利用复数进行平面直角坐标的相关计算

主讲人：王中伟（湖南交通职业技术学院）

【主要内容】

1．复数简介；

2．利用复数进行平面坐标的正算与反算；

3．利用复数进行平面坐标转换计算。

一、 复数简介

1．复数的表示形式

复数（complex number）的表示形式有三种：

（1）直角坐标：$a+b\mathbf{i}$

（2）极坐标：$r\angle\theta$

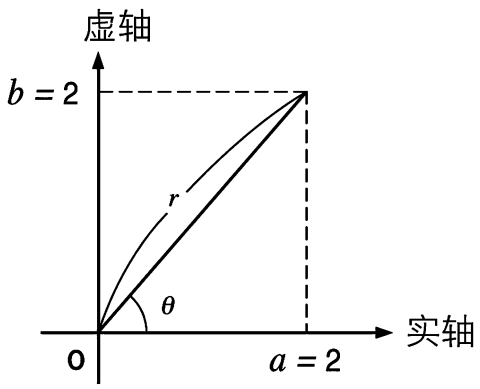
（3）指数：$r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，$\theta$ 只能为弧度

其中，极坐标和指数表示形式其实质是极坐标表示的两种形式。

2．复数的几何意义

复数 $a+b\mathrm{i}$，其中 a 称为实部（real part），b 称为虚部（imaginary part），规定 i 为虚数单位，且 $i^2=i\times i=-1$。

复数的直角坐标与极坐标表示形式有明确的几何意义：以实部为横轴，虚部为纵轴建立平面坐标系，则称 $r=\sqrt{a^2+b^2}$ 为复数 $a+b\mathrm{i}$ 的模，$\theta=\tan^{-1}\dfrac{b}{a}$ 为复数 $a+b\mathrm{i}$ 的极角（模角）。



$$Z=a+b\mathbf{i}=r\angle\theta=r\mathrm{e}^{i\theta},\quad r>0$$

对于复数 $Z=a+b\mathrm{i}$，称复数 $Z'=a-b\mathrm{i}$ 为 Z 的共轭复数，即两个实部相等，虚部（虚部不等于 0）互为相反数的复数互为共轭复数（conjugate complex number）。

3．TI 计算器中的复数计算函数

在电脑常用的编程语言中（如 VB、VC），没有复数计算功能，但在 TI 计算器中则有，而且 TI 计算器编程也可以利用复数计算功能。

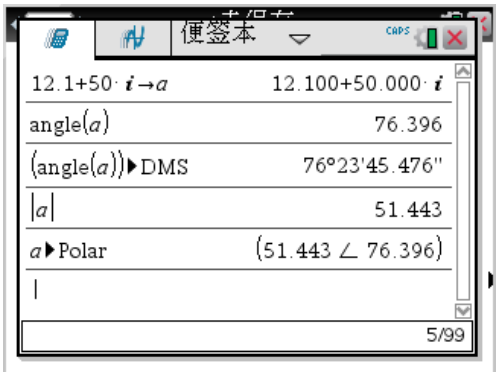
德州仪器 TI-nspire CM-C 计算器提供了 7 个复数计算函数，按“键-2-数值-复数工具”即可调出复数计算函数菜单，如下图所示：

复数工具的各函数格式为：

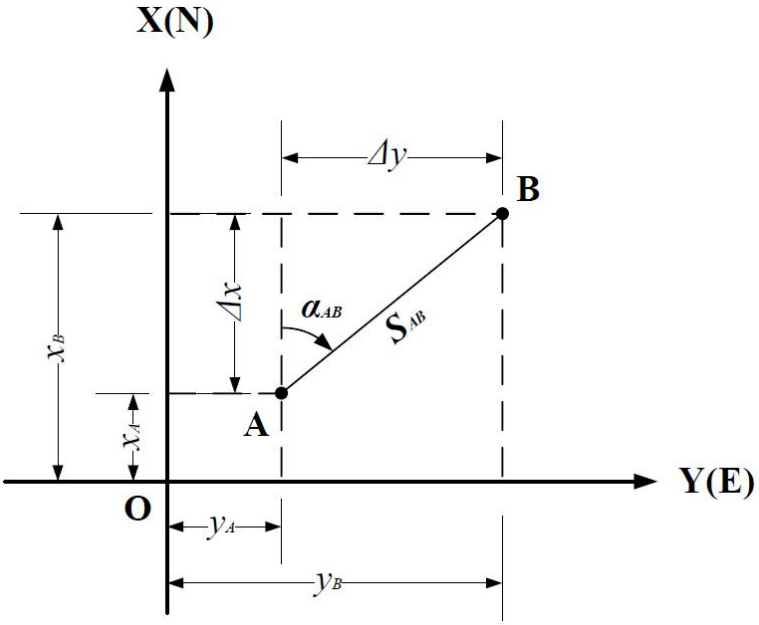
1．共轭复数：conj(复数表达式)
2．实部：real(复数表达式)
3．虚部：imag(复数表达式)
4．极角：angle(复数表达式)
5．模：abs(复数表达式)
6．转换成极坐标：@>ploar(复数表达式)
7．转换成直角坐标：@>rect(复数表达式)

操作：

复数 12.1+50i，计算极角、模、转换成极坐标。



4．测量坐标系简介



测量工作中采用的直角坐标及角度方向规定为：

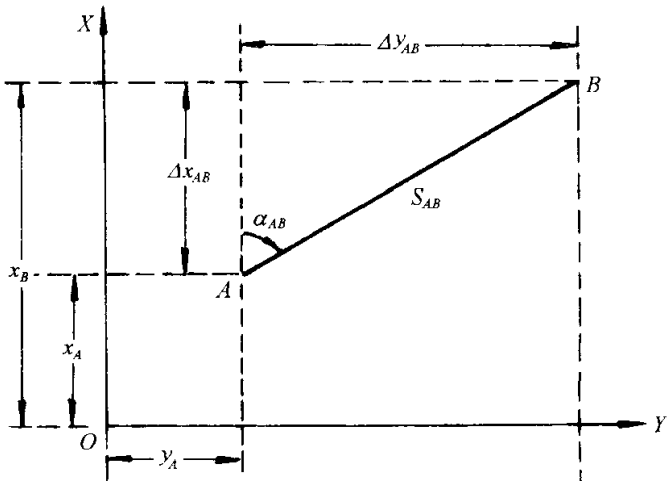
1．南北方向为纵轴，记为 X 轴（又称 N 轴），向北为正；
2．东西方向为横轴，记为 Y 轴（又称 E 轴），向东为正；
3．以北方向为 0 角度方向，角度顺时针旋转为正，该角度又称坐标方位角，记为α。

测量坐标系的 X 轴与 Y 轴和数学坐标系的规定互换，其目的是为了定向方便，并且可将数学上的相关公式直接照搬到测量的计算工作中，不需作任何变更。

二、 平面坐标正算与反算

1．坐标正算

根据直线的边长、坐标方位角和一个端点的坐标，计算直线另一个端点的坐标。

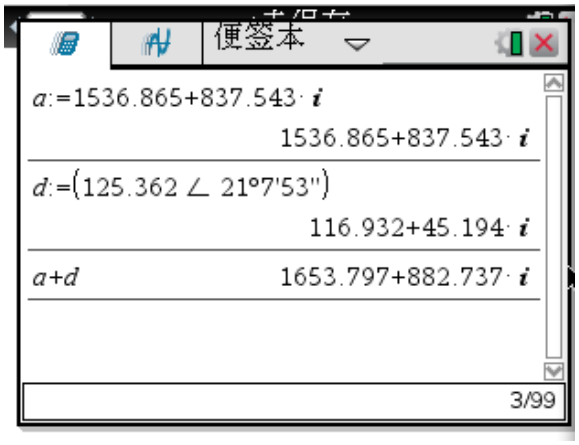


【实例 1】

已知直线 AB 的边长为 125.362m，坐标方位角 $\alpha_{AB}=21°07'53''$，其中 A 点的坐标为（1536.865，837.543），求 B 的坐标 (x_B, y_B)。

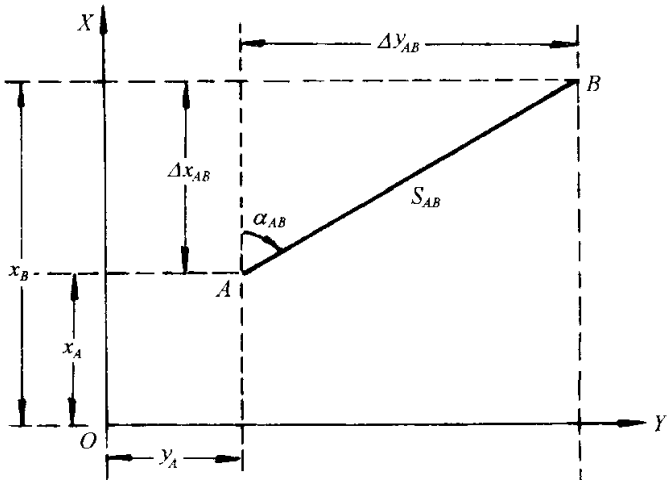
计算结果：$x_B=1653.797m$，$y_B=882.737m$。

使用德州仪器 TI-nspire CM-C 计算器截图如下：



2．坐标反算

已知直线两个端点的坐标，计算直线的边长和坐标方位角。

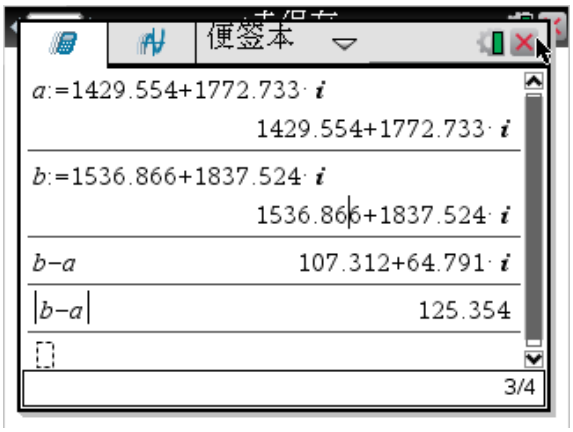


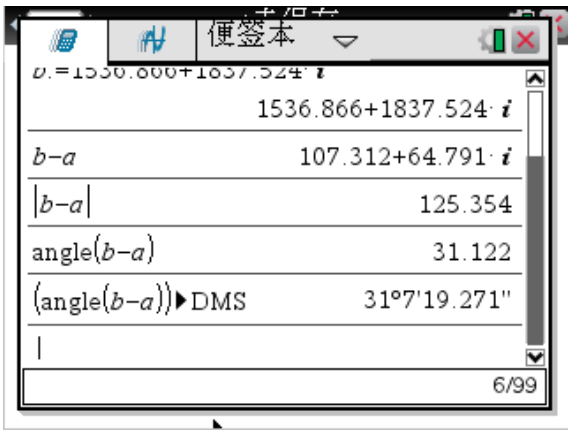
【实例 2】

已知 A 点坐标为（1429.554，1772.733），B 点坐标为（1536.866，1837.524），求 AB 两点的水平距离 S_{AB} 和坐标方位角 α_{AB}。

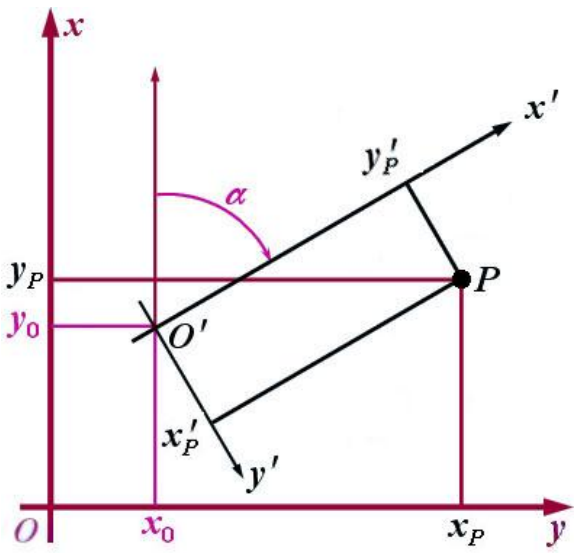
计算结果：$S_{AB}=125.354m$，$\alpha_{AB}=31^{\circ}07'19''$。

使用德州仪器 TI-nspire CM-C 计算器截图如下：





三、 平面坐标转换



如图所示，有两套坐标系 XOY 和 $X'O'Y'$，我们一般称 XOY 是测量坐标系或全局坐标系，称 $X'O'Y'$ 是施工坐标系或局部坐标系。

局部坐标系 $X'O'Y'$ 在全局坐标系 XOY 中的位置一般用四个参数来描述：

1．平移参数两个，即局部坐标系原点 O' 在全局坐标系中的坐标 (x_0, y_0)，用复数记为 $Z_0 = x_0 + y_0\mathbf{i}$；

2．旋转参数一个，即局部坐标系的 X' 轴相对于全局坐标系的 X 之间的夹角，记为 α；

3．缩放参数 k，一般情况下记 $k=1$，即：没有缩放。

坐标系中有一点 P，在 XOY 坐标系中的坐标 (x_P, y_p)，用复数记为 $Z_P = x_P + y_P\mathbf{i}$，在 $X'O'Y'$ 坐标系中的坐标 (x'_P, y'_P)，用复数记为 $Z'_P = x'_P + y'_P\mathbf{i}$。

此外，缩放与旋转参数可以用极坐标的复数形式来表示，即：$Z_\alpha = k\angle\alpha$

1．局部坐标转换为全局坐标

计算公式为：

$$\left.\begin{aligned} x_P &= x_0 + x'_P\cos\alpha - y'_P\sin\alpha \\ y_P &= y_0 + x'_P\sin\alpha + y'_P\cos\alpha \end{aligned}\right\}$$

矩阵形式为：

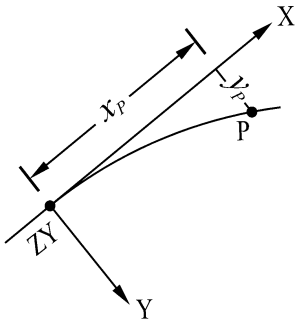
$$\begin{bmatrix} x_P \\ y_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_P \\ y'_P \end{bmatrix}$$

复数形式为：

$$Z_P = Z_0 + Z_\alpha \cdot Z'_P$$

【实例 3】

如下图所示，某路线一单圆曲线，在施工放样中，以 ZY 点（K0+271.808）为坐标原点，以切线方向为X轴方向，以垂直于X方向为Y轴方向建立局部坐标系，X轴的方位角为60°，圆曲线上有一点 P（K0+500），局部坐标系原点在全局坐标系中的坐标、P 点在施工坐标系中的坐标等数据汇总到表中，求 P 点在全局坐标系中的坐标。



桩号	在局部坐标系中的 X 坐标（m）	在局部坐标系中的 Y 坐标（m）	在全局坐标系中的 X 坐标（m）	在全局坐标系中的 Y 坐标（m）
ZY(K0+271.808)	0.000	0.000	1135.904	1235.393
+500	228.068	6.507	?	?

解：

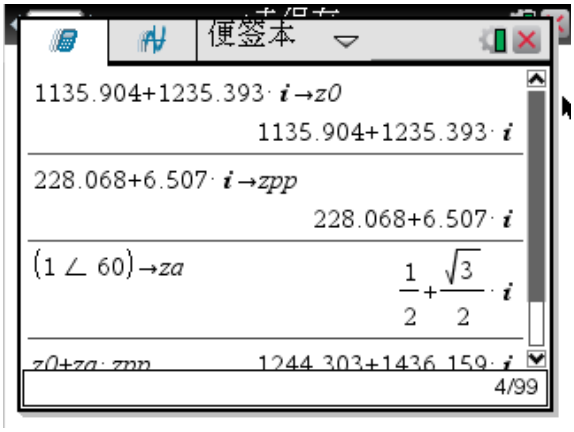
（1）用代数方法计算：

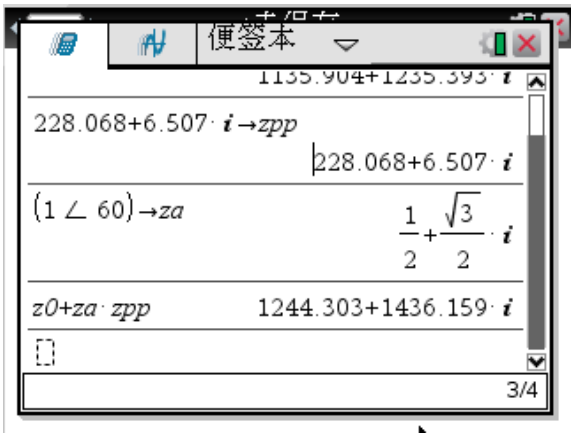
$$
\begin{aligned}
x_P &= x_0 + x'_P \cos\alpha - y'_P \sin\alpha \\
&= 1135.904 + 228.068\cos 60 - 6.507\sin 60 \\
&= 1244.303m
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y_P &= y_0 + x'_P \sin\alpha + y'_P \cos\alpha \\
&= 1235.393 + 228.068\sin 60 + 6.507\cos 60 \\
&= 1436.159m
\end{aligned}
$$

（2）用复数计算：

使用德州仪器 TI-nspire CM-C 计算器截图如下：





2．坐标转换参数的计算

设已知 A、B 两点在全局坐标系下的坐标分别为：(x_A, y_A)、(x_B, y_B)，复数形式分别为：Z_A、Z_B，而在局部坐标系下的坐标分别为：(x'_A, y'_A)、(x'_B, y'_B)，复数形式分别为：Z'_A、Z'_B。

（1）计算缩放旋转参数

缩放旋转参数用复数记为 $Z_\alpha = k\angle\alpha$。

$$Z_\alpha = \frac{Z_B - Z_A}{Z'_B - Z'_A}$$

（2）计算平移参数

平移参数也就是局部坐标系原点在全局坐标系中的坐标 (x_0, y_0)，用复数记为 $Z_0 = x_0 + y_0\mathbf{i}$。

$$Z_0 = Z_A - Z_\alpha \cdot Z'_A$$

【实例 4】

长沙市人民路东延线某路段为直线，基本数据为：

起点桩号 K9+950，坐标 X=99306.614，Y=61872.444；

终点桩号 K10+846.898，坐标 X=99569.677，Y=62729.896。

若建立以桩号为 X 坐标，以 Y 坐标表示距中线距离的施工坐标系，试计算坐标转换参数。

解：

（1）用代数方法计算：

假定路线起点为 A，终点为 B

根据题意，则 A、B 点在测量坐标系中的坐标为：

$(x_A, y_A) = (99306.614, 61872.444)$

$(x_B, y_B) = (99569.677, 62729.896)$

A、B 点在施工坐标系中的坐标为：

$(x'_A, y'_A) = (9950, 0)$

$(x'_B, y'_B) = (10846.898, 0)$

1）计算缩放系数

分别计算 A、B 两点在测量坐标系和施工坐标系下的平距，分别为：

$$S_{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(99306.614 - 99569.677)^2 + (61872.444 - 62729.896)^2}$$
$$= 896.898m$$

$$S'_{AB} = \sqrt{(x'_A - x'_B)^2 + (y'_A - y'_B)^2} = \sqrt{(10846.898 - 9950)^2 + 0}$$
$$= 896.898m$$

则缩放参数：

$$k = \frac{S_{AB}}{S'_{AB}} = 1$$

2）计算旋转参数

分别计算 A、B 两点在测量坐标系和施工坐标系下的方位角，分别为：

α_{AB}=72°56′39″

α'_{AB}=0

$$\alpha = \alpha_{AB} - \alpha'_{AB} = 72°56'39''$$

3）计算平移参数

平移参数也就是局部坐标系原点在全局坐标系中的坐标。

$S' = \sqrt{x'^2_A + y'^2_A} = 9950m$，

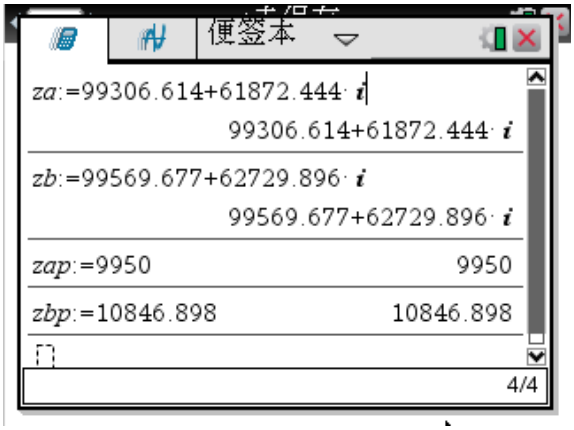
则：

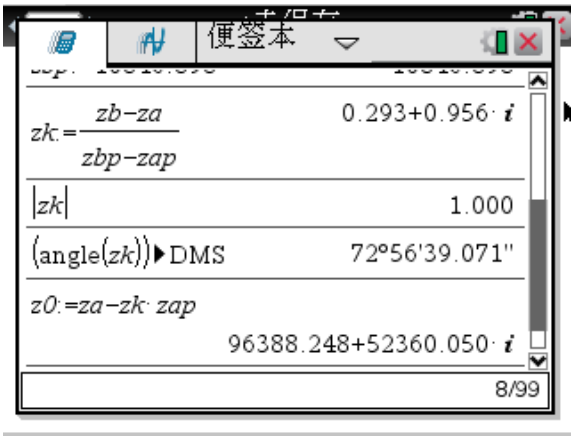
$$x_0 = x_A - S' \cdot \cos\alpha_{AB} = 99306.614 - 9950 \times \cos 72^\circ 56' 39''$$
$$= 96388.245m$$

$$y_0 = y_A - S' \cdot \sin\alpha_{AB} = 61872.444 - 9950 \times \sin 72^\circ 56' 39''$$
$$= 52360.051m$$

（2）用复数计算：

使用德州仪器 TI-nspire CM-C 计算器截图如下：





3．全局坐标转换为局部坐标

计算公式为：

$$\left.\begin{aligned} x'_P &= (x_P - x_0)\cos\alpha + (y_P - y_0)\sin\alpha \\ y'_P &= -(x_P - x_0)\sin\alpha + (y_P - y_0)\cos\alpha \end{aligned}\right\}$$

矩阵形式为：

$$\begin{bmatrix} x'_P \\ y'_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_P - x_0 \\ y_P - y_0 \end{bmatrix}$$

复数形式为：

$$Z'_P = \frac{Z_P - Z_0}{Z_\alpha}$$

【实例 5】

长沙市人民路东延线某路段，其测量坐标系与施工坐标系的转换参数见【实例 4】计算结果，已知某控制点坐标是（99538.647，62438.948），试计算该控制点在施工坐标系中的坐标。

解：

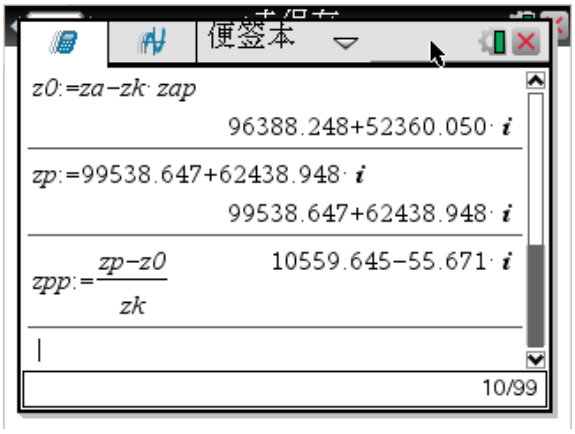
（1）用代数方法计算：

$$
\begin{aligned}
x'_P &= (x_P - x_0)\cos\alpha + (y_P - y_0)\sin\alpha \\
&= (99538.647 - 96388.245)\cos 72^\circ 56' 39'' + (62438.948 - 52360.051)\sin 72^\circ 56' 39'' \\
&= 10559.645m
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y'_P &= -(x_P - x_0)\sin\alpha + (y_P - y_0)\cos\alpha \\
&= -(99538.647 - 96388.245)\sin 72^\circ 56' 39'' + (62438.948 - 52360.051)\cos 72^\circ 56' 39'' \\
&= -55.670m
\end{aligned}
$$

（2）用复数计算：

使用德州仪器 TI-nspire CM-C 计算器截图如下（接着实例 4 的计算器操作，保持相关变量）：



使用复数进行坐标计算，无论是变量输入还是计算公式，都比使用实数计算要简单得多，尤其进行平面直角坐标转换计算。