

# 2007 年上海市 T I 杯高二年级数学竞赛

## 个人赛试题

(2007 年 5 月 20 日上午 9:00~10:30)

题号	一	二	三	四	总分
得分					
评卷人					
复卷人					

一、填空题 (共 8 小题, 前 4 小题每题 6 分, 后 4 小题每题 9 分, 满分 60 分)

1、连分数  $3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{292}}}}$  的值为\_\_\_\_\_ (精确到  $10^{-9}$ ).

2、计算:  $\frac{7^{2007} + 13^{10}}{2007^{513}} =$  \_\_\_\_\_ (精确到 0. 001).

3、利用“开普勒 (【德】Kepler. J 1571-1630) 第三定律: 行星公转周期的平方和它们离太阳的平均距离的立方成正比.” 可以计算太阳系中行星绕太阳一周所需要的时间 (即公转周期). 如果设地球离太阳的平均距离  $\alpha_1 = 1$  个天文单位, 已知地球绕太阳的公转周期  $T_1 = 365.26$  天, 火星离太阳的平均距离  $\alpha_2 = 1.524$  个天文单位, 那么火星的公转周期  $T_2 =$  \_\_\_\_\_ 天 (精确到 0. 01 天), 合 \_\_\_\_\_ 年 (精确到 0. 001 年).

4、使得  $\frac{n}{100-n}$  是完全平方数的正整数  $n$  有 \_\_\_\_\_ 个.

5、直线  $y = x$  与在区间  $(-\pi, 0)$  及  $(0, \pi)$  上函数  $y = \cot x$  的图像分别交于  $A, B$  两点, 那么线段  $AB$  的长等于 \_\_\_\_\_ (精确到 0. 01).

6、计算:  $(\sqrt{3} + \tan 1^\circ)(\sqrt{3} + \tan 2^\circ) \cdots (\sqrt{3} + \tan 29^\circ) =$  \_\_\_\_\_.

7、底面直径为 4, 高为 18 的封闭圆柱, 装半径为 1 的球, 至多能装 \_\_\_\_\_ 个.

8、不等式组  $\begin{cases} 1 < x < 2, \\ 2 < x^2 < 3, \\ 3 < x^3 < 4, \\ \dots\dots \\ n < x^n < n+1 \end{cases}$  的解集非空, 则正整数  $n$  的最大值为 \_\_\_\_\_.

准考证号 \_\_\_\_\_ 性别 \_\_\_\_\_ 年级 \_\_\_\_\_ 姓名 \_\_\_\_\_ 学校 \_\_\_\_\_

线 订 装

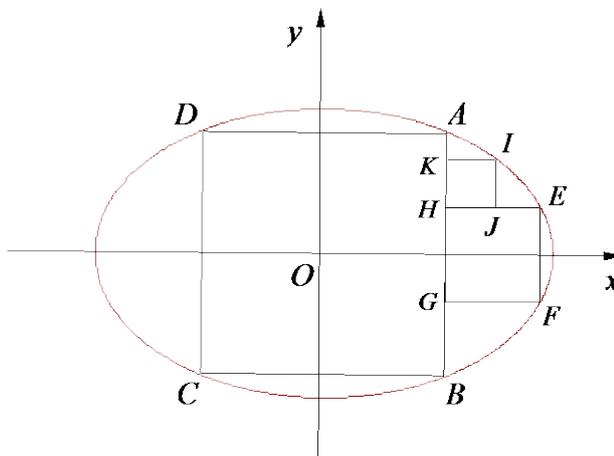
解答以下三题必须写出解题的必要步骤.

二、(本题满分 20 分) 求正整数  $n$ , 使得

$$[\log_3 1] + [\log_3 2] + [\log_3 3] + [\log_3 4] + \cdots + [\log_3 n] = 2007,$$

其中  $[x]$  表示不超过  $x$  的最大整数.

三、(本题满分 20 分) 如图, 正方形  $ABCD$  内接于椭圆, 正方形  $EFGH$  和正方形  $IJKH$  中的顶点  $E, F, I$  在椭圆上, 顶点  $K, H, G$  在边  $AB$  上, 顶点  $J$  在边  $HE$  上. 已知正方形  $ABCD$  与正方形  $EFGH$  的面积比为  $4:1$ , 求正方形  $IJKH$  与正方形  $EFGH$  的面积比 (精确到  $0.001$ ).



四、(本题满分 20 分) 我们知道,  $\frac{49}{98}$  约分后是  $\frac{1}{2}$ , 但按下面的方法, 居然也得  $\frac{1}{2}$ :  $\frac{4\cancel{9}}{\cancel{9}8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ . 试求出所有分子和分母都是十进制两位正整数, 分子的个位数与分母的十位数相同, 且具有上述“奇怪”性质的真分数.

装  
订  
线