

Objectifs

- Découvrir un processus itératif donnant lieu à la somme des termes d'une suite numérique (ici géométrique) ;
- Par une approche expérimentale, mettre en doute la conception intuitive fautive selon laquelle une somme de termes positifs dont le nombre augmente indéfiniment ne peut que tendre vers l'infini (problématique des paradoxes de Xénon) ;
- En classes de premières, élucider ce phénomène par l'élaboration de la formule calculant la somme des termes d'une suite géométrique ;
- Écrire un algorithme contenant une boucle (sans test d'arrêt), avec affectation itérative d'une variable, et calcul d'une somme cumulée.

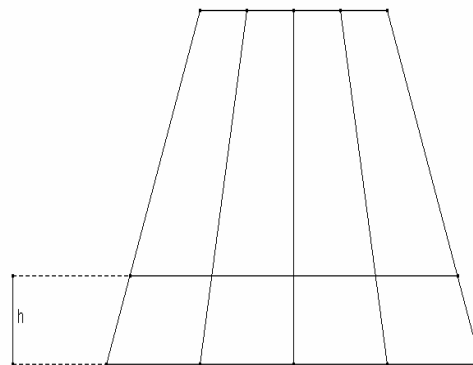
Situation

Au XV^{ème} siècle, lors des premières tentatives pour poser des règles géométriques de dessin en perspective, la "règle des deux tiers" a été utilisée (sans justification) par certains peintres pour dessiner un carrelage¹.

Les fuyantes convergent vers un point de fuite, et la première rangée est tracée avec une largeur arbitraire. Ensuite, chaque rangée a une largeur égale aux 2/3 de la précédente.

On fournit le dessin ci-contre aux élèves : la première rangée dessinée a une hauteur h de 2 cm et la profondeur de la pièce dessinée est de 8 cm.

Question : combien de rangées faut-il dessiner pour arriver au fond ?



De la situation à l'algorithme

Le dessin effectif des rangées fait apparaître rapidement une difficulté liée à l'épaisseur du crayon. Certains élèves émettent l'idée qu'on "ne peut y arriver" (mais s'agit-il d'une impossibilité technique, ou bien conceptuelle ?). A la suite d'un calcul pas à pas des largeurs successives, on veut automatiser les calculs en écrivant un algorithme en langage intermédiaire, que l'on teste en le faisant fonctionner à la main (dans un tableau à concevoir), et qui sera ensuite implémenté dans la calculatrice.

Afin de mieux observer ce qui se passe, une modification du programme est apportée pour afficher à chaque étape les valeurs de **S**.

Au bout d'un certain nombre d'itérations, les valeurs qui s'affichent sont identiques. Après la fin du programme, l'affichage de la variable **I** permet de savoir au bout de combien d'itérations cela se produit. On a

¹ Voir <http://www.ufrp7.math.jussieu.fr/Capes/Programmes/lycee/accGTD-TL-PremiereNotionPerspective.pdf>

pourtant la preuve que la valeur de **S** croit strictement. En ajoutant l'affichage de **L** dans le programme, on constate que **L** finit par prendre des valeurs trop petites pour pouvoir être prises en charge par la calculatrice. En classe de première, après avoir déterminé et démontré la formule de la somme des termes d'une suite géométrique, puis en cherchant la limite de cette somme à l'infini, on élucide complètement la situation.

En langage intermédiaire	Test à la main	Programme																										
<p>Entrées : L (largeur de la 1^{ère} rangée) N (nombre de rangées ajoutées) Initialisation : Donner à S la valeur de L</p> <p>Traitement : <i>Début de boucle</i> Pour I = 1 jusqu'à I = N Multiplier L par 2/3 et affecter le résultat à L Ajouter L à S et affecter le résultat à S <i>Fin de boucle</i></p> <p>Sortie : Afficher la valeur de S</p>	<table border="1" style="margin-bottom: 10px;"> <tr><th>L</th><th>N</th><th>S</th></tr> <tr><td>2</td><td>5</td><td>2</td></tr> </table> <table border="1" style="margin-bottom: 10px;"> <tr><th>I</th><th>L</th><th>S</th></tr> <tr><td>1</td><td>1.33..</td><td>3.33..</td></tr> <tr><td>2</td><td>0.88..</td><td>4.22..</td></tr> <tr><td>3</td><td>0.59..</td><td>4.81..</td></tr> <tr><td>4</td><td>0.39..</td><td>5.20..</td></tr> <tr><td>5</td><td>0.26..</td><td>5.47..</td></tr> </table> <table border="1" style="margin-bottom: 10px;"> <tr><th>S</th></tr> <tr><td>5.47..</td></tr> </table>	L	N	S	2	5	2	I	L	S	1	1.33..	3.33..	2	0.88..	4.22..	3	0.59..	4.81..	4	0.39..	5.20..	5	0.26..	5.47..	S	5.47..	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 10px;"> <p style="font-size: small; margin: 0;">NORMAL FIXE0 AUTO a+bl RAD MP</p> <pre style="margin: 0;">PROGRAM: CARRELA0 :Prompt L,N :L→S :For(I,1,N) :(2/3)*L→L :L+S→S :End :Disp S</pre> </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p style="font-size: small; margin: 0;">NORMAL FIXE0 AUTO a+bl RAD MP</p> <pre style="margin: 0;">PROGRAM: CARRELA1 :Prompt L,N :L→S :For(I,1,N) :(2/3)*L→L :L+S→S :Disp S :Pause :End</pre> </div>
L	N	S																										
2	5	2																										
I	L	S																										
1	1.33..	3.33..																										
2	0.88..	4.22..																										
3	0.59..	4.81..																										
4	0.39..	5.20..																										
5	0.26..	5.47..																										
S																												
5.47..																												

Commandes de programmation utilisées : Prompt, For, End, Disp, Pause.

N.B. La différence entre les deux programmes proposés porte sur l'affichage de la valeur de S finale (**CARRELA0**) ou des valeurs de S à chaque étape de la boucle (**CARRELA1**).