F8n – NOMBRE DERIVE

Auteur : Jean-Pierre Bouvier

TI-Nspire™ - TI-Nspire™ CAS

Mots-clés : fonction carré, coefficient directeur, tangente, nombre dérivé.

Fichiers associés : F8n_NombreDerive_CAS.tns, F8n_NombreDerive.tns

1. Objectifs

Introduire la notion de nombre dérivé comme coefficient directeur d'une tangente.
Conjecturer l'expression de la fonction dérivée de la fonction carré.

2. Commentaires

Cette activité répond à la directive du programme de Première STG (B.O. n°5 du 9 septembre 2004 HS) :
« Pour introduire le nombre dérivé, on peut, par exemple, montrer par une étude graphique avec un traceur de courbe et une étude numérique avec un tableur que la fonction $x \mapsto 2x - 1$ est une approximation affine de $x \mapsto x^2$ au voisinage de 1. La droite d'équation $y = 2x - 1$ est alors la tangente à la courbe au point de coordonnées (1 ; 1). »
« Nombre dérivé des fonctions de référence (…). Les formules sont admises. »

Le professeur cherche, devant les élèves, la position de la sécante à la courbe représentant la fonction carré qui permet de minimiser les écarts au voisinage du point d'intersection.

Pour permettre une approche rapide, il changera la position du point de tangence sur la courbe (en modifiant l'abscisse du point) et, dans chaque cas, il fera varier la position de la sécante.
Ceci doit conduire à convenir avec les élèves qu'il existe une position de la sécante qui minimise les écarts au voisinage du point, que cette position correspond à la tangente et de leur faire dire que le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse a à la courbe représentant la fonction carré est $2a$.

Dans une deuxième étape, le professeur validera ce résultat.

3. Conduite de l'activité

1) Travail préalable

Pour permettre aux élèves de comprendre l'activité **1** proposée, il est souhaitable de déterminer avec eux l'équation réduite d'une droite de coefficient directeur m passant par le point $A(a ; a^2)$. Si le niveau de la classe ne permet pas d'effectuer cette démonstration, il peut proposer le calcul en choisissant un cas particulier (par exemple, $A(1 ; 1)$ ou $A(2 ; 4)$), puis admettre la formule dans le cas général. S'il manque de temps, il admet la formule.
En première STG, l'équation obtenue sera plutôt de la forme $y = mx + a^2 - ma$. On pourra aisément vérifier que l'équation : $y = m(x - a) + a^2$ est équivalente à l'équation trouvée par les élèves.

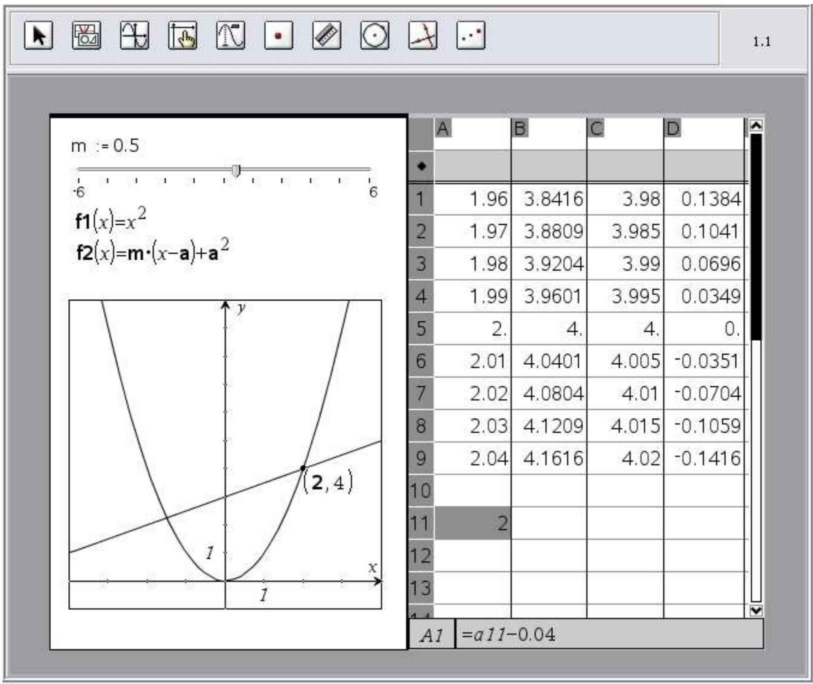
2) Description de l'écran de l'Activité 1

L'écran est partagé en deux. Il est vidéoprojeté à la classe entière.

Dans la partie gauche de l'écran, on a tracé la courbe C représentant la fonction carré, $f1$, définie sur $\mathbb{R}$ par : $f1(x) = x^2$ et, sur le même graphique, la droite d'équation $y = m(x - a) + a^2$ qui passe par le point $A(a ; a^2)$ de la courbe.
Le tableur de la partie droite de l'écran permettra d'examiner les "écarts" entre la courbe et la droite au voisinage du point A.
La valeur choisie pour a est donnée dans la cellule A11 (on a choisi 2 comme première valeur).
Dans les cellules A1 à A9, figurent les nombres $a - 0{,}04$; $a - 0{,}03$; $a - 0{,}02$; $a - 0{,}01$; a ; $a + 0{,}01$; $a + 0{,}02$; $a + 0{,}03$; $a + 0{,}04$, c'est-à-dire, pour la valeur choisie, 1,96 ; 1,97 ; 1,98 ; 1,99 ; 1,00 ; 1,01 ; 1,02 ; 1,03 ; 1,04.

Dans la colonne B, on a écrit les images de ces nombres par la fonction *f1*, c'est-à-dire les ordonnées des points de la courbe *C* qui ont les abscisses de la colonne A.
Dans la colonne C, les ordonnées des points de la droite qui ont les abscisses de la colonne A.
Enfin, dans la colonne D, les différences des ordonnées des points de même abscisse de la courbe et de la droite.
Le professeur peut, avec profit, en cliquant sur une cellule de chaque colonne, montrer le procédé de calcul de chacune d'elles.

Remarques : dans la partie tableur, régler avec la souris la largeur des colonnes de façon à voir les quatre colonnes A à D. Si la ligne de saisie des fonctions apparaît en bas à gauche de l'écran, cliquer dans la partie graphique et taper **Ctrl G** pour la faire disparaître.



3) Conduite de la première partie de l'activité

Choisir, par exemple, $a = 2$ (dans la cellule A11). Faire varier le curseur pour modifier la position de la sécante. En observant la colonne D du tableur, essayer de minimiser les différences verticales entre la courbe et la droite.
Constater avec les élèves que la position de la sécante rendant minimales ces différences a lieu quand la droite semble tangente à la courbe. Relever alors la valeur approchée m_0 de m qui correspond à cette position.
Renouveler ce travail en d'autres points de la courbe (par exemple, choisir $a = 1$, $a = –2$, $a = 3$).
En déduire une valeur probable de m_0 en fonction de a.
On constate que les valeurs trouvées pour m_0 sont très proches de $2a$.
Préciser que le nombre $2a$, coefficient directeur (probable) de la tangente à la courbe au point d'abscisse a, est appelé nombre dérivé de la fonction *f1* en a.
Il s'agit maintenant de valider ce résultat. C'est l'objet de l'activité 2.

4) Description de l'écran de l'Activité 2

On se propose de valider que la tangente en $A(a\ ;\ a^2)$ à la courbe représentant la fonction carré a pour coefficient directeur $2a$.

L'écran comporte une zone graphique où l'on a tracé la courbe représentant la fonction *f1*, définie sur $\mathbb{R}$ par : $f1(x) = x^2$ et, sur le même graphique, la droite d'équation $y = 2a(x - a) + a^2$ qui, d'après l'étude précédente, est la sécante de coefficient directeur $2a$ passant par le point $A(a\ ;\ a^2)$.
La fenêtre d'affichage est réglée pour obtenir $-5 \leq x \leq 5$ et $-3 \leq y \leq 25$.
Un curseur permet de faire varier a de –5 à 5.

Remarques : Pour mieux faire varier le curseur, l'allonger en saisissant son extrémité basse.
Si la ligne de saisie des fonctions apparaît en bas de l'écran, la faire disparaître avec **Ctrl G**.

5) Conduite de la deuxième partie de l'activité

Constater, en bougeant le curseur sur la réglette, c'est-à-dire en faisant varier *a*, que la droite varie en restant tangente à la courbe.
On a ainsi validé la conjecture de l'activité 1, à savoir que le nombre dérivé de la fonction carré en *a* est 2*a*.

Remarque : le professeur peut, s'il le désire, automatiser le déplacement de la tangente sur l'écran. Pour cela, effectuer un clic-droit sur le curseur et choisir **Animer**. La droite prend alors les positions successives dues à la variation du curseur dans la plage [–5 ; 5], avec un pas de 0,1, pas qui a été choisi quand on a créé le curseur.
Pour arrêter l'animation, opérer de même (clic-droit) et choisir **Arrêter l'animation**.