

2011 年上海市 T I 杯高二年级数学竞赛

团体赛试题

(2011 年 5 月 21 日下午 3:30~4:00)

解答本试卷必须写出解题的必要步骤或计算器的算法.

一、(本题满分 20 分)(1) 构造一个元素都是整数的 2×2 矩阵, 使得它的每一行的和与每一列的和这 4 个数是互不相同的完全平方数;

(2) 构造一个元素都是整数的 3×3 矩阵, 使得它的每一行的和与每一列的和这 6 个数是互不相同的完全平方数;

(3) 构造一个元素都是整数的 4×4 矩阵, 使得它的每一行的和与每一列的和这 8 个数是互不相同的完全平方数.

【解】(1) 行和

$$\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

列和

(2) 行和

$$\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

列和

(3) 行和

$$\begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

列和

二、(本题满分 20 分) 在平面直角坐标系上, 点 A, B 的坐标分别为

学校 _____ 姓名 _____ 年级 _____ 性别 _____ 准考证号 _____

线
订
装

$A(-2, 0)$, $B(2, 0)$, P 是平面上的一个动点, 设 $|PA|=a$, $|PB|=b$, 满足 $ab=2$.

- (1) 求 a 的取值范围;
- (2) 求点 P 的轨迹, 并画出它的图像.

【解】

线
订
装

三、(本题满分 20 分) 设数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n = [n\sqrt{2}]$, 这里, $[x]$ 表

示不超过实数 x 的最大整数.

(1) 证明: $2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5$ 都是数列 $\{a_n\}$ 的项;

(2) 2^6 是否是数列 $\{a_n\}$ 的项? 证明你的结论;

(3) 证明: 有无穷多个 2 的正整数幂是数列 $\{a_n\}$ 的项.

【解】

线

订

装