矩阵计算及在测量平差和坐标转换中的应用

主讲人：王中伟（湖南交通职业技术学院）

【课程目的】

1．掌握矩阵的新建、编辑、调用元素；

2．熟悉矩阵的基本运算；

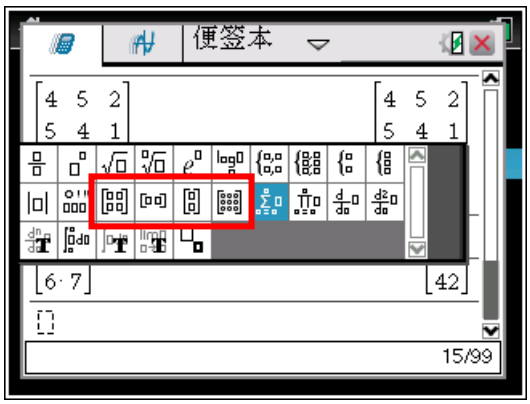
3．掌握利用矩阵功能进行测量平差的计算；

4．掌握利用矩阵功能进行三维坐标转换计算。

一、 矩阵的新建、构建与编辑

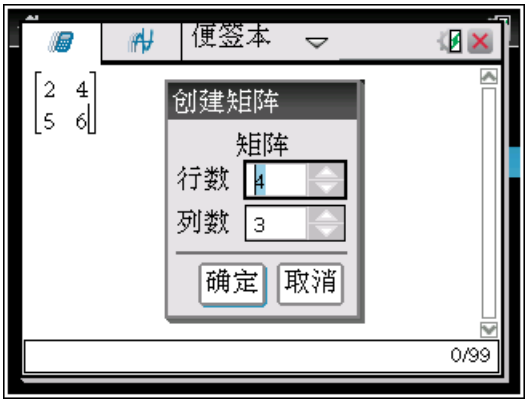
1．利用数学模板新建矩阵

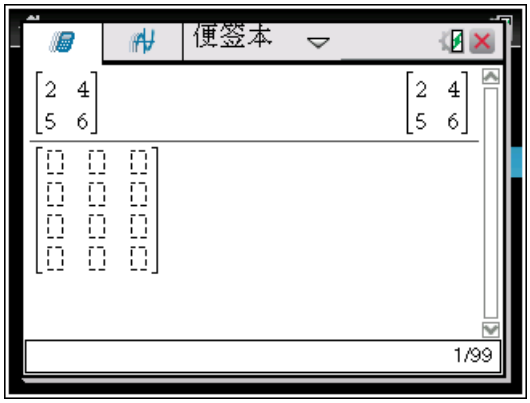
按数学模板 键，有四个模板可以新建矩阵：



其中，前面三个分别是新建 2×2、1×2、2×1 的矩阵。比如，选择可以新建一个 2 行×2 列的矩阵：

第四个模板，看图形好象是新建一个 3×3 的矩阵，其实不然，选择这个模板，会弹出一个对话框，用户可以通过定义行、 列数来新建一个任意维数的的矩阵。比如，新建一个 4 行×3 列的矩阵：



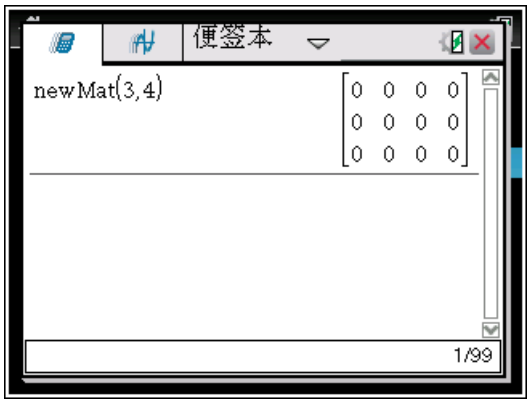


2．利用函数构建新的矩阵

在编程应用中，无法通过数学模板来新建矩阵，可以使用 newMat 函数来构建一个指定维数的零矩阵后，再对元素赋值。

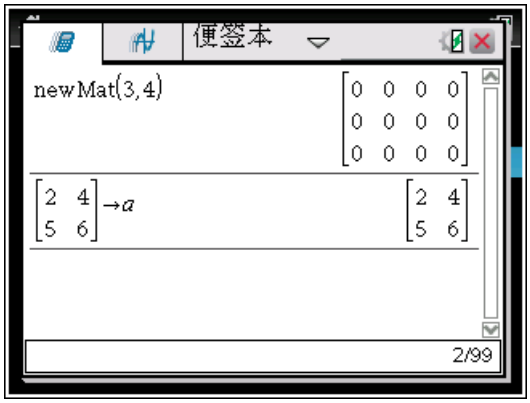
函数的格式是：newMat(行数，列数)

比如，构建一个 3 行×4 列的零矩阵：

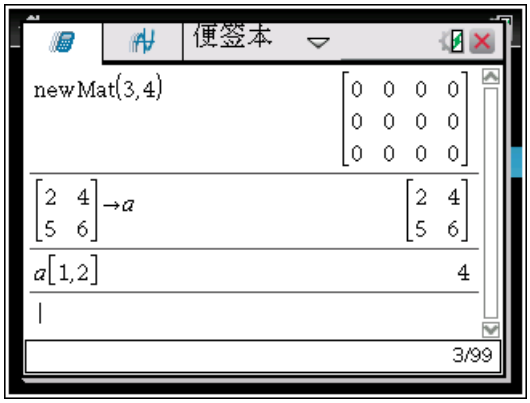


3．对矩阵元素的操作

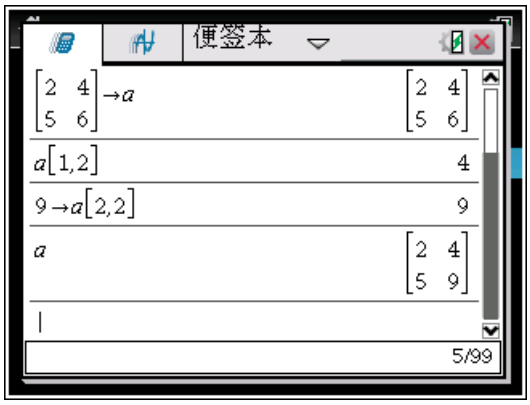
操作矩阵元素，应先将矩阵赋值给变量，比如，将前面 2×2 的矩阵赋值给变量 a:



可以读取矩阵中的一个元素，如读取矩阵 a 第 1 行第 2 列元素的值：



也可以通过赋值的方式将矩阵中任意元素修改为一个新值，如将矩阵 a 第 2 行第 2 列元素的值修改为 9：

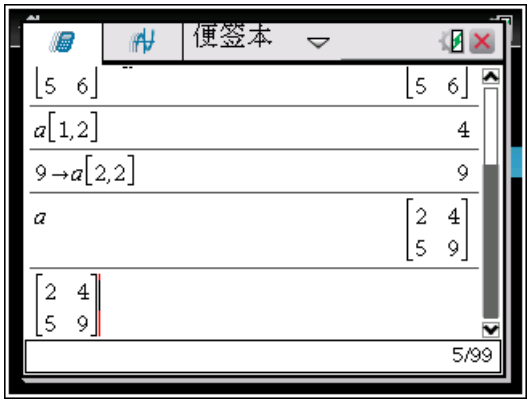


以上对矩阵元素值的操作方法一般用于编程应用中。

4．矩阵的修改

（1）矩阵元素值的修改

很简单，通过方向键定位到矩阵中需要修改的元素，删除原数值，输入新的数值。



（2）矩阵行、列的删除

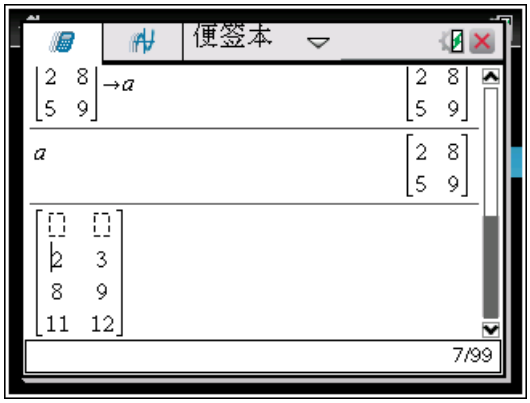
要删除矩阵中的一行，需要先将该行选中（利用 ⇧shift 键和方向键组合），再按删除键 del 即可。删除一列的操作也是类似的。

比如，先删除之前 4 行×3 列矩阵的第二行，再删除第一列：

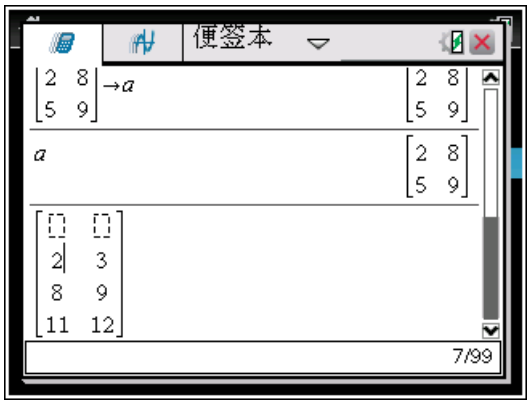
（3）矩阵行、列的插入

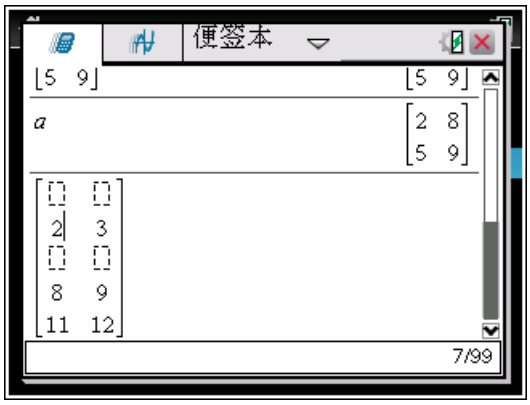
在矩阵中插入一行的按键是↵键。

如：在现有矩阵的第一行之前插入一行，将光标移到第一行任一元素值的前面，按↵键：



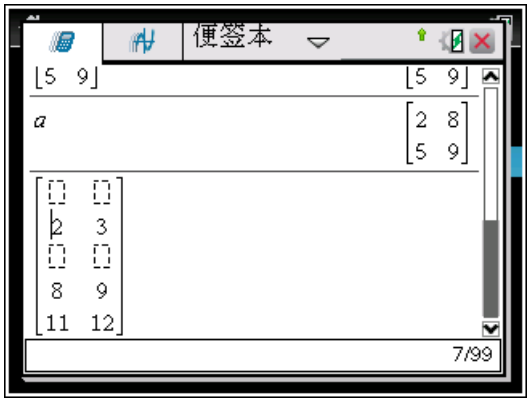
如：在现有矩阵的第二行之后插入一行，将光标移到第二行任一元素值的后面，按↵键：

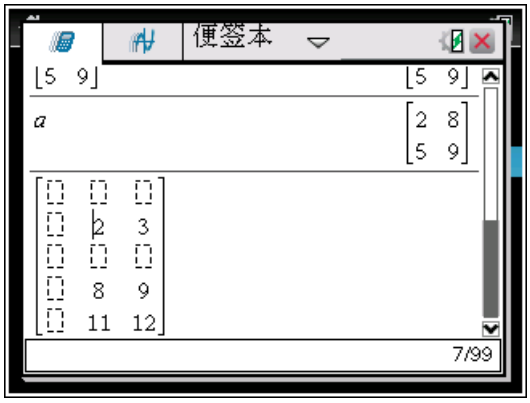




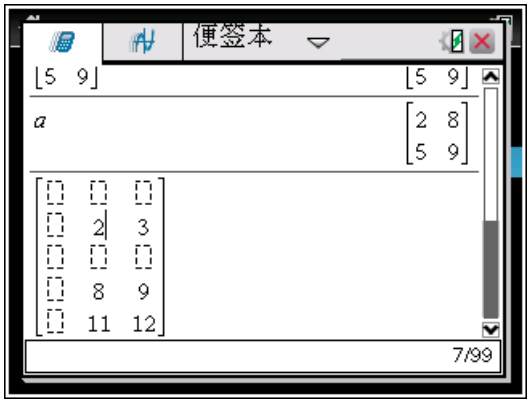
在矩阵中插入一列的按键是组合键 ⇧shift+enter。

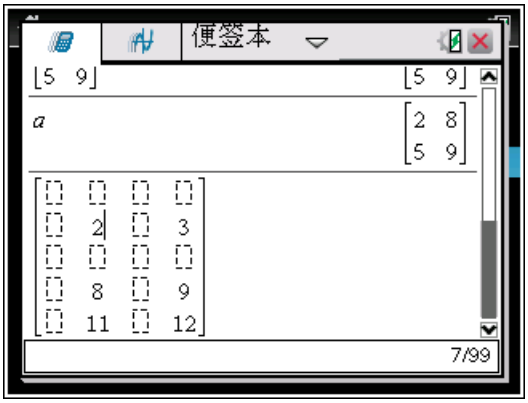
如：在现有矩阵的第一列之前插入一列，将光标移到第一列任一元素值的前面，按组合键 ⇧shift+enter：





如：在现有矩阵的第二列之后插入一列，将光标移到第一列任一元素值的后面，按组合键 ⇧shift+enter：



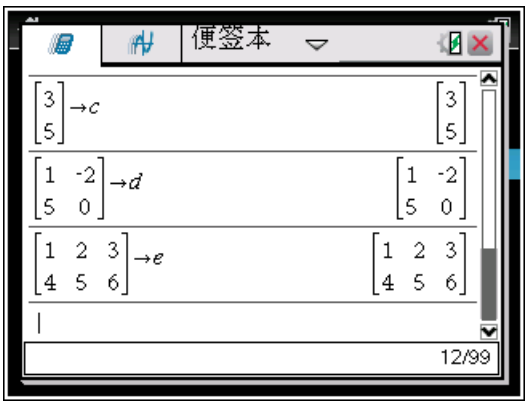


二、 矩阵的基本运算与应用

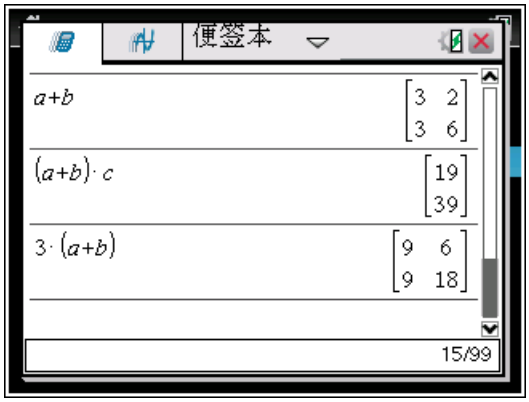
1．矩阵的基本运算

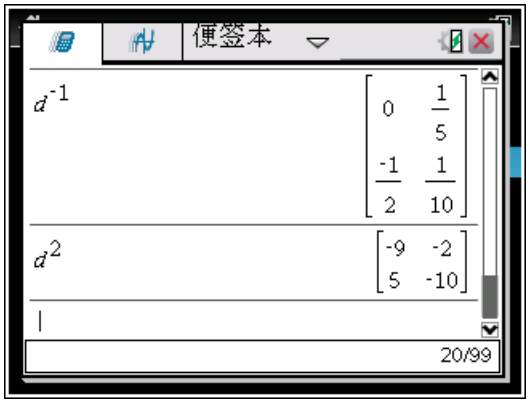
矩阵的基本运算包括加、减、乘、求行列式、转置、求逆、平方、绝对值等。

先给相关的矩阵进行赋值如下：

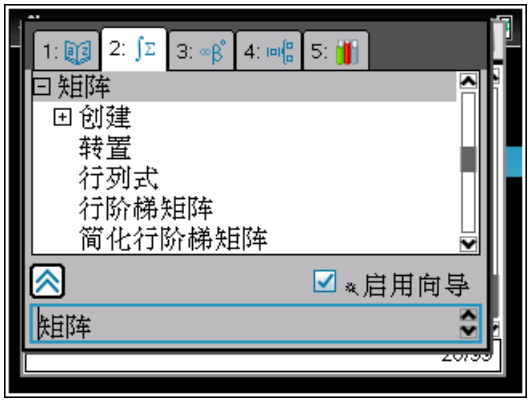


几个矩阵基本运算的范例如下表所示：

序号	范　例	计算结果	计算器操作屏幕截图
1	$\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}3&2\\3&6\end{bmatrix}$	
2	$\left(\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\right)\times\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}19\\39\end{bmatrix}$	
3	$3\times\left(\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\right)$	$\begin{bmatrix}9&6\\9&18\end{bmatrix}$	

序号	范　例	计算结果	计算器操作屏幕截图
4	$\begin{bmatrix}1 & -2\\5 & 0\end{bmatrix}$的绝对值	$\begin{bmatrix}1 & 2\\5 & 0\end{bmatrix}$	
5	$\begin{bmatrix}1 & -2\\5 & 0\end{bmatrix}$的行列式	10	
6	转置矩阵$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1 & 4\\2 & 5\\3 & 6\end{bmatrix}$	
7	逆矩阵$\begin{bmatrix}1 & -2\\5 & 0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0 & 0.2\\-0.5 & 0.1\end{bmatrix}$	
8	求矩阵$\begin{bmatrix}1 & -2\\5 & 0\end{bmatrix}$的平方	$\begin{bmatrix}-9 & -2\\5 & -10\end{bmatrix}$	

有关矩阵运算更多的函数，可按 键调出矩阵相关的全部函数和命令：



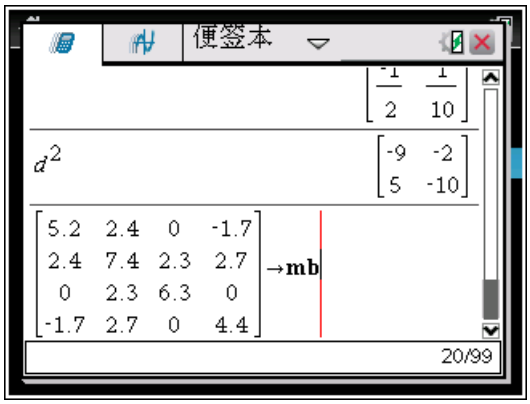
2．矩阵的基本应用——方程组求解

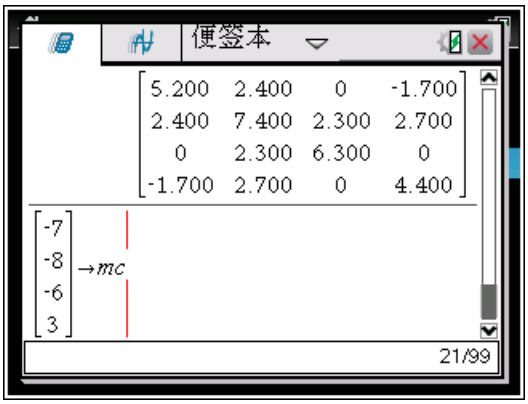
【案例 1】某水准网按条件平差的法方程是一个四元一次方程组，试利用矩阵求解。

$$\begin{cases} 5.2x_1+2.4x_2-1.7x_4=-7 \\ 2.4x_1+7.4x_2+2.3x_3+2.7x_4=-8 \\ 2.3x_2+6.3x_3=-6 \\ -1.7x_1+2.7x_2+4.4x_4=3 \end{cases}$$

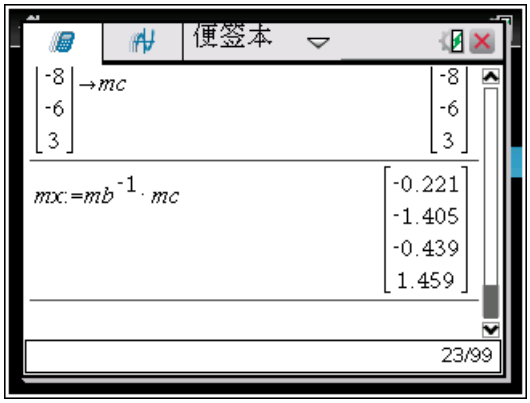
求解过程：

（1）列系数矩阵并赋值给 mb，列常数矩阵并赋值给 mc：

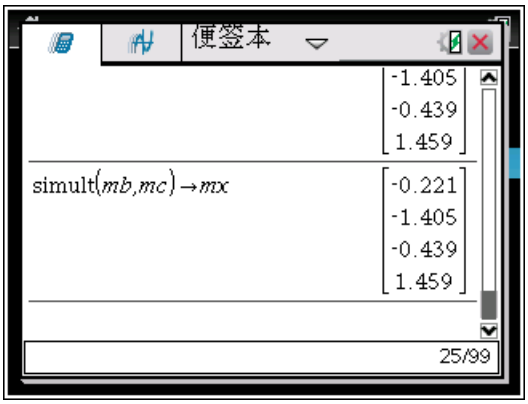




（2）求解，结果赋值给 mx：



或者，利用求解线性方程组函数求解：



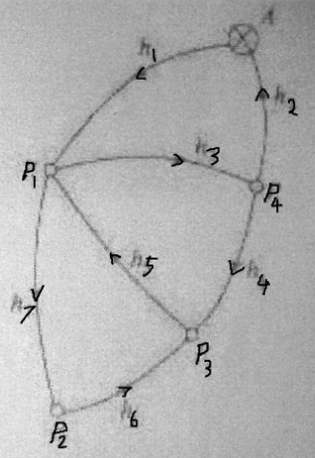
三、 测量平差计算中的矩阵运算

1．计算范例

【案例 2】

1、下图水准网中，A 为已知点，高程为 $H_A=10.000m$，P_1~P_4 为为待定点，观测高差及路线长度为：

h_1=1.270m,　S1=2;
h_2=-3.380m,　S2=2;
h_3=2.114m,　S3=1;
h_4=1.613m,　S4=2;
h_5=-3.721m,　S5=1;
h_6=2.931m,　S6=2;
h_7=0.782m,　S7=2;



若设 P2 点高程平差值为参数，求：（1）列出条件方程；（2）列出法方程；（3）求出观测值的改正数及平差值；（4）平差后单位权方差及 P2 点高程平差值中误差。

解：$n=7,t=4,r=3$（n 个观测值，t 个必要观测，r 个自由度，即条件方程个数）

使用条件平差方法计算如下：

（1）列条件方程

$$\begin{cases}\hat{h}_1+\hat{h}_3+\hat{h}_2=0\\ \hat{h}_3+\hat{h}_4+\hat{h}_5=0\\ \hat{h}_5+\hat{h}_7+\hat{h}_6=0\end{cases}$$

$$A\hat{L}+A_0=0$$

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1&0&0&0&0\\0&0&1&1&1&0&0\\0&0&0&0&1&1&1\end{bmatrix}$$

$$\hat{L}=\begin{bmatrix}\hat{h}_1&\hat{h}_2&\hat{h}_3&\hat{h}_4&\hat{h}_5&\hat{h}_6&\hat{h}_7\end{bmatrix}^T$$

$$A_0=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

（2）列法方程

$$N_{aa}K+W=0$$
$$K=-N_{aa}^{-1}\cdot W$$
$$N_{aa}=AQA^T$$

$$W=AL+A_0=\begin{bmatrix}1&1&1&0&0&0&0\\0&0&1&1&1&0&0\\0&0&0&0&1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1.270\\-3.380\\2.114\\1.613\\-3.721\\2.931\\0.782\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.004\\0.006\\-0.008\end{bmatrix}$$

$$Q=diag\begin{bmatrix}2&2&1&2&1&2&2\end{bmatrix}$$

$$N_{aa}=AQA^T=\begin{bmatrix}1&1&1&0&0&0&0\\0&0&1&1&1&0&0\\0&0&0&0&1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&&&&&&\\&2&&&&&\\&&1&&&&\\&&&2&&&\\&&&&1&&\\&&&&&2&\\&&&&&&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1&0&0&0&0\\0&0&1&1&1&0&0\\0&0&0&0&1&1&1\end{bmatrix}^T$$

$$=\begin{bmatrix}5&1&0\\1&4&1\\0&1&5\end{bmatrix}$$

$$K=-N_{aa}^{-1}\cdot W=-\begin{bmatrix}5&1&0\\1&4&1\\0&1&5\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0.004\\0.006\\-0.008\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.0004222222\\-0.0018888889\\0.0019777778\end{bmatrix}$$

（3）观测值改正数及平差值

观测值改正数：

$$V=QA^TK=\begin{bmatrix}2&&&&&&\\&2&&&&&\\&&1&&&&\\&&&2&&&\\&&&&1&&\\&&&&&2&\\&&&&&&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1&0&0&0&0\\0&0&1&1&1&0&0\\0&0&0&0&1&1&1\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}-0.0004222222\\-0.0018888889\\0.0019777778\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.001\\-0.001\\-0.002\\-0.004\\0\\0.004\\0.004\end{bmatrix}$$

平差值：

$$\hat{L}=L+V=\begin{bmatrix}1.270\\-3.380\\2.114\\1.613\\-3.721\\2.931\\0.782\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-0.001\\-0.001\\-0.002\\-0.004\\0\\0.004\\0.004\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.269\\-3.381\\2.112\\1.609\\-3.721\\2.935\\0.786\end{bmatrix}$$

（4）平差后单位权中误差及 P2 点高程平差值中误差

平差后单位权中误差：

$$\hat{\sigma}_0=\sqrt{\frac{V^TPV}{r}}=\sqrt{\frac{V^TQ^{-1}V}{r}}=0.00311m=3.11mm$$

改正后观测值的协方差阵：

$$Q_{\hat{L}\hat{L}}=Q-QA^TN_{aa}^{-1}AQ=\begin{bmatrix}52/45&-38/45&-14/45&2/9&4/45&-2/45&-2/45\\-38/45&52/45&-14/45&2/9&4/45&-2/45&-2/45\\-14/45&-14/45&28/45&-4/9&-8/45&4/45&4/45\\2/9&2/9&-4/9&8/9&-4/9&2/9&2/9\\4/45&4/45&-8/45&-4/9&28/45&-14/45&-14/45\\-2/45&-2/45&4/45&2/9&-14/45&52/45&-38/45\\-2/45&-2/45&4/45&2/9&-14/45&-38/45&52/45\end{bmatrix}$$

P2 点高程平差值：

$$\hat{H}_{P2}=H_A+\hat{h}_1+\hat{h}_7=\begin{bmatrix}1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{h}_1\\\hat{h}_7\end{bmatrix}+H_A=12.055m$$

或：$\hat{H}_{P2}=H_A-\hat{h}_2+\hat{h}_4-\hat{h}_6=\begin{bmatrix}-1&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{h}_2\\\hat{h}_4\\\hat{h}_6\end{bmatrix}+H_A=12.055m$

P2 点高程平差值的协方差：

$$Q_{H_{P2}}=\begin{bmatrix}1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}52/45&-2/45\\-2/45&52/45\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\end{bmatrix}^T=2.2222$$

或：

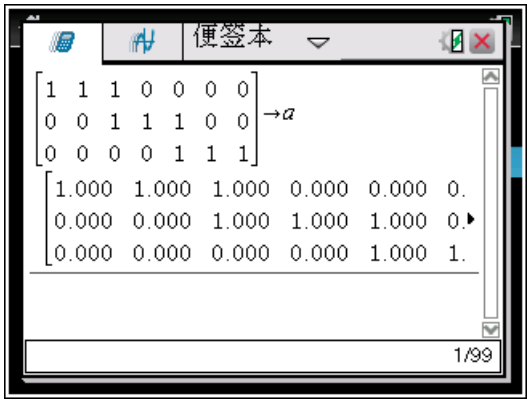
$$Q_{H_{P2}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 52/45 & 2/9 & -2/45 \\ 2/9 & 8/9 & 2/9 \\ -2/45 & 2/9 & 52/45 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T = 2.2222$$

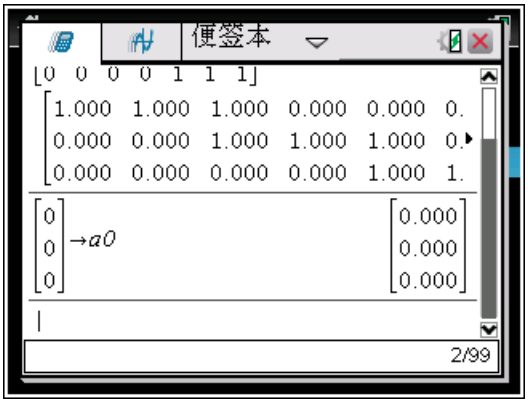
P2 点高程平差值的中误差：

$$\hat{\sigma}_{H_{P2}} = \sqrt{\hat{\sigma}_0^2 Q_{H_{P2}}} = \sqrt{3.11^2 \times 2.2222} = 4.64mm$$

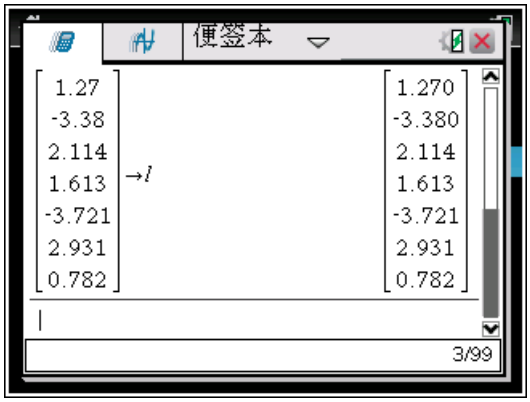
2．利用 TI-nspire 计算器的矩阵功能运算求解

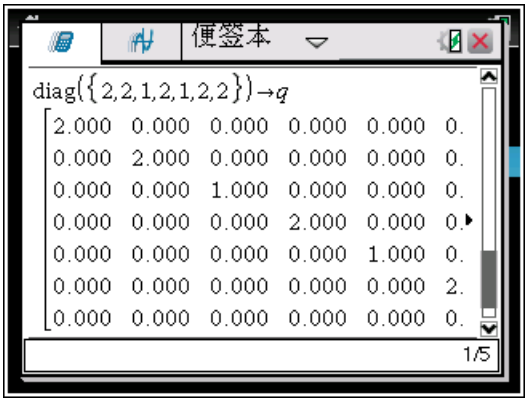
（1）列条件方程

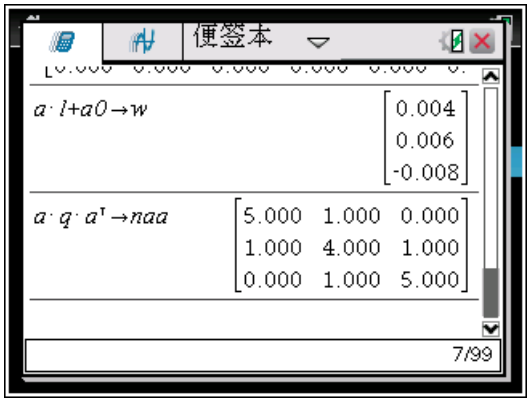


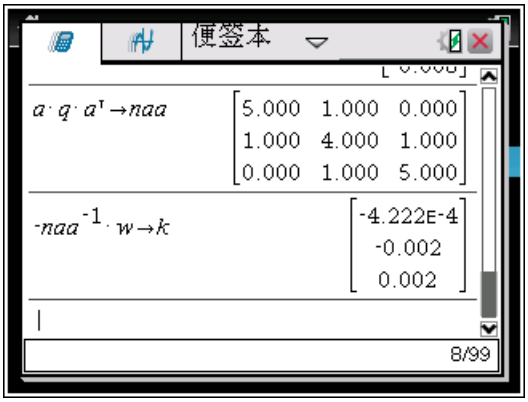


（2）列法方程

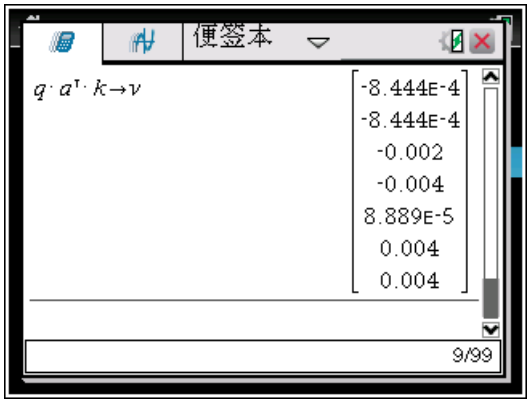




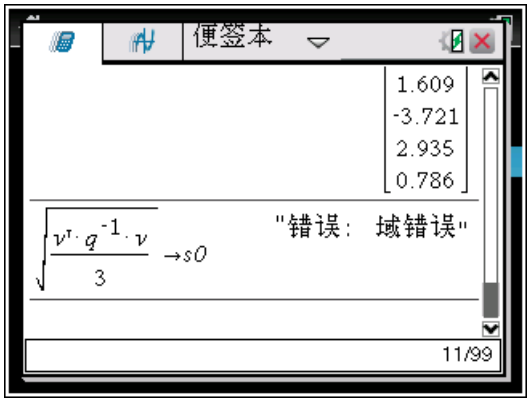


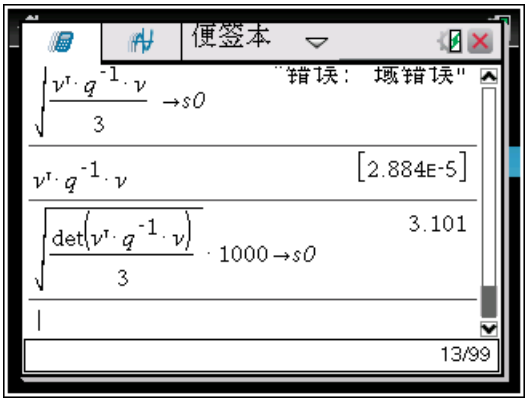


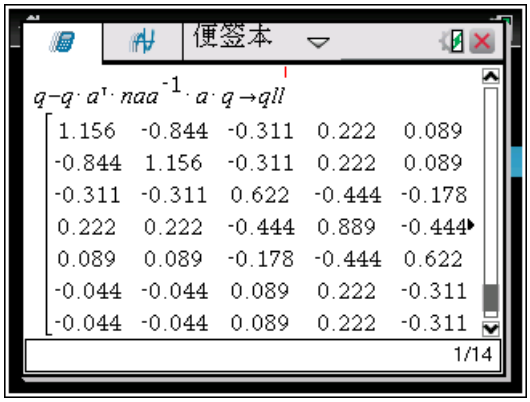
（3）观测值改正数及平差值

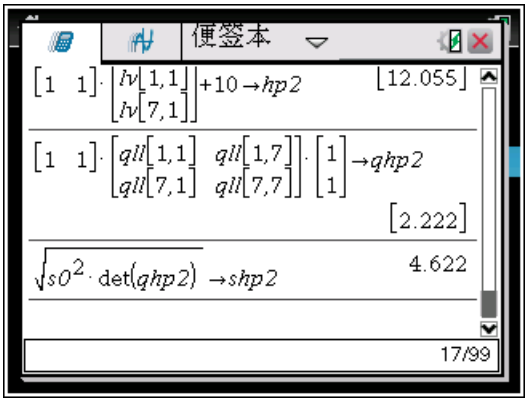


（4）平差后单位权中误差及 P2 点高程平差值中误差









四、 空间坐标转换计算中的矩阵运算

1．计算范例

【案例 3】

已知五个在 WGS-84 和北京 54 坐标系下的坐标，要求计算从 WGS-84 坐标转换到北京 54 坐标的转换参数。

点号	X_{84}	Y_{84}	Z_{84}	X_{54}	Y_{54}	Z_{54}
1	-2066241.5001	5360801.8835	2761896.3022	-2066134.4896	5360847.0595	2761895.5970
2	-1983936.0407	5430615.7282	2685375.7214	-1983828.7084	5430658.9827	2685374.6681
3	-1887112.7302	5468749.1944	2677688.9806	-1887005.1714	5468790.6487	2677687.2680
4	-1808505.4212	5512502.2716	2642356.5720	-1808397.7260	5512542.0921	2642354.4550
5	-1847017.0670	5573542.7934	2483802.9904	-1846909.0036	5573582.6511	2483801.6147

这里我们选取三个公共控制点，即 1~3 点，来计算从 WGS-84 坐标转换到北京 54 坐标的转换参数，并将 4、5 点的 WGS-84 坐标转换成北京 54 坐标。（红色方框中已知的北京 54 坐标作为计算结果的对比）。

系数矩阵：

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&-z&y&x\\0&1&0&z&0&-x&y\\0&0&1&-y&x&0&z\end{bmatrix}_i$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0&0&-2761896.3022&5360801.8835&-2066241.5001\\0&1&0&2761896.3022&0&2066241.5001&5360801.8835\\0&0&1&-5360801.8835&-2066241.5001&0&2761896.3022\\1&0&0&0&-2685375.7214&5430615.7282&-1983936.0407\\0&1&0&2685375.7214&0&1983936.0407&5430615.7282\\0&0&1&-5430615.7282&-1983936.0407&0&2685375.7214\\1&0&0&0&-2677688.9806&5468749.1944&-1887112.7302\\0&1&0&2677688.9806&0&1887112.7302&5468749.1944\\0&0&1&-5468749.1944&-1887112.7302&0&2677688.9806\end{bmatrix}$$

常数项矩阵：

$$\mathbf{L}=\begin{bmatrix}X\\Y\\Z\end{bmatrix}_i-\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}_i$$

$$=\begin{bmatrix}-2066134.4896-(-2066241.5001)\\5360847.0595-5360801.8835\\2761895.5970-2761896.3022\\-1983828.7084-(-1983936.0407)\\5430658.9827-5430615.7282\\2685374.6681-2685375.7214\\-1887005.1714-(-1887112.7302)\\5468790.6487-5468749.1944\\2677687.2680-2677688.9806\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}107.0105\\45.1760\\-0.7052\\107.3323\\43.2545\\-1.0533\\107.5588\\41.4543\\-1.7126\end{bmatrix}$$

坐标转换七参数估值：

$$\hat{\mathbf{X}}=\left(\mathbf{B}^T\mathbf{B}\right)^{-1}\left(\mathbf{B}^T\mathbf{L}\right)$$

$$\begin{bmatrix}\hat{X}_0\\\hat{Y}_0\\\hat{Z}_0\\\hat{\omega}_X\\\hat{\omega}_Y\\\hat{\omega}_Z\\\hat{m}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8.9459m\\25.7583m\\13.6342m\\2.77519\times10^{-6}rad\\-6.02336\times10^{-6}rad\\1.68642\times10^{-5}rad\\-4.30908\times10^{-6}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8.9459m\\25.7583m\\13.6342m\\0.57242s\\-1.24241s\\3.47849s\\-4.30908ppm\end{bmatrix}$$

精度评定，先求改正数：

$$\mathbf{V}=\mathbf{B}\hat{\mathbf{X}}-\mathbf{L}=\begin{bmatrix}-0.0110\\-0.0074\\0.0066\\0.0290\\0.0129\\-0.0050\\-0.0180\\-0.0054\\-0.0016\end{bmatrix}$$

单位权中误差：

$$\hat{\sigma}_0=\sqrt{\frac{\mathbf{V}^T\mathbf{V}}{n-t}}=\sqrt{\frac{\mathbf{V}^T\mathbf{V}}{9-7}}=0.028m=28mm$$

计算点 4 的北京 54 坐标：

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -z & y & x \\ 0 & 1 & 0 & z & 0 & -x & y \\ 0 & 0 & 1 & -y & x & 0 & z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \\ \omega_X \\ \omega_Y \\ \omega_Z \\ m \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1808505.4212 \\ 5512502.272 \\ 2642356.572 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2642356.572 & 5512502.272 & -1808505.4212 \\ 0 & 1 & 0 & 2642356.572 & 0 & 1808505.4212 & 5512502.272 \\ 0 & 0 & 1 & -5512502.272 & -1808505.4212 & 0 & 2642356.572 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -8.9459 \\ 25.7583 \\ 13.6342 \\ 2.77519\times10^{-6} \\ -6.02336\times10^{-6} \\ 1.68642\times10^{-5} \\ -4.30908\times10^{-6} \end{bmatrix}$$

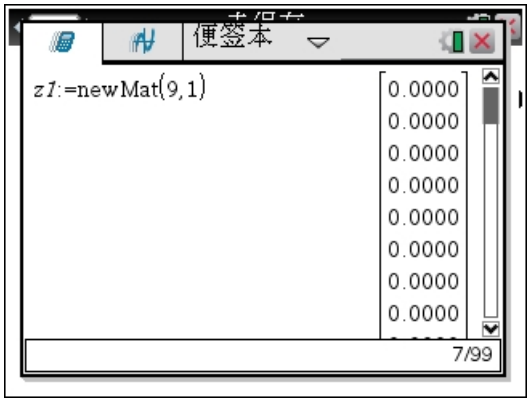
$$= \begin{bmatrix} -1808397.6938 \\ 5512542.1086 \\ 2642354.4151 \end{bmatrix}$$

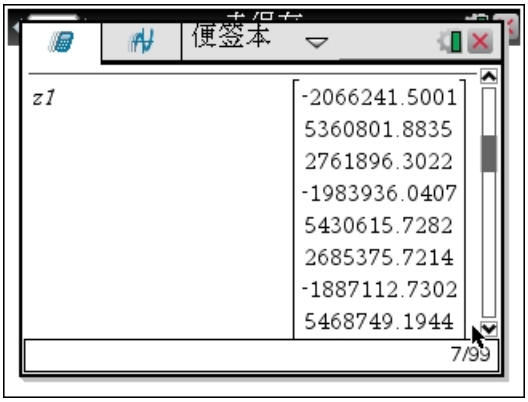
点 4 的坐标转换计算结果与案例的已知坐标的差值：

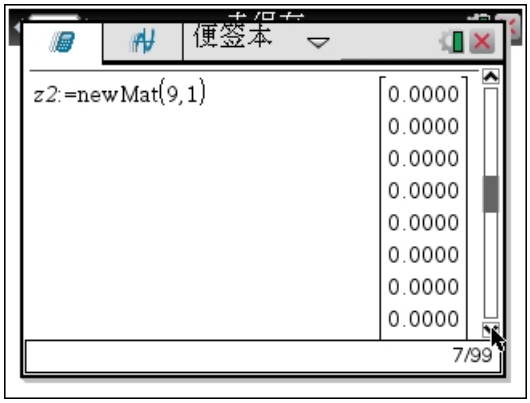
$$\begin{bmatrix} -1808397.6938 \\ 5512542.1086 \\ 2642354.4151 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1808397.7260 \\ 5512542.0921 \\ 2642354.4550 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0322 \\ 0.0165 \\ -0.0399 \end{bmatrix}$$

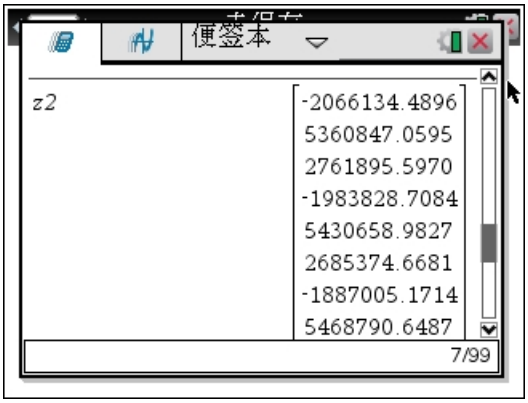
2．利用 TI-nspire 计算器的矩阵功能运算求解

（1）公共点坐标赋值给矩阵变量 z1，z2：

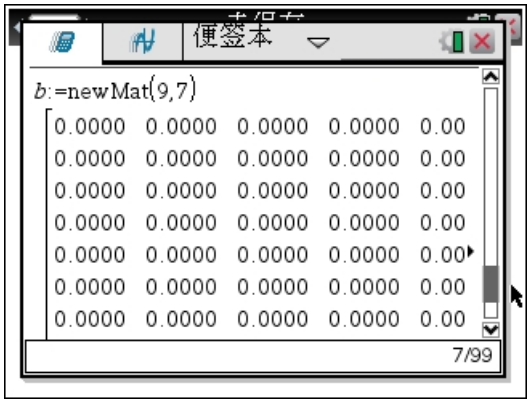


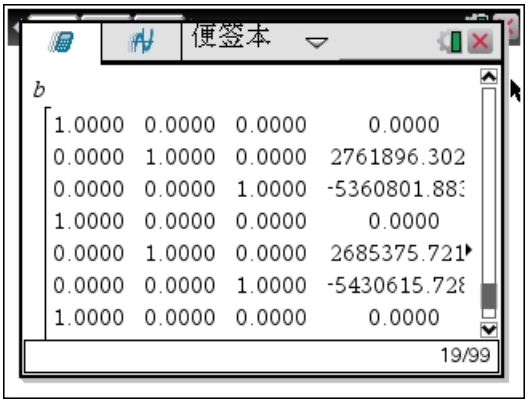




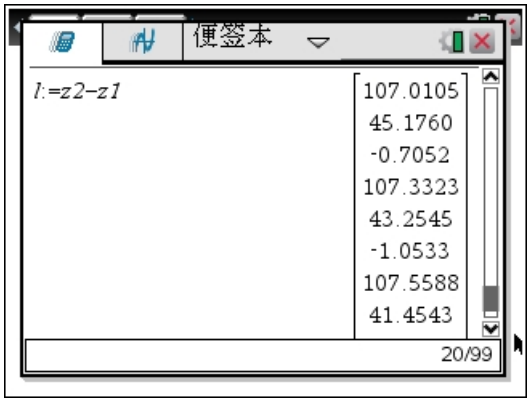


（2）构建系数矩阵 b：

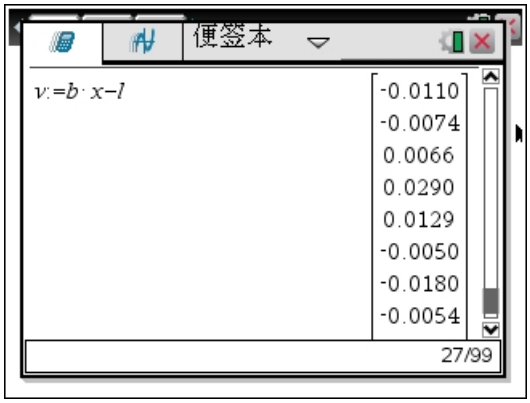




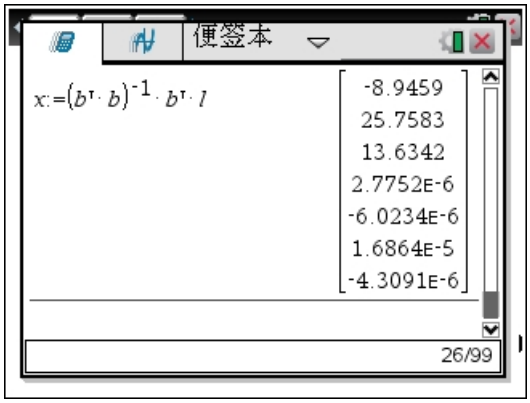
（3）计算常数项矩阵 l：



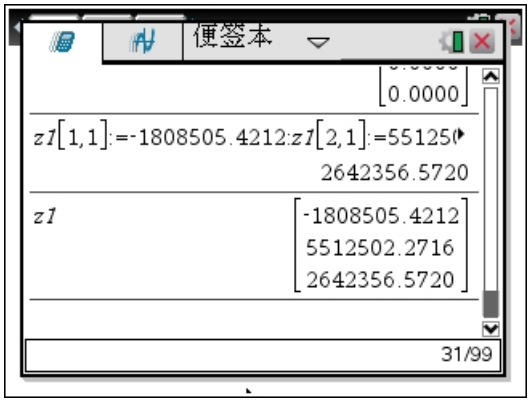
（4）计算坐标转换七参数 x：

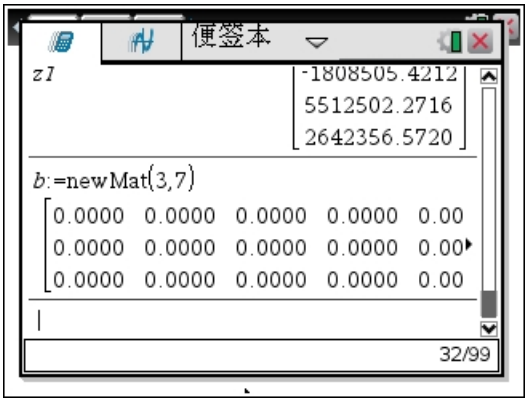


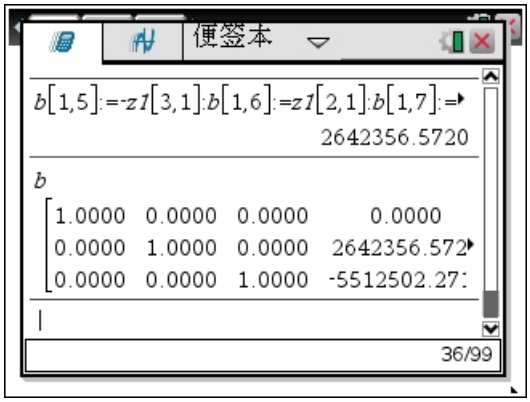
（5）计算单位权中误差 s0：

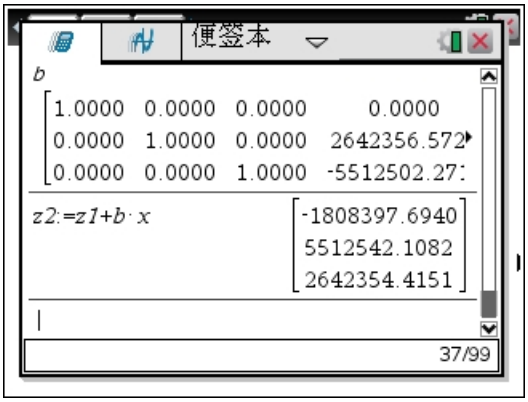


（6）计算点 4 的北京 54 坐标：









课后练习题：

【练习 1】求解线性方程组：

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3+5x_4=48 \\ 3x_1+x_2+2x_3-7x_4=-26 \\ 4x_1+x_2-3x_3+6x_4=55 \\ x_1-2x_2+4x_3-7x_4=-36 \end{cases}$$

【练习 2】使用间接平差的方法计算案例 2 的过程如下，请尝试利用 TI-nspire 计算器的矩阵功能来计算。

$n=7,t=4,r=3$

（1）列观测方程

设待定点 P1、P2、P3、P4 的高程为参数 X_1,X_2,X_3,X_4，并设初始值为：

$$X_1^0=H_A+h_1=10.000+1.270=11.270m$$
$$X_2^0=H_A+h_1+h_7=10.000+1.270+0.782=12.052m$$
$$X_3^0=H_A-h_2+h_4=10.000+3.380+1.613=14.993m$$
$$X_4^0=H_A-h_2=10.000+3.380=13.380m$$

列 7 个观测方程：

$$\begin{cases} \hat{h}_1=\hat{X}_1-H_A \\ \hat{h}_2=H_A-\hat{X}_4 \\ \hat{h}_3=\hat{X}_4-\hat{X}_1 \\ \hat{h}_4=\hat{X}_3-\hat{X}_4 \\ \hat{h}_5=\hat{X}_1-\hat{X}_3 \\ \hat{h}_6=\hat{X}_3-\hat{X}_2 \\ \hat{h}_7=\hat{X}_2-\hat{X}_1 \end{cases}$$

$$\hat{L}=B\hat{X}+d$$

$$\hat{L}=\begin{bmatrix}\hat{h}_1 & \hat{h}_2 & \hat{h}_3 & \hat{h}_4 & \hat{h}_5 & \hat{h}_6 & \hat{h}_7\end{bmatrix}^T,\quad \hat{X}=\begin{bmatrix}\hat{X}_1 & \hat{X}_2 & \hat{X}_3 & \hat{X}_4\end{bmatrix}^T$$

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\qquad d=\begin{bmatrix} -H_A \\ H_A \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -10.000 \\ 10.000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

（2）误差方程

$$V = B\hat{x} - l$$

$$-l = BX^0 + d - L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 11.270 \\ 12.052 \\ 14.993 \\ 13.380 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -10.000 \\ 10.000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1.270 \\ -3.380 \\ 2.114 \\ 1.613 \\ -3.721 \\ 2.931 \\ 0.782 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.004 \\ 0 \\ -0.002 \\ 0.010 \\ 0 \end{bmatrix}$$

（3）法方程及其解

$$B^T PB\hat{x} - B^T Pl = 0$$

$$P = diag\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$N_{bb} = B^T PB = \begin{bmatrix} 3 & -0.5 & -1 & -1 \\ -0.5 & 1 & -0.5 & 0 \\ -1 & -0.5 & 2 & -0.5 \\ -1 & 0 & -0.5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$W = B^T Pl = \begin{bmatrix} -0.002 \\ 0.005 \\ -0.007 \\ 0.004 \end{bmatrix}$$

$$\hat{x} = N_{bb}^{-1} W = \begin{bmatrix} 3 & -0.5 & -1 & -1 \\ -0.5 & 1 & -0.5 & 0 \\ -1 & -0.5 & 2 & -0.5 \\ -1 & 0 & -0.5 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -0.002 \\ 0.005 \\ -0.007 \\ 0.004 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.001 \\ 0.003 \\ -0.003 \\ 0.001 \end{bmatrix}$$

（4）观测值改正数、待求点高程

观测值改正数：

$$V = B\hat{x} - l = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0.001 \\ 0.003 \\ -0.003 \\ 0.001 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.004 \\ 0 \\ -0.002 \\ 0.010 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.001 \\ -0.001 \\ -0.002 \\ -0.004 \\ 0 \\ 0.004 \\ 0.004 \end{bmatrix}$$

观测值平差值：

$$\hat{L}=L+V=\begin{bmatrix}1.270\\-3.380\\2.114\\1.613\\-3.721\\2.931\\0.782\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-0.001\\-0.001\\-0.002\\-0.004\\0\\0.004\\0.004\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.269\\-3.381\\2.112\\1.609\\-3.721\\2.935\\0.786\end{bmatrix}$$

待求点高程平差值：

$$\hat{X}=X^0+\hat{x}=\begin{bmatrix}H_{P1}\\H_{P2}\\H_{P3}\\H_{P4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11.270\\12.052\\14.993\\13.380\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-0.001\\0.003\\-0.003\\0.001\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11.269\\12.055\\14.990\\13.381\end{bmatrix}$$

（5）平差后单位权中误差及 P2 点高程平差值中误差

平差后单位权中误差：

$$\hat{\sigma}_0=\sqrt{\frac{V^TPV}{r}}=0.00311m=3.11mm$$

各待求点高程平差值的协方差：

$$Q_{\hat{X}\hat{X}}=N_{bb}^{-1}=\begin{bmatrix}3&-0.5&-1&-1\\-0.5&1&-0.5&0\\-1&-0.5&2&-0.5\\-1&0&-0.5&2\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1.1556&1.1111&1.0667&0.8444\\1.1111&2.2222&1.3333&0.8889\\1.0667&1.3333&1.6000&0.9333\\0.8444&0.8889&0.9333&1.1556\end{bmatrix}$$

P2 点高程平差值的中误差：

$$\hat{\sigma}_{H_{P2}}=\sqrt{\hat{\sigma}_0^2Q_{H_{P2}}}=\sqrt{3.11^2\times2.2222}=4.64mm$$

【练习 3】利用案例 3 的坐标转换参数，计算点 5 的北京 54 坐标，并与已知值比较。

【练习 4】以下是一组公共控制点坐标，计算从北京 54 到西安 80 的坐标转换参数：

北京 54 坐标系

d17, 4352398.526, 518461.249, 1.772

d18, 4351942.036, 518613.749, 1.812

d19, 4352860.733, 518414.250, 1.949

西安 80 坐标系

d17, 4352317.628, 509717.519, 1.689

d18, 4351861.020, 509869.512, 1.775

d19, 4352779.883, 509671.057, 1.890