 解方程 $y = (n^2 + n)x^2 - (2n - 1)x + 1$ 得两个根分别为

$\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}$ (如图 8-21); 定义数列 $a(i) = \left| \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right|$; 求和 $\sum_{i=1}^{3000} a_i$ 与 $\sum_{i=1}^n a_i$, 得到 $S_{3000} = \frac{3000}{3001}$,

$S_n = |A_1 B_1| + |A_2 B_2| + \dots + |A_n B_n| = 1 - \frac{1}{n+1}$ (如图).



图



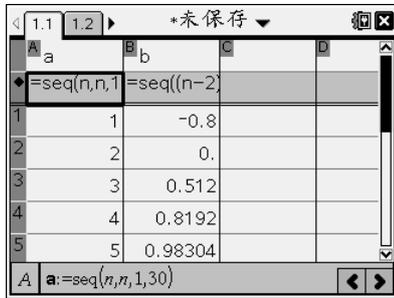
图

3 数列的图象

例 作出数列 $\{a_n\}$, $a_n = (n-2) \cdot 0.8^n$ 的图象.

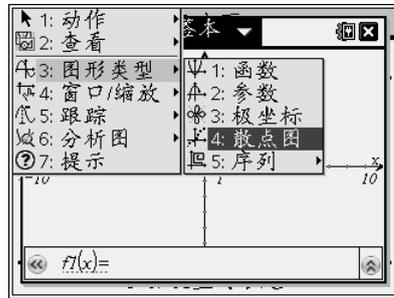
操作程序

1. 添加一个列表与电子表格.
2. 在表格的第一列第二行中由键盘输入 $\text{seq}(n, n, 1, 30)$ (即输入数列 $a_n = n, 1 \leq n \leq 30$), 在第二列第二行中输入 $\text{seq}((n-2) \times (0.8)^n, n, 1, 30)$ (即输入数列 $a_n = (n-2) \cdot (0.8)^n, 1 \leq n \leq 30$) (如图).
3. 添加一个图形页面.
4. 按键 **菜单** **3** (图形类型) **4** (散点图, 如图 8-24), 在屏幕下方 $x \rightarrow$ 处输入 a , 按键 **enter**, $y \rightarrow$ 处输入 b (如图), 按键 **enter**, 出现数列的散点图, 经过窗口的适当调整得到图.

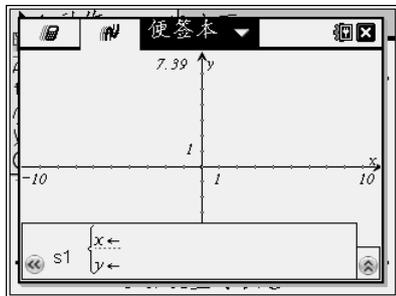


| | a | b |
|---|---|---------|
| 1 | 1 | -0.8 |
| 2 | 2 | 0. |
| 3 | 3 | 0.512 |
| 4 | 4 | 0.8192 |
| 5 | 5 | 0.98304 |

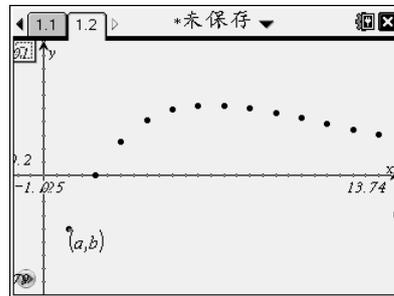
图



图



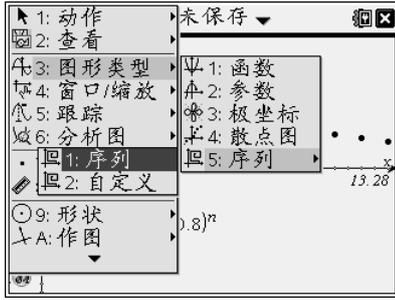
图



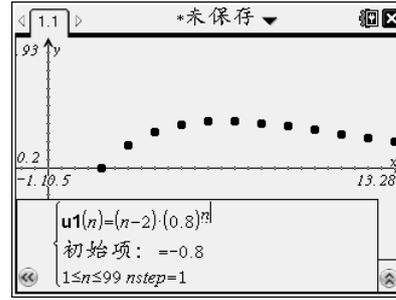
图

说明

数列图象也可以通过序列方法作图得到, 即添加一个图形页面, 按键 **菜单** **3** (图形类型) **5** (序列) **1** (如图), 在出现的屏幕下方的光标处输入 $(n-2) \cdot 0.8^n$, 初始值 -0.8 , 按键 **enter**, 得到数列的散点图, 经过窗口的适当调整得到图.



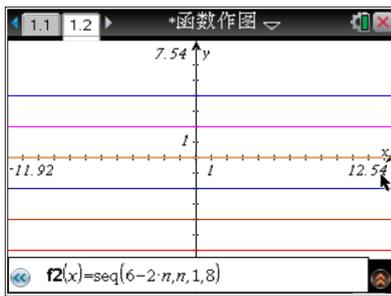
图



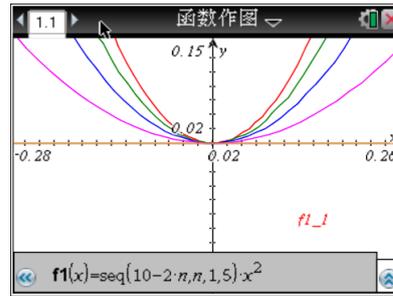
图

试试身手——巧用数列作直线系图象

利用数列可以作等距离的直线图象，如在函数命令行中输入 $\text{seq}(6-2 \times n, n, 1, 10)$ ，则表明在坐标系中输入直线 $y_1=4, y_2=2, y_3=0, y_4=-2, \dots, y_{10}=-14$ ，得到直线系方程（如图 8-29）。如果在函数提示符“f1(x)=”后面输入 $\text{seq}(10-2 \times n, n, 5) x^2$ ，那么屏幕上就会出现抛物线系方程的图象（如图）。因此可以凭着你的想象构造出多姿多彩的数学图象。



图



图

实用技巧——如何制作可调控的动态数列图象

在数列作图时，有时需要用图、表形式呈现，同时希望对图、表的呈现能够进行调控，图形计算器的游标功能可以帮助实现这样的效果。

首先将页面布局设置为左边两栏，右边一栏的形式，在左下角添加一个图形页面，插入添加游标 n ，在左上方的页面上的第一列第 2 行输入数列 $\text{seq}(k^2, k, 1, n)$ ，并将此表中的数列用“摘要图”的形式在右边页面上呈现出来，这样就可以通过调控左下方中游标 n 的值，动态地观察数列的直方图的同步变化，可以进行互动式的学习和研究（如图）。

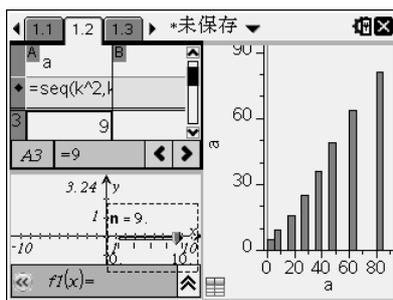
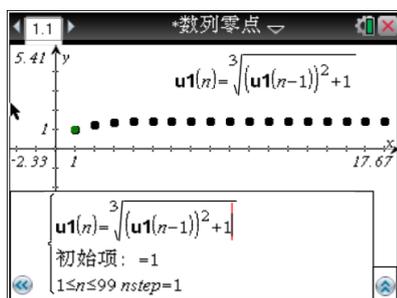


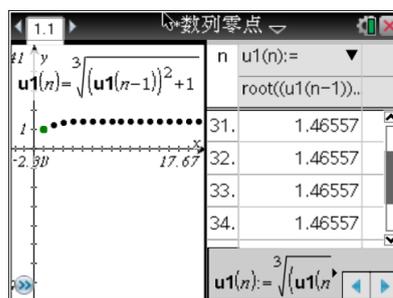
图 8-31

试试身手——利用数列方法求多项式零点的近似值

多项式零点的解法有多种途径，利用数列求多项式零点的近似值则是别开生面的一种求法，由此可以看到零点求解过程中的逐步逼近的过程。例如，求多项式 $x^3 - x^2 + 1$ 零点的近似值。首先添加一个图形页面，将图形类型设置为序列，在数列提示符“u1(n)=”后面输入 $\sqrt[3]{u1(n-1)^2 + 1}$ ，初始值设置为 1，按键 **enter**，得到递推数列的散点图（如图），将页面布局设置为左右两栏，并单击右栏，按键 **ctrl** **T**，添加一个列表与电子表格，得到多项式零点的近似值约为 1.4655712318（如图）。



图



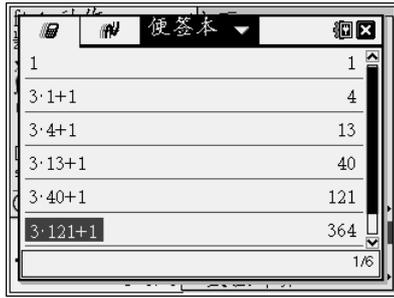
图

4 数列的迭代

例 已知 $f(n) = 3n + 1, g(n) = \begin{cases} 1, & n = 1, \\ f[g(n-1)], & n \geq 2, \end{cases}$ 求 $g(10)$ 。

操作程序

1. 添加一个计算器页面。
2. 输入 1，按键 **enter**，得到 1，按键 **ⓧ** (**ans**—当前结论) 输入 3+1，按键 **enter**，得到 4，按键 **enter**，得到 13，如此下去就得到 $g(1), g(2), \dots, g(10)$ （如图）。



图



图

说明

本题利用数列的迭代方法. Ans 表示前一次运算的结果, 第 2 次按键 **enter** 前 ans 为 1, 所以 $3 \cdot 1 + 1 = 4$, 此时 ans 的值为 4, 于是第 3 次按键 **enter**, 得到 $3 \cdot 4 + 1 = 13$ 等等, 以此类推. 例 已知斐波那契数列 $\{a_n\}$, $a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, 求 a_{30} 的值.

操作程序

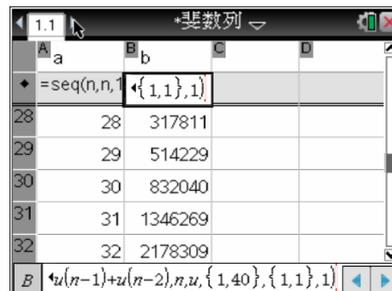
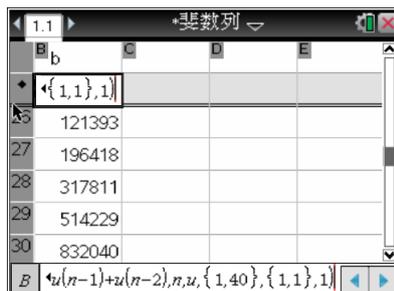
1. 添加一个列表与电子表格页面.
2. 按键 **菜单** **[3]** (动作) **enter** **[1]** (生成序列) **enter** (如图), 在出现的对话框中输入相关公式和数值, 其中 $u(n) = u(n-1) + u(n-2)$, 初始值为 1, 1 (即 $a_1 = 1, a_2 = 1$), nmax 为 40, nstep 为 1 (如图), 按键 **enter**, 得到递推数列 $b := \text{seq}(u(n-1) + u(n-2), n, u, \{1, 40\}, \{1, 1\}, 1)$ (如图), 按键 **▼** 直至第 30 行, 得到 $a_{30} = 832040$ (如图).



图



图



图

图

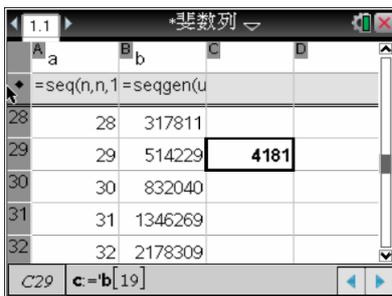
说明

1. 当光标移到到某一行时, 在屏幕下方会出现这一行的有关信息, 如数列通项等相关数学关系式等.

2. 递推数列的关系式也可以直接在电子表格中的第二行直接输入 $\text{seqn}(u(n-1)+u(n-2),\{1,1\})$.

3. 命令 seq 主要用于已知数列通项的数列的研究, 命令 seqn 主要用于递推数列的研究. Seqn 的命令格式是: $\text{seqn}(\text{表达式}(u, n) [, \text{ListOfInitTerms} [, \text{nMax} [, \text{向上取整数值}]]])$, $\text{seqn}(\text{表达式}(n) [, \text{nMax} [, \text{向上取整数值}]]])$

4. 要求斐波那契数列的某一项, 可以在电子表格的 C 列中的某一单元格中输入 $c:=b[19]$, 按键 enter , 得到 $b[19]$ 的值为 4181 (如图), 用这种方法可以解决已知递推数列中若干项的和、差、积、商等的运算求值问题.



图

试试身手——利用列表和电子表格解决递推数列问题

问题: 已知数列 $\{a_n\}$, $a_1=1.5$, $a_{n+1}=\sqrt{a_n+n^2}$, $n \in N^*$, 1. 求 $[a_{20}]$ 的值; 2. 求和 $[a_1^2]+[a_2^2]+\dots+[a_{30}^2]$, 其中 $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数.

解析: 利用列表和电子表格和变量可以解决递推数列的求解. 对于第一个问题. 在表格的第一列设置变量 a, 并在第一列第二行]输入数列: $\text{seqgen}(\sqrt{(u(n-1)+n^2)}, n, u, \{1,20\}, \{1.5\}, 1)$ 得到数列 $u(n)$ (如图 8-50), 在 b[2] 中输入 $c:=\text{int}[m[20]]$, 按键 enter , 得到 $[a_{20}]=20$

(如图 8-50). 对于第二个问题. 在 B 栏的第二行输入 $\text{seqgen}(u(n-1)+n^2, n, u, \{1,20\}, \{1.5\}, 1)$ 得到数列 $\{a_n^2\}$, 在 d[2] 输入 $d:=\text{sum}(\text{int}(c[]))$, 按键 enter , (如图 8-41), 得到 $[a_1^2]+[a_2^2]+\dots+[a_{30}^2]$ 的值为 16170 (如图).



图



图

实用技巧——如何利用散点图制作同步变化的数列图象

在实用技巧 20 中介绍了一种利用数表来动态显示数列的一种方法. 图形计算器在呈现数列的图象时, 还可以有更丰富的表现形式, 当控制游标时, 图象上数列的点数个数随之增加和减少. 以数列 $a_n = \frac{2\sqrt{n}}{n+1}$ 为例说明具体操作方法.

1. 添加列表与电子表格页面.

2. 在表格的第一行的分别定义变量 $xa, ya, xplot, yplot$, 在它们对应的下方单元格中分别输入

$\text{seq}(n, n, 1, 20, \text{st})$, $\text{seq}(\frac{2\sqrt{n}}{n+1}, n, 1, 20, \text{st})$, $\text{seq}(xa[k], k, 1, 20, \text{st})$, $\text{seq}(ya[k], k, 1, 20, \text{st})$ (如图).

3. 在 E 列中分别定义变量 $st, yi=ya[\text{floor}(\text{st})], xi=xa[\text{floor}(\text{st})]$ (如图).

(如图).



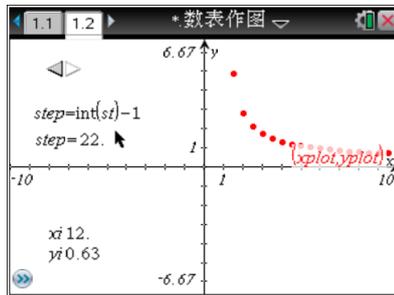
图

3. 在 E 列中分别定义变量 $st, yi=ya[\text{floor}(\text{st})], xi=xa[\text{floor}(\text{st})]$ (如图).

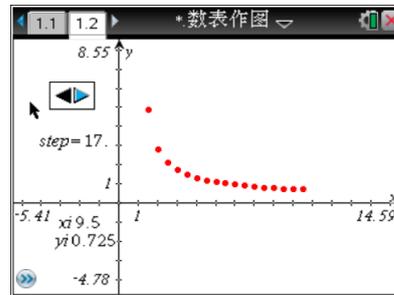
| | ya | xplot | yplot | |
|---|---------|-------|---------|----------|
| 1 | | | | |
| 2 | 4.89898 | 1.5 | 4.89898 | 23. |
| 3 | 2.82843 | 2. | 2.82843 | 0.629837 |
| 4 | 2.10819 | 2.5 | 2.10819 | 12. |
| 5 | 1.73205 | 3. | 1.73205 | |
| 6 | 1.49666 | 3.5 | 1.49666 | |

图

- 添加一个图形页面，并将图形类型设置为散点图. 作出以 xplot 为横坐标，yplot 为纵坐标的散点图.
- 插入游标并设置为不显示标签，变量取值范围为 $0 \sim 25$ （可根据需要进行调整）.
- 输入文本 $step = \text{int}(st) - 1$ ，并通过计算功能选择变量 st . 得到 $\text{int}(st) - 1$ 的数值，输入文本 $step$ ，将上述得到的 $\text{int}(st) - 1$ 的数值附加到它的右侧，将文本 $step = \text{int}(st) - 1$ 隐藏.
- 输入文本 xi , yi ，并通过计算功能选择变量 xi 和 yi ，将得到的数值分别附加到 xi 、 yi 的右侧（如图）.
- 调整窗口的大小和位置，调控游标数列的点数和点的坐标同步就会显示在屏幕上(如图).



图



图

注：将游标设置为不显示的状态的操作方法是：进入游标设置对话框，在下拉菜单中将显示变量的勾选取值即可。

5 数列的最大值与最小值

例 已知数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = 1$ ， $a_n = (n-10)\ln n$ ，求 $\{a_n\}$ 前 300 项中的最大值，最小值.

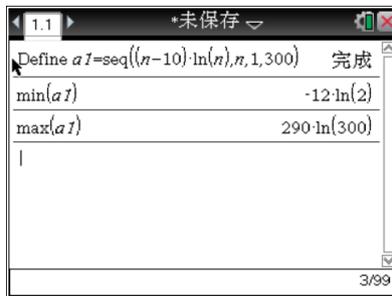
操作程序

- 添加一个计算器页面.

2. 输入 Define a1=seq((n-10)×ln(n),n,1,300), 按键 $\boxed{\text{enter}}$,

3. 输入 min(a1), 按键 $\boxed{\text{enter}}$, 得到 $\{a_n\}$ 前 300 项中的最小值为 $-12\ln 2$ (如图 8).

4. 输入 max(a2), 按键 $\boxed{\text{enter}}$, 得到 $\{a_n\}$ 前 300 项中的最大值为 $290\ln 300$ (如图).



图

说明

1. 自定义数列与自定义函数一样在问题解决中有广泛的应用.
2. 通过求数列的平均数、中位数、各个元素的和、积等等也可以参考本例的方法.
3. 本例也可以通过添加列表和电子表格的方式求解.

试试身手——一道高考数列问题中最大值的讨论

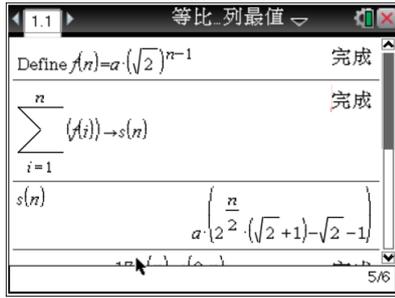
问题: 设等比数列 $\{a_n\}$, 公比 $q = \sqrt{2}$, S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 记 $T_n = \frac{17S_n - S_{2n}}{a_{n+1}}$,

$n \in N^*$, 设 T_{n_0} 为数列 $\{T_n\}$ 的最大项, 则 $n_0 =$ _____.

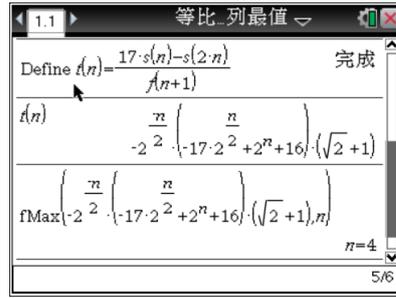
解析: 这是一道高考填空题, 原题考查的重点是等比数列的通项公式, 前 n 项和公式, 均值不等式. 利用图形计算器主要用到自定义函数, fmax 命令, 首先利用 define 命令分别

自定义等比数列通项公式为 $f(n)$ 以及前 n 项和为 $s(n)$, $T_n = \frac{17S_n - S_{2n}}{a_{n+1}}$ 为 $t(n)$, 利用

$f \max(t(n))$ 求 n_0 , 如图 8-53, 图 8-54 得到当 $n_0 = 4$ 时 T_4 最大.



图



图

实用技术——如何将数列进行降序或升序排列

将数列进行降序或升序排列可以利用排序命令 sortD 和 sortA 两种方式：

添加一个计算器页面，define m={7,8,1,24,4,3,6,-2,-9,5,-3}，按键 enter ，得到数组 $m=\{7,8,1,24,4,3,6,-2,-9,-3\}$ ，输入 sortA (m)，按键 enter ，得到数组中各数按升幂排列的结果为 $\{-9,-3,-2,1,3,4,5,6,7,8,24\}$ ，输入 sortD (m)，按键 enter ，得到数组中各数按降幂排列的结果为 $\{24,8,7,6,5,4,3,1,-2,-3,-9\}$ （如图 8-55）。



图



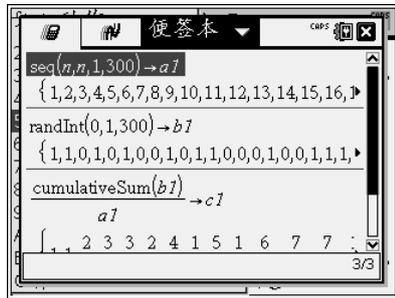
升幂排列 SortA 的命令格式是：SortA 数组 1 [, 数组 2] [, 数组 3]...，或 SortA 向量 1 [, 向量 2] [, 向量 3]... 降幂排列 SortD 的命令格式是：SortD 数组 1 [, 数组 2] [, 数组 3]...，或 SortD 向量 1 [, 向量 2] [, 向量 3]...

试试身手——用数学实验模拟概率

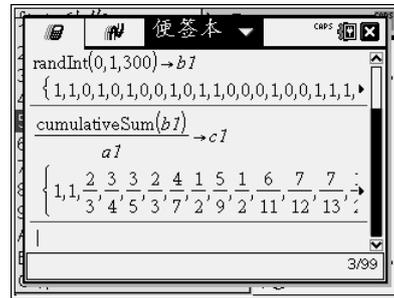
为了直观体会古典概率中频率与概率的关系，感知数据与生活的关系，可以利用图形计算器进行模拟实验。首先利用“TI”第一步产生一个数列顺序号（1~300）并保存在变量 a1 中，第二步产生一组由 0,1 组成的数组，并保存在变量 b1 中（0 表示硬币反面，1 表示硬币的正面，如图），利用命令 cumulativeSum (b1)（即统计 b1 中 1 的个数）统计数组 b1 中 1

的个数，第三步计算得到的频率 $c1$ ，并转化为分数形式（如图），第四步作出频率的散点图。

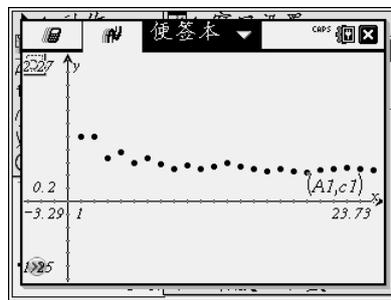
由图观察可知概率约为 $\frac{1}{2}$ （如图）。



图



图



图

说明

累加计数命令的格式是：`cumulativeSum(数组)`。