

2009 年上海市 T I 杯高二年级数学竞赛

个人赛试题

(2009 年 5 月 23 日下午 1:30~3:00)

题号	一	二	三	四	总分
得分					
评卷人					
复卷人					

一、填空题 (共 8 小题, 前 4 小题每题 6 分, 后 4 小题每题 9 分, 满分 60 分)

1、计算: $\frac{2}{1} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{6 \cdot 8}{5 \cdot 7}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \left(\frac{10 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 16}{9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15}\right)^{\frac{1}{8}} = \underline{\hspace{2cm}}$ (精确到 10^{-5}).

2、设地球和太阳的半径分别为 r 和 R ; 地球和太阳的质量分别为 m 和 M . 已知 $R = 109r$, $M = 330000m$, 则太阳的平均密度与地球的平均密度的比值为 $\underline{\hspace{2cm}}$ (精确到 0.001).

3、已知 E 是正方形 $ABCD$ 的边 BC 上的一点, 使得 $\triangle ABE$, $\triangle AEC$, $\triangle ACD$ 的面积成等比数列, 则 $\angle EAB = \underline{\hspace{2cm}}$ (精确到 $1''$).

4、已知 P 是函数 $y = 2^x$ 图像上的一点, O 是坐标原点, 则线段 PO 的长的最小值为 $\underline{\hspace{2cm}}$ (精确到 0.001).

5、不等式 $\sqrt{x+3} > x^2 - 1$ 的解集为 $\underline{\hspace{2cm}}$ (精确到 0.001).

6、已知 E, F, G, H 分别为凸四边形 $ABCD$ 的边 AB, BC, CD, DA 的中点, 且线段 EG 和 FH 的乘积等于四边形 $ABCD$ 面积的 3 倍, 则 EG 和 FH 之间的夹角为 $\underline{\hspace{2cm}}$ (精确到 $1''$).

7、对整数 $n > 1$, 设 $x = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$, $y = \lg 2 + \lg 3 + \dots + \lg n$, 则满足 $[x] = [y]$ 的所有整数 n 构成的集合为 $\underline{\hspace{2cm}}$. (其中 $[a]$ 表示不超过实数 a 的最大整数.)

8、一个三位数的 3 个数码均不为 0, 其平方是一个恰好有 3 个数码为 0 的六位数, 试写出一个这样的三位数: $\underline{\hspace{2cm}}$.

准考证号

性别

线

年级

订

姓名

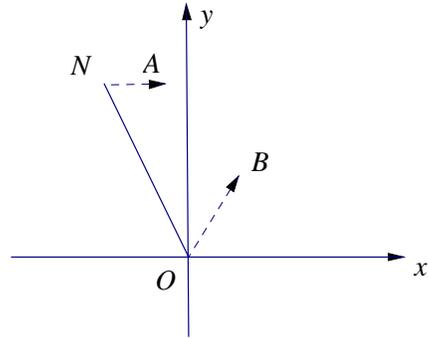
装

学校

解答以下三题必须写出解题的必要步骤.

二、(本题满分 20 分) 已知在平面直角坐标系 xOy 内, 有一个物体 A 以每秒 0.3 千米的速度沿着与 x 轴正方向平行的方向飞行. 如图所示, 当物体 A 在点 N 处, 测得 $ON=10$ 千米, $\angle xON=105^\circ$, 此时在 origin O 处发射一枚速度为每秒 0.7 千米沿直线飞行的导弹 B , 为了使得导弹 B 能击中物体 A , 求导弹的发射角 $\angle xOB$ (精确到 0.001°).

【解】



三、(本题满分 20 分) (1) 求证:

$$(4\sin^2 x - 3)(4\cos^2 x - 3) = 4\sin^2 2x - 3, \quad x \in \mathbf{R};$$

(2) 求值:

$$\begin{aligned} & (4\sin^2 0 - 3)\left(4\sin^2 \frac{\pi}{2^9} - 3\right)\left(4\sin^2 \frac{2\pi}{2^9} - 3\right)\left(4\sin^2 \frac{3\pi}{2^9} - 3\right)\cdots \\ & \cdot \left(4\sin^2 \frac{(2^8 - 1)\pi}{2^9} - 3\right)\left(4\sin^2 \frac{\pi}{2} - 3\right). \end{aligned}$$

【解】

四、(本题满分 20 分) 两个三位数写在一起形成了一个六位数，若这个六位数恰等于原来两个三位数乘积的整数倍，求这个六位数。

【解】

装
订
线