TI 手持技术与中学数学教学的拓展与深化

浙江省黄岩中学金克勤

一、TI—NspireCAS 图形计算器的特点

TI—NspireCAS 图形计算器将数值计算与符号运算、函数图象绘制与图象分析、几何作图与测量变换、数据统计与分析判断、电子表格与数据库技术等有机地整合在一起，功能强大，使用简便。并且数据与图象之间，各功能模块之间实现了快速数据链接，实现了数据共享，体现了数学中重要的多元联系的思想，这不仅是中学数学教学中一款优秀的计算工具，更是一种数学学习的认知工具。今天我和各位一起探讨这款机器在中学数学教学的一些应用，谈谈自己的一点做法与心得，希望能给对各位有点启发和帮助。

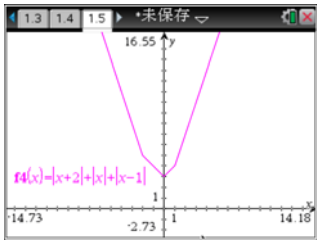
二、TI—NspireCAS 图形计算器在中学数学教学中的一些应用

1.函数图象及其分析：

由于 TI—NspireCAS 图形计算具有强大的函数图象绘制功能，我们容易地画出各种函数图象，并且还可以分析函数图象的各种特征，从而帮助我们理解函数的性质。

例 1 （2012 年北京大学自主招生试题）

求 x 的取值范围，使得 $f(x)=|x+2|+|x|+|x-1|$ 是增函数。



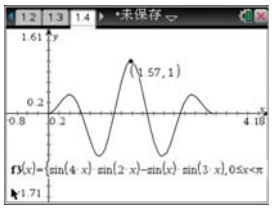
分析：要判断函数 $f(x)$ 的单调递增区间，只要作出其图象即可。

从函数 $f(x)$ 的图象可知 $f(x)$ 的单调递增区间是 $[0,+\infty)$。

例 2 （2012 年北京大学自主招生试题）

求使得 $\sin 4x\sin 2x-\sin x\sin 3x=a$ 在 $[0,\pi)$ 内有唯一解的 a。

分析：作出函数 $f(x)=\sin 4x\sin 2x-\sin x\sin 3x$ 在区间 $[0,\pi)$ 内的图象，观察与函数 $y=a$ 图象的交点，从而确定 a 的值。由函数 $f(x)$ 的图象可知 a 等于 $f(x)$ 在区间 $[0,\pi)$ 上的最大值，即 $a=f_{Max}(x)$，我们可以通过图象分析功能求得 $a=1$



2.数值与符号运算

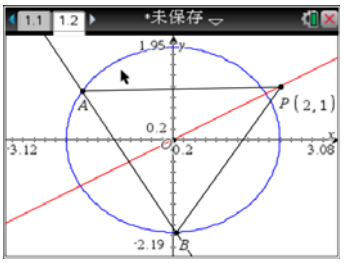
数值与符号运算是是 TI—NspireCAS 图形计算器的主要功能，它能够帮助我们进行各种数值运算，因式分解和多项式运算，向量运算，求函数的导数及最值，能进行各种概率及统计运算，充分满足高中数学的各种运算要求。

例 3 （2012 年浙江省高考理科 21 题）

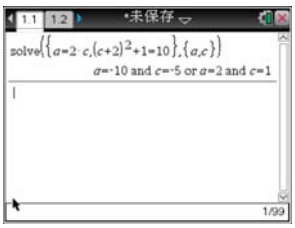
如图，椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的离心率为 $\dfrac{1}{2}$，其左焦点到点 P(2，1)的距离为 $\sqrt{10}$，不过原点 O 的直线 l 与 C 相交于 A，B 两点，且线段 AB 被直线 OP 平分。

（1） 求椭圆 C 的方程；

（2） 求△ABP 面积最大时直线 l 的方程。



分析：（1）由于椭圆的离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$，于是 $a=2c$，而左焦点的坐标为（$-c$，0），其到到点 P(2，1)的距离为 $\sqrt{10}$，因此有 $(-c-2)^2+(0-1)^2=10$，要求出椭圆的方程，就是要求出方程组 $\begin{cases} a=2c \\ (c+2)^2+1=10 \end{cases}$ 的解。我们可以这样做：



Solve({ $a=2c$，$(c+2)^2+1=10$ }，{ a，c })，可求出 a，c 的值，从而求出了椭圆的方程 $3x^2+4y^2=12$。

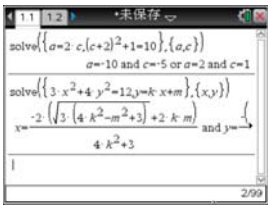
（2）为了求出△ABP 的面积，我们可以设直线 l 的方程为 $y=kx+m$，直线 l 与椭圆 C 的两个交点为 A(x_1，y_1)，B(x_2，y_2)，利用计算器直接求出 A，B 两点的坐标：

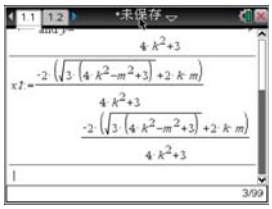
Solve({ $3x^2+4y^2=12$，$y=kx+m$ }，{ x，y })

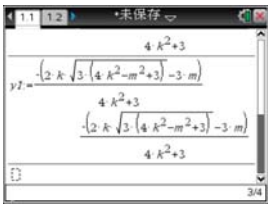
我们使 $x_1=\dfrac{-2(\sqrt{3(4k^2-m^2+3)}+2km)}{4k^2+3}$，$y_1=\dfrac{-(2k\sqrt{3(4k^2-m^2+3)}-3m)}{4k^2+3}$

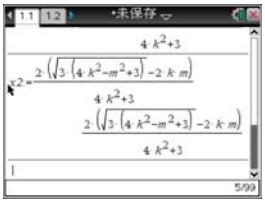
$x_2=\dfrac{2(\sqrt{3(4k^2-m^2+3)}-2km)}{4k^2+3}$，$y_2=\dfrac{2k\sqrt{3(4k^2-m^2+3)}+3m}{4k^2+3}$

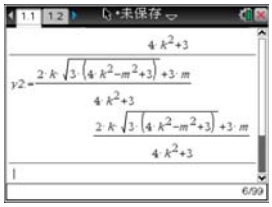
设 AB 的中点为 M(x_0，y_0)，则 $x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}$，$y_0=\dfrac{y_1+y_2}{2}$，且点 M 在直线 OP 上，直线 OP 的方程为 $y=\dfrac{1}{2}x$，于是解方程 $y_0=\dfrac{1}{2}x_0$，Solve($y_0=\dfrac{1}{2}x_0$，k)，可以求出直线 l 的斜率 $k=-\dfrac{3}{2}$。其做法如下：

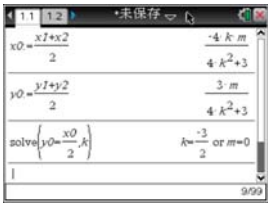




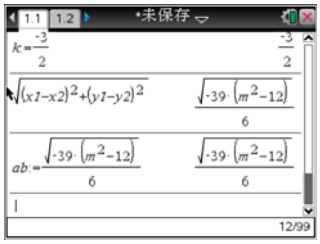




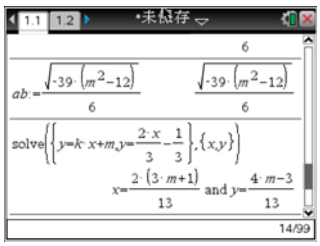




接下来我们求出△ABP 的面积，先使$k=-\frac{3}{2}$，计算线段 AB 的长度：

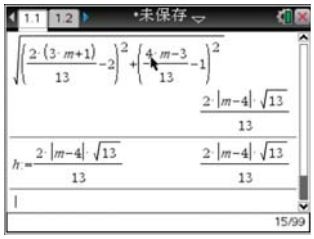


$AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\frac{\sqrt{-39(m^2-12)}}{6}$，再计算点 P 到直线 AB 的距离，过 P 点垂直于 AB 的直线方程为：$y=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}$，我们可以求出垂足的坐标：

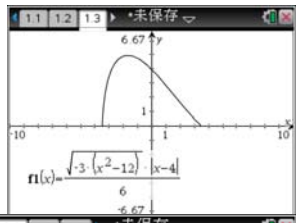


Solve({ $y=kx+m$， $y=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}$ }，{ x， y }，得到：$x=\frac{2(3m+1)}{13}$， $y=\frac{4m-3}{13}$，

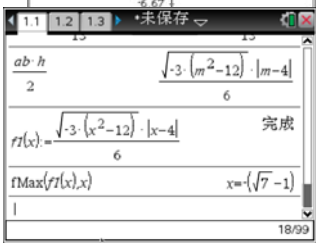
计算垂足与点 P 的距离，得到 AB 边上的高$h=\frac{2|m-4|\sqrt{13}}{13}$。



于是△ABP 的面积 $f(m)=\frac{1}{2}\cdot ab\cdot h=\frac{\sqrt{-3(m^2-12)}\cdot|m-4|}{6}$，



使 $f_1(x)=\frac{\sqrt{-3(x^2-12)}\cdot|x-4|}{6}$，作出函数 $f_1(x)$ 的图象，观察知函数 $f_1(x)$ 存在最大值。求出当函数 $f_1(x)$ 取最大值时自变量 x 的值：$fMax(f1(x),x)$，便得到 m 的值：$m=1-\sqrt{7}$，至此我们得到了问题的解，直线 l 的方程为 $y=-\frac{3}{2}x+1-\sqrt{7}$。



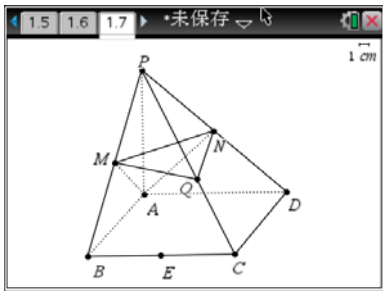
如果我们利用行列式求△ABP 的面积。以不在同一直线上的三点（x_1， y_1），（x_2， y_2），（x_3， y_3）为顶点的三角形面积 $S=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{vmatrix}$。于是计算$\frac{1}{2}$det([1，1，1；2，$x_1$，$x_2$；1，$y_1$，$y_2$]）求得△ABP 的有向面积$\frac{-(m-4)\cdot\sqrt{-3(m^2-12)}}{6}$，

即有△ABP 的面积 $f(m)=\frac{\sqrt{-3(m^2-12)}\cdot|m-4|}{6}$。

3.向量运算

向量作为一种重要的数学概念及运算系统，是高中数学中学习和研究几何问题的重要工具。向量兼具代数和几何的特征，TI—NspireCAS 图形计算器具有很好地向量运算能力。

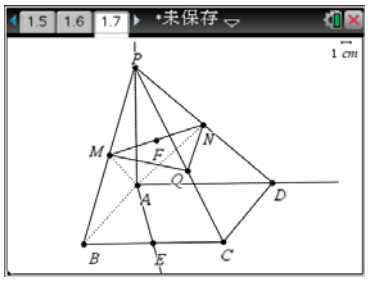
例 4 （2012 年浙江高考理科卷 20 题）



如图，在四棱锥P—ABCD中，底面是边长为$2\sqrt{3}$的菱形，∠BAD＝120°，且PA⊥平面ABCD，PA＝$2\sqrt{6}$，M，N分别为PB，PD的中点。

（1） 证明：MN∥平面 ABCD；

（2） 过点 A 作 AQ⊥PC，垂足为点 Q，求二面角 A—MN—Q 的平面角的余弦值。



分析：因∠BAD＝120°，设E为BC中点，分别以AE，AD，AP为x，y，z轴，建立空间直角坐标系。

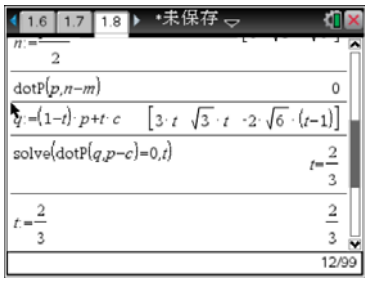
则 B(3，$-\sqrt{3}$，0)，C(3，$\sqrt{3}$，0)，D(0，$2\sqrt{3}$，0)，P(0，0，$2\sqrt{6}$)，

向量$b:=\overrightarrow{AB}$＝[3，$-\sqrt{3}$，0]，$c:=\overrightarrow{AC}$＝[3，$\sqrt{3}$，0]，$d:=\overrightarrow{AD}$＝[0，$2\sqrt{3}$，0]，

$p:=\overrightarrow{AP}$ ＝ [0 ， 0 ， $2\sqrt{6}$]， 因 此 $m:=\overrightarrow{AM}=\dfrac{b+p}{2}$ ，$n:=\overrightarrow{AN}=\dfrac{d+p}{2}$，

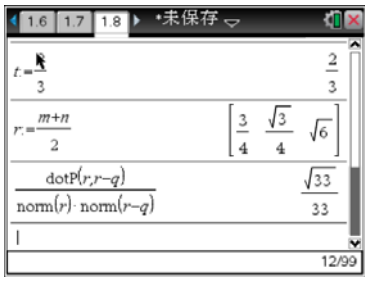
（1）显然向量 p 是平面 ABCD 的法向量。

计算$\overrightarrow{MN}\cdot p=(n-m)\cdot p$＝dotP($n-m$， p)=0，所以 MN∥平面 ABCD。



（2）因点 Q 在线段 PC 上，故$q:=\overrightarrow{AQ}=(1-t)\cdot p+t\cdot c$，由于 AQ⊥PC，利用向量数量积为 0，可求得$t$的值：Solve(dotP($q$，$p-c$)=0，$t$)，求出$t:=\dfrac{2}{3}$。

设 F 为 MN 的中点，则记$r:=\overrightarrow{AF}=\dfrac{m+n}{2}$，向量$\overrightarrow{AF}$与$\overrightarrow{QF}$所成的角即为二面角 A—MN—Q 的平面角，$\cos<\overrightarrow{AF},\overrightarrow{QF}>=\cos<r,r-q>=\dfrac{dotP(r,r-q)}{norm(r)\cdot norm(r-q)}$，得到$\dfrac{\sqrt{33}}{33}$，所以二面角 A—MN—Q 的平面角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{33}}{33}$。

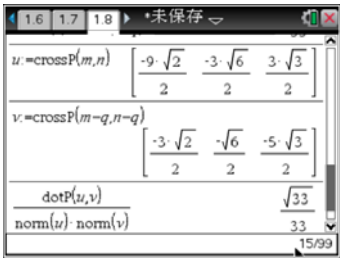


我们也可以通过求平面的法向量来求两个平面所成二面角的大小，我们知道两个向量的向量积是与这两个向量都垂直的向量，即是由这两个向量所生成的平面的一个法向量。于是我们可以采取以下步骤来求两个平面所

成的二面角大小：

$u := crossP(m,n)$ ， $v := crossP(m-q,n-q)$ ，即平面 AMN ，平面 QMN 的法向量分别为 u 和 v ，

$\cos < u,v >= \dfrac{dotP(u,v)}{norm(u)\cdot norm(v)}$，计算结果同样是 $\dfrac{\sqrt{33}}{33}$ 。



三、高中数学学习的拓展与深化

为了培养学生的创新精神和实践能力，高中数学教学改革的重点是改善学生的学习方式，特别是增加合作学习、探究学习和自主学习的内容和时间。由于学生的个性差异和数学能力发展水平的不同，新的学习方式带来了新的问题，学生掌握数学知识的局限性和运用数学知识的能力不足，造成探究学习和自主学习的困难。TI—NspireCAS 图形计算器的应用，给学生提供了强有力的认知工具。

例 5　一列火车大约在下午 1 点（即 13 点）离开甲站，开往乙站，再前往丙站，离开的时间分布如下表所示。

火车离站时间概率表

离站时间	13：00	13：05	13：10
概率	0．7	0．2	0．1

火车从甲站到乙站途中所需平均时间为 30 分钟，标准差为 2 分钟。如果一位旅客希望乘坐这辆火车去丙站，他身在乙地，而且他到达乙站的时间分布如下表所示。

旅客到站时间概率表

到站时间	13：28	13：30	13：32	13：34
概率	0．3	0．4	0．2	0．1

那么，这位旅客能赶上该辆火车的概率有多大？

分析：概率非常重要，在日常生活和生产实际中常常需要知道问题的答案，要回答这些问题要用到概率知识。但有些实际问题与教材中的内容差距较大，对于这一类问题，由于解决的难度较大，我们可以采用模拟的方法去解决。

（1）由于火车离开甲站的时间 t_1 有三个可能的取值，如果我们以下午 1 点为基准时间，分钟为时间单位，t_1 的三个可能取值是正点 t_1=0，晚点 5 分钟 t_1=5，晚点 10 分钟 t_1=10。由于 $P(t_1=0)=0.7$， $P(t_1=5)=0.2$， $P(t_1=10)=0.1$，所以 t_1 是一个离散型的随机变量。

我们可以利用 TI—nspire 图形计算器内置函数 rand()与 When 及 When 的嵌套使用，来实现对 t_1 的模拟。设 $x=rand()$，则 t_1=When($x<0.7$，0，When（ $x>0.9$，10，5）)，于是 t_1 满足要求。

（2）旅客到乙站的时间 t_2 有四个可能取值： t_2=28， t_2=30， t_2=32， t_2=34，并且有 $P(t_2=28)=0.3$， $P(t_2=30)=0.4$， $P(t_2=32)=0.2$， $P(t_2=34)=0.1$，显然 t_2 也是

一个离散型随机变量。同样，设 $x = rand()$，则 t_2 =When($x < 0.3$，28，When（ $x < 0.7$，30，When($x < 0.9$，32，34))），于是 t_2 满足要求。

（3）由于火车从甲站到乙站所需的时间是一个连续的量，因此 t_3 有别于 t_1、t_2，是一个连续型随机变量。由于我们不知道 t_3 的分布类型，但已经知道了火车从甲站到乙站所需时间的平均值为 30 分钟，标准差为 2 分钟，因此我们可以认为随机变量 t_3 服从正态分布，即 t_3 ～N（30，2^2）。利用TI—nspire图形计算器中的内置函数randNorm($\bar{x}$， σ)，可以产生一个服从正态分布N（ $\bar{x}$， σ^2 ）的随机数，用这个随机数可以模拟时间 t_3。

（4）这位旅客要赶上这辆火车的条件是：$t_2 < t_1 + t_3$。我们可以通过计算器模拟出三个时间 t_1、t_2、t_3，然后检验 $t_2 < t_1 + t_3$ 是否成立。如果成立，即能够赶上火车，若不然，则赶不上火车。通过多次模拟，统计能够赶上火车的频率，以此来估计这位旅客能够赶上这辆火车的概率。我们可以按以下的步骤实现目标：

（1）在“列表与电子表格（List&SpreadSheet）”页面的第一列（A 列）输入“=rand()”产生一个（0，1）内的随机数；

（2）在第二列（B 列）输入“= When($A1 < 0.7$，0，When（ $A1 > 0.9$，10，5）)，根据所给的随机变量 t_1 分布列，计算出火车离开甲站的时间 t_1；

（3）在第三列（C 列）输入“=rand()”产生另外一个（0，1）内的随机数；

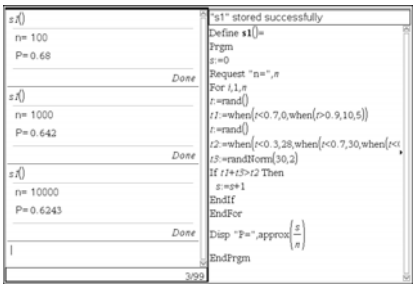
（4）在第四列（D 列）输入“=When($C1 < 0.3$，28，When（ $C1 < 0.7$，30，When($C1 < 0.9$，32，34)))”，计算出符合要求的旅客到达乙站的时间；

（5）在第五列（E 列）输入“=randNorm(30，2)”产生一个平均值为 30，标准差为 2 的随机数，得到火车从甲站到乙站的时间 t_3；

（6）在第六列（F 列）输入“=When（ $D1 < B1 + E1$，1，0）”。如果结果为“1”，则表示能赶上火车，如果结果为“0”，则表示赶不上火车。拖动第一行，增加模拟的次数（例如拖动至第 100 行），利用函数“=CountIf(F1:F100，1)”统计 F 列中“1”的个数，计算出能赶上火车的频率。然后不断改变第一列、第三列、第五列的随机数的值，观察频率的变化，便可估计出概率的值。

下面的程序可以用模拟的方法计算这位旅客能够赶上这辆火车的概率：

```
Define s1()=
Prgm
s:=0
Request "n=",n
For i,1,n
t:=rand()
t1:=when(t<0.7,0,when(t>0.9,10,5))
```



```
t:=rand()
t2:=when(t<0.3,28,when(t<0.7,30,when(t<0.9,32,34)))
t3:=randNorm(30,2)
If t1+t3>t2 Then
s:=s+1
EndIf
EndFor
Disp "P=",approx(((s)/(n)))
EndPrgm
```

以上这些个例子仅仅是 TI—NspireCAS 图形计算器在中学数学教学中的一些初步的应用，但就是这些初步的应用带给我们的反思是深刻的，正如 TI 公司的口号“教师的热情，我们的技术，学生的成功”所表达的那样，技术将会深刻地改变教学，让我们一起努力，迎接技术给数学教学带来的变革吧！