EP 136 - 2009 : Suites définies conjointement

Auteur du corrigé : François TEXIER **TI-Nspire™ – TI-Nspire™ CAS**

***Avertissement** : ce document a été réalisé avec la version* 1.7

Fichier associé : EP136_2009_SuitesConjointes.tns

1. Le sujet

Sujet 136 de l'épreuve pratique 2009 – Suites définies conjointement

Enoncé

Soit a un nombre réel non nul. On considère deux suites (Un) et (Vn) définies par :

$$U_0 = a \text{ et } V_0 = -\frac{3}{4}a,$$

$$U_{n+1} = \frac{1}{5}(U_n + 4V_n) \text{ et } V_{n+1} = \frac{1}{5}(3U_n + 2V_n).$$

Partie A

1.

a) En utilisant un logiciel adapté, calculer et représenter graphiquement les 30 premiers termes de chacune de ces suites pour diverses valeurs du réel a.

b) Émettre une conjecture sur la limite de la suite (U_n). Cette limite dépend-elle de la valeur du réel a ?

c) Mêmes questions pour la suite (V_n).

2. Il s'agit maintenant de conjecturer la possibilité pour la suite (U_n) d'être arithmétique ou géométrique.

a) Adapter la feuille de calcul pour aider à effectuer une conjecture sur la nature de (U_n).

b) Procéder de même pour conjecturer la nature de la suite (V_n).

c) On considère la suite (W_n) définie par $W_n = 3U_n + 4V_n$. Adapter la feuille de calcul précédente pour conjecturer une propriété de la suite (W_n).

Partie B

3.

a) Démontrer la conjecture relative à la suite (W_n).

b) En déduire U_{n+1} en fonction de U_n puis la limite de la suite (U_n).

Production demandée

- La feuille ou le procédé de calcul construit permettant les conjectures des questions **1** et **2**.
- La démonstration de la question **3.b**.

Compétences évaluées

- Afficher, au moyen d'un tableur, les premiers termes de suites obtenues par des opérations algébriques simples sur les termes de suites déjà connues.
- Émettre et tester des conjectures.
- Connaître les propriétés des suites arithmétiques et géométriques.
- Savoir étudier la convergence d'une suite.

2. Corrigé

Partie A

1) a) Ouvrir une page **Tableur & listes**.

En cellule **A1**, écrire " a= " et en cellule **A2** écrire une valeur de a (ici, par exemple, –3).
Nommer « n » la colonne **B** et saisir dans la cellule grisée la formule **n=seq(x,x,0,29,1)** et valider pour obtenir les 30 premières valeurs de n.
Nommer « un » la colonne **C** et « vn » la colonne **D**, puis en cellule **C1**, saisir la formule **=a2** et en cellule **D1**, la formule $= -\frac{3}{4} * a2$.

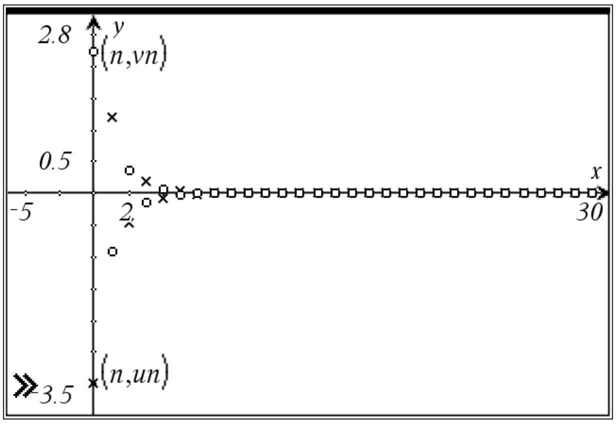
Saisir ensuite en cellule **C2** la formule $=\frac{1}{5}$ **(c1+4d1)** et en cellule **D2** la formule $=\frac{1}{5}$ **(3c1+2d1)** ; sélectionner enfin les cellules **C2** et **D2**, puis, à l'aide de la commande **Saisie rapide** du menu **Données**, recopier les deux formules jusqu'à la ligne 30.

	A	B n	C un	D vn	E
◆		=seq(x			
1	a=	0	-3	9/4	
2	-3	1	6/5	-9/10	
3		2	-12/25	9/25	
4		3	24/125	-18/125	
5		4	-48/625	36/625	

C2 $=\frac{1}{5}\cdot(c1+4\cdot d1)$

Insérer une page **Graphiques & géométrie**.

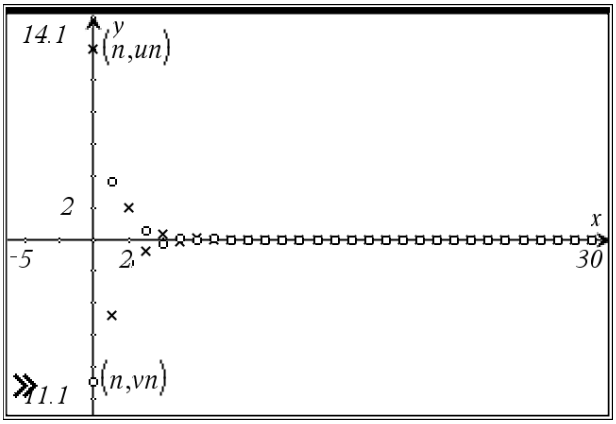
Dans le menu **Type de graphique**, choisir **Nuage de points**, puis indiquer, pour $s1$, « n » en x et « un » en y et, pour $s2$, « n » en x et « vn » en y.
Utiliser ensuite, dans le menu **Fenêtre**, le **Zoom – Données** et affiner éventuellement le réglage de la fenêtre (ici, x varie de –5 à 30 avec un pas de 2, et y varie de –3,5 à 2,8 avec un pas de 0,5).



Revenir ensuite à la page **Tableur & listes** et modifier la valeur de a en cellule **A2**.

	A	B n	C un	D vn	E
◆		=seq(x			
1	a=	0	12	-9	
2	12	1	-24/5	18/5	
3		2	48/25	-36/25	
4		3	-96/125	72/125	
5		4	192/625	-144/625	
6		5	-384/3125	288/3125	

A3



b) et **c)** Au vu des graphiques, il semble que, quelle que soit la valeur de a, la suite (U_n) ainsi que la suite (V_n) soient convergentes vers 0.

2) a) Revenir à la page **Tableur & listes**.

Nommer respectivement « d_u » et q_u » les colonnes **E** et **F**.
En cellule **E2**, saisir la formule **=c2-c1** , valider puis la recopier vers le bas jusqu'en ligne 30.
On constate que ces différences ne sont pas constantes, la suite (U_n) ne semble donc pas être arithmétique.
En cellule **F2**, saisir la formule **=c2/c1** , valider puis la recopier vers le bas jusqu'en ligne 30.

On constate que ces quotients sont tous égaux à $-\frac{2}{5}$, quelle que soit la valeur de a, la suite (U_n) semble donc être géométrique.

	n	D vn	E d_u	F q_u
◆				
1	12	-9	_	_
2	-24/5	18/5	-84/5	-2/5
3	48/25	-36/25	168/25	-2/5
4	-96/125	72/125	-336/125	-2/5
5	192/625	-144/625	672/625	-2/5

E2 =c2−c1

b) Nommer respectivement « d_v » et q_v » les colonnes **G** et **H**.
En cellule **G2**, saisir la formule **=d2-d1** , valider puis la recopier vers le bas jusqu'en ligne 30.
On constate que ces différences ne sont pas constantes, la suite (V_n) ne semble donc pas être arithmétique.
En cellule H2, saisir la formule « =d2/d1 », valider puis la recopier vers le bas jusqu'en ligne 30.

On constate que ces quotients sont tous égaux à $-\frac{2}{5}$, quelle que soit la valeur de a, la suite (V_n) semble donc être géométrique.

	_u	F q_u	G d_v	H q_v
◆				
1	_	_	_	_
2	-84/5	-2/5	63/5	-2/5
3	168/25	-2/5	-126/25	-2/5
4	336/125	-2/5	252/125	-2/5
5	672/625	-2/5	-504/625	-2/5

G2 =d2−d1

c) Nommer « wn » la colonne I, puis, dans la cellule grisée, saisir la formule **wn=3un+4vn** et valider.
On constate que la suite (W_n) semble être constante et égale à 0.

	_u	G d_v	H q_v	I wn
◆				=3*un+4*vn
1	_	_	_	0
2	-2/5	63/5	-2/5	0
3	-2/5	-126/25	-2/5	0
4	-2/5	252/125	-2/5	0
5	-2/5	-504/625	-2/5	0

I **wn**:=3·**un**+4·**vn**

Partie B

3) a) Pour tout entier naturel n, $W_{n+1} = 3\,U_{n+1} + 4\,V_{n+1} = \frac{3}{5}(U_n + 4\,V_n) + \frac{4}{5}(3\,U_n + 2\,V_n)$

$$= \left(\frac{3}{5} + \frac{12}{5}\right) U_n + \left(\frac{12}{5} + \frac{8}{5}\right) V_n = 3\,U_n + 4\,V_n = W_n.$$

La suite (W_n) est donc constante ; donc, pour tout entier naturel n, $W_n = W_0 = 3\,U_0 + 4\,V_0 = 3\,a + 4 \times \left(-\frac{3}{4}a\right) = 0$.

La suite (W_n) est donc la suite nulle.

b) De la question précédente, on déduit que, pour tout entier naturel n, $3\,U_n + 4\,V_n = 0$, d'où $V_n = -\frac{3}{4}U_n$.

D'autre part, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = \frac{1}{5}(U_n + 4V_n) = \frac{1}{5}\left(U_n + 4 \times \left(-\frac{3}{4}U_n\right)\right) = \frac{1}{5}(U_n - 3\,U_n) = -\frac{2}{5}U_n$.

La suite (U_n) est donc une suite géométrique de premier terme $U_0 = a$ et de raison $q = -\frac{2}{5}$.

Donc, quelle que soit la valeur de a, la suite (U_n) est convergente et $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$.

Complément

La suite (U_n) étant une suite géométrique de premier terme $U_0 = a$ et de raison $q = -\frac{2}{5}$, $U_n = a \times \left(-\frac{2}{5}\right)^n$, ce qui permet d'affirmer que deux termes consécutifs de cette suite sont de signes contraires, ce que le graphique nous permettait de conjecturer.

D'autre part, puisque $V_n = -\frac{3}{4} U_n$, $V_n = -\frac{3}{4} a \times \left(-\frac{2}{5}\right)^n$, ce qui permet d'affirmer que, comme pour (U_n), deux termes consécutifs de cette suite sont de signes contraires.

On peut également en déduire que (V_n) est une suite géométrique de premier terme $V_0 = -\frac{3}{4} a$ et de raison $q = -\frac{2}{5}$, ce qui permet de justifier que les quotients de deux termes consécutifs sont égaux à $-\frac{2}{5}$ aussi bien pour la suite (U_n) que pour la suite (V_n), phénomène que l'on avait constaté dans le tableur en question **2.a et 2.b**.

On peut en déduire également que la suite (V_n) est convergente et que $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = 0$, ce qui confirme les conjectures de la **partie A**.