Ficha do professor

Transformação de funções
Matemática A | 10º Ano

Autor: Jorge Santos

Relação entre o gráfico de uma função f e os gráficos das funções $af(a)$, $f(bx)$, $f(x+c)$ e $f(x)+d, a, b, c, d$ números reais, a e b não nulos.

1. Descrição

Esta atividade permite estudar a relação entre o gráfico de uma função f e os gráficos das funções $af(x)$, $f(bx)$, $f(x+c)$ e $f(x)+d$, a, b, c e d números reais, a e b não nulos, através da variação dos parâmetros e dos pontos do seu gráfico.

Ficheiros: transformacoes.tns

2. Metas Curriculares

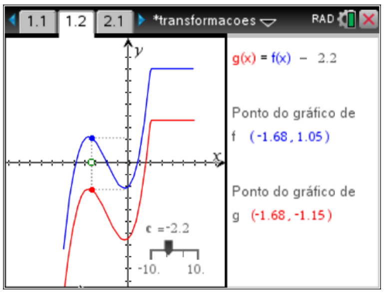
Funções Reais de Variável Real 10 – FRVR10

2.9. Reconhecer, dados uma função real de variável real f, um número real c e um plano munido de um referencial cartesiano, que o gráfico cartesiano de uma função g definida em $D_g = D_f$ por $g(x) = f(x) + c$ é a imagem do gráfico cartesiano de f pela translação de vetor $\vec{u}(0, c)$.

2.10. +Reconhecer, dados uma função real de variável real f, um número real c e um plano munido de um referencial cartesiano, que o gráfico cartesiano de uma função g definida por $g(x) = f(x-c)$ no conjunto $D_g = \{x + c: x \in D_f\}$ é a imagem do gráfico cartesiano de f pela translação de vetor $\vec{u}(c, 0)$.

2.12. Reconhecer, dados uma função real de variável real f, um número $0 < a < 1$ (respetivamente $a > 1$) e um plano munido de um referencial ortogonal, que o gráfico cartesiano de uma função g definida em D_f por $g(x) = af(x)$ é a imagem do gráfico cartesiano de f pela contração vertical (respetivamente pela dilatação vertical) de coeficiente a.

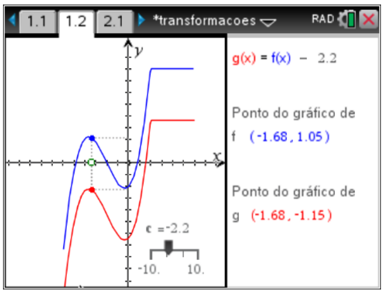
2.14. Reconhecer, dados uma função real de variável real f, um número $0 < a < 1$ (respetivamente $a > 1$) e um plano munido de um referencial ortogonal, que o gráfico cartesiano de uma função g definida em $D_g = \left\{\frac{x}{a} : x \in D_f\right\}$ por $g(x) = f(ax)$ é a imagem do gráfico cartesiano de f pela dilatação horizontal (respetivamente pela contração horizontal) de coeficiente $\frac{1}{a}$.



4. Guia de utilização e de exploração

O seletor permite modificar o valor do parâmetro da transformação geométrica aplicada ao gráfico da função f. Ao mover o selector poder-se-á deduzir a transformação geométrica aplicada.

A variação do ponto verde sobre o eixo Ox, permite-nos definir valores no domínio da função transformada, g, e relacionar as imagens e/ou os objetos das duas funções e daí retirar ilações mais precisas sobre a transformação geométrica.



Exercício 1

Deve-se mover o seletor c e observar que, em relação ao gráfico da função f, o gráfico da função g desloca-se verticalmente c unidades para cima, quando $c > 0$ e c unidades para baixo quando $c < 0$.

Exercício 2
Com a variação do parâmetro c, verifica-se o domínio das duas funções são iguais.

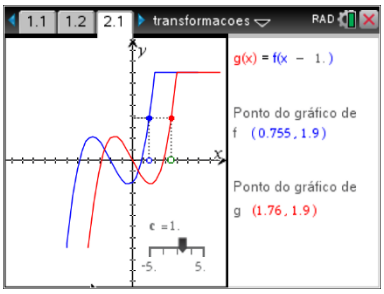
Exercício 3
Faz-se variar o ponto verde sobre o eixo Ox e preenche-se as tabelas. Pela análise das tabelas e dos gráficos pode-se concluir que a imagem de x pela função g pode ser obtida adicionando à imagem de x pela função f o valor do parâmetro de c.

Exercício 4

Pretende-se formalizar a relação entre o gráfico de uma função f e os gráficos das funções $f(x)+c$, $c \in \mathbb{R}$.
*O gráfico cartesiano de uma função g definida em $D_g = \boldsymbol{D_f}$ por $g(x) = f(x) + c$, é imagem do gráfico cartesiano da função f pela **translação** de vetor $\vec{u}(\mathbf{0}, \boldsymbol{c})$.*
Assim, dado um ponto de coordenadas (x, y) do gráfico da função f, a sua imagem por meio da referida transformação terá coordenadas $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}+\boldsymbol{c})$ e será um ponto do gráfico de g.

Exercícios 5

Em relação ao gráfico de f, verifica-se um deslocamento horizontal do gráfico de g, c unidades para a direita para $c > 0$ e de c unidades para a esquerda quando $c < 0$.



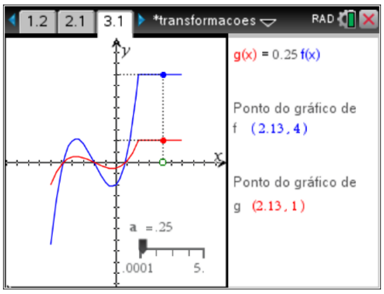
Exercício 6

O domínio da função g por ser obtido através do domínio da função f observando o deslocamento referido no exercício 5.

Exercício 7
O preenchimento da tabela é efetuado com as informações obtidas com a variação do ponto verde sobre o eixo Ox. Pela análise das tabelas e dos gráficos pode-se concluir que $x_g = x_f + c$.

Exercício 8
Formalizando a relação entre o gráfico de uma função f e os gráficos das funções $f(x-c), c \in \mathbb{R}$:

> *O gráfico cartesiano de uma função g definida por $g(x) = f(x-c)$ de domínio $D_g = \{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c}: x \in D_f\}$ é a imagem do gráfico cartesiano da função f pela **translação** de vetor $\vec{u}(\boldsymbol{c}, \mathbf{0})$.*
> *Assim, dado um ponto de coordenadas (x, y) do gráfico da função f, a sua imagem por meio da referida transformação terá coordenadas $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c}, \boldsymbol{y})$ e será um ponto do gráfico de g.*



Exercício 9
Pode-se concluir que para $0 < a < 1$, o gráfico de f sofre uma contração vertical e para $a > 1$ sofre uma dilatação.

Exercício 10

Fazendo variar o seletor/parâmetro a, os domínios das duas funções não se altera.

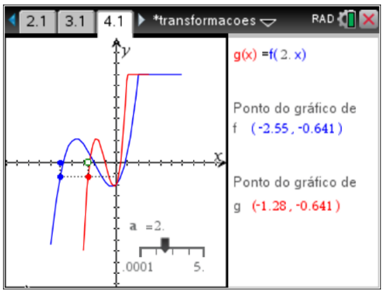
Exercício 11
As tabelas são preenchidas com recurso à aplicação. Pela análise das tabelas e dos gráficos pode-se concluir que a imagem de x pela função g pode ser obtida multiplicando o parâmentro a pela imagem de x pela função f. Ou seja, $g(x) = af(x)$.

Exercício 12
Formalizando a relação entre o gráfico de uma função f e os gráficos das funções $af(x), a > 0$:

- *Para um número real a, tal que $\mathbf{0 < a < 1}$, o gráfico cartesiano de uma função g definida por $g(x) = af(x)$ de domínio $D_g = \boldsymbol{D_f}$ é a imagem do gráfico cartesiano da função f pela* ***contração vertical*** *de coeficiente* $\boldsymbol{a}$.
- *Para um número real a, tal que $\mathbf{a > 1}$, o gráfico cartesiano de uma função g definida por $g(x) = af(x)$ de domínio $D_g = \boldsymbol{D_f}$ é a imagem do gráfico cartesiano da função f pela* ***dilatação vertical*** *de coeficiente* $\boldsymbol{a}$.

*Assim, dado um ponto de coordenadas (x, y) do gráfico da função f a sua imagem por meio das referidas transformações (**contração vertical** para $\mathbf{0 < a < 1}$ e **dilatação vertical** para $\mathbf{a > 1}$) terá coordenadas $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{ay})$ e será um ponto do gráfico de g.*

Exercício 13
Variando o parâmetro a, pode concluir-se que quando $0 < a < 1$ o gráfico de f sofre uma dilatação horizontal e que quando $a > 1$ sofre uma contração horizontal.



Exercício 14
Poder-se-á dizer que o domínio de f "sofre a mesma transformação" descrita no exercício 13.

Exercício 15
Analisando as tabelas devidamente preenchidas, pode concluir-se que x_g pode ser obtido dividindo x_f por a. Ou seja, $x_g = \frac{x_f}{a}$.

Exercício 15
Formalizando a relação entre o gráfico de uma função f e os gráficos das funções $f(ax), a > 0$:

- *Para um número real a, tal que $\mathbf{0 < a < 1}$, o gráfico cartesiano de uma função g definida em $D_g = \left\{\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{a}} : x \in D_f\right\}$ por $g(x) = f(ax)$ é a imagem do gráfico cartesiano da função f pela* ***dilatação horizontal*** *de coeficiente $\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{a}}$.*
- *Para um número real a, tal que $\boldsymbol{a} > \mathbf{1}$, o gráfico cartesiano de uma função g definida em $D_g = \left\{\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{a}} : x \in D_f\right\}$ por $g(x) = f(ax)$ é a imagem do gráfico cartesiano da função f pela* ***contração vertical*** *de coeficiente $\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{a}}$.*

*Assim, dado um ponto de coordenadas (x, y) do gráfico da função f a sua imagem por meio das referidas transformações (**dilatação horizontal** para $\mathbf{0 < a < 1}$ e **contração horizontal** para $\boldsymbol{a} > \mathbf{1}$) terá coordenadas $\left(\frac{x}{a}, y\right)$ e será um ponto do gráfico de g.*