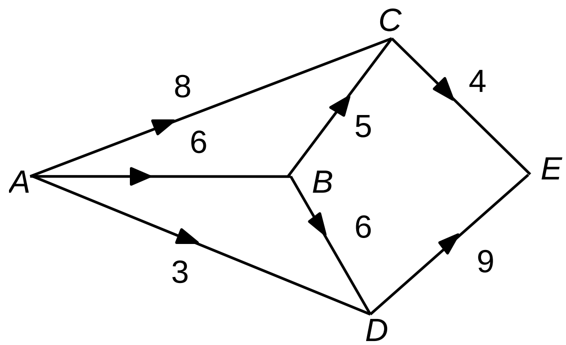
Nombre: ______________________________ Fecha: ________________

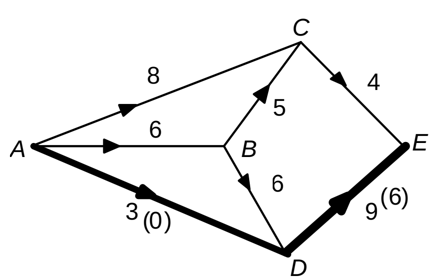
Actividad *NUMB3RS*: Navegación por las redes

En “El apagón” el grupo está investigando un caso de sabotaje contra estaciones eléctricas. Dichas estaciones forman parte de una red que suministra energía eléctrica a la ciudad. El flujo de cosas como electricidad, tránsito y llamadas telefónicas de un lugar a otro se puede representar con una red. El reto principal es maximizar este flujo por la red y ver cómo este máximo cambia cuando se eliminan una o más de las estaciones.



Considera el problema de hallar el número de flujo máximo en la red de arriba. Imagina que *A* es una estación generadora de energía (la **fuente** de la red); *E* es la estación que suministra energía a la zona local (el **receptor** de la red); *B*, *C* y *D* son subestaciones intermedias; y la corriente fluye por las aristas (cables) *AC*, *AB*, *AD*, *BC*, *BD*, *CE* y *DE*. Los pesos de las aristas representan las capacidades actuales (en millares de amperios). El problema es determinar el máximo de tales unidades que pueden enviarse de *A* a *E*. Esta cantidad es el **flujo máximo** de esta red. Para determinar este máximo halla una serie de caminos que llevan energía de *A* a *E* de tal manera que la suma del número de unidades llevadas por estos caminos sea un máximo.

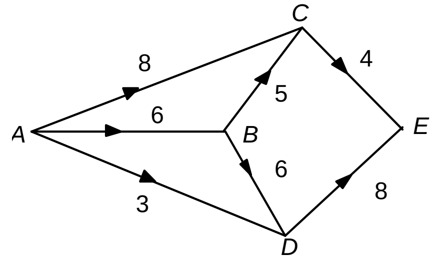
1. Halla el flujo máximo para esta red.



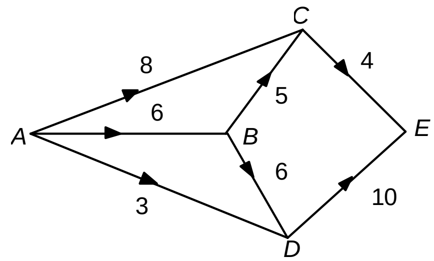
Primero, escoge el camino *A*-*D*-*E* que puede llevar un máximo de 3 unidades (porque la capacidad de *AD* es 3). Denota esto como [*ADE*: 3]. Al pasar 3 unidades por *A*-*D*-*E*, la capacidad restante de la arista *AD* queda en 0 y la capacidad restante de la arista *DE* queda en 6. Ahora halla otros caminos y demuestra que el flujo máximo para esta red es 13.

Tom Butts, Universidad de Texas en Dallas, Richardson, TX

2. Supón que la capacidad de *DE* cambia a 8. ¿Cuál es el flujo máximo de la red resultante? ¿Por qué?



3. Supón que la capacidad de *DE* cambia a 10. ¿Cuál es el flujo máximo de la red resultante? ¿Por qué?



4. En la Pregunta 1, supón que escogiste primero el camino *A*-*B*-*C*-*E*.

a. ¿Cuál es el número máximo de unidades que puede llevar este camino?

b. ¿Por qué no podrás hallar el flujo máximo de esta red si escoges primero este camino?

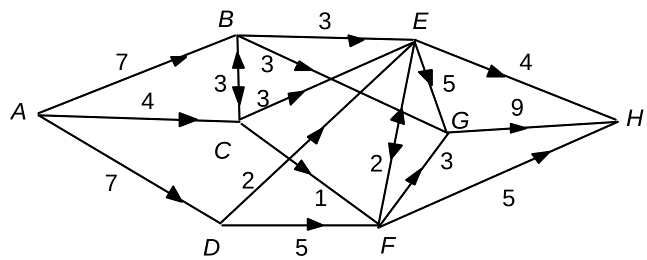
5. Supón que la estación (vértice) *C* y todas las aristas conectadas a *C* quedan eliminadas. ¿Cuál es el flujo máximo de la red resultante? ¿Por qué?

6. Para minimizar el flujo máximo de la red resultante, ¿qué estación debe eliminarse? Por qué?

7. Explica por qué el siguiente enunciado es verdadero: “El flujo máximo no puede exceder la suma de los pesos (capacidades) de las aristas conectadas con el receptor”.

Tom Butts, Universidad de Texas en Dallas, Richardson, TX

8. Halle el flujo máximo para la siguiente red. Nota que el flujo puede ir en cualquier sentido por las aristas *BC* y *EF*.



Pista: Es posible “fraccionar” las unidades que llegan a determinado vértice en partes, de modo que unas viajen por una arista y las demás viajen por otra. En tal caso, comienza con los caminos *A*-*D*-*F*-*H* que lleva 5 unidades y *A*-*D*-*E*-*G*-*H* que lleva 2. Las 7 unidades que llegan a *D* se fraccionan en 5 unidades que van a *F* y 2 unidades que van a *E*.

9. **a.** Para minimizar el flujo máximo en la red resultante, ¿qué estación se debe eliminar?

b. ¿Cuál es el flujo máximo de la red resultante?

Tom Butts, Universidad de Texas en Dallas, Richardson, TX

El objeto de esta actividad es dar a los estudiantes un vistazo breve y sencillo de un tema matemático muy extenso. TI y NCTM lo invitan a usted y a sus estudiantes a aprender más sobre este tema con las extensiones que se ofrecen abajo y con su propia investigación independiente.

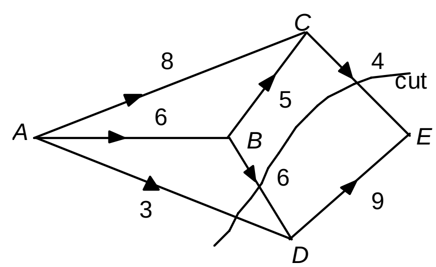
Extensiones

<u>Para el estudiante</u>

1. Supón que la capacidad de cada arista de una red con fuente *A* y receptor *B* es 1. ¿Cómo expresas el flujo máximo de tal red en términos de caminos de *A* a *B*?

2. Hay un teorema que relaciona un corte de una red con el flujo máximo. Un **corte** de una red es una partición de los vértices en dos subconjuntos *U* y *V* de modo que la fuente está en *U* y el receptor está en *V*. La **capacidad de un corte** es la suma de las capacidades de todas las aristas con un vértice en *U* y el otro en *V*. Un **corte mínimo** es aquel cuya capacidad sea lo más pequeña posible. El teorema dice: El flujo máximo es igual a la capacidad de un corte mínimo.

En esta red, el corte que se muestra tiene *U* = {*A*, *B*, *C*} y *V* = {*D*, *E*}. Es un corte mínimo con capacidad 3 + 6 + 4 = 13 que también es el flujo máximo.



a. Halla otro corte mínimo para esta red.

b. Halla un corte mínimo para la red empleada en las preguntas 8 y 9.

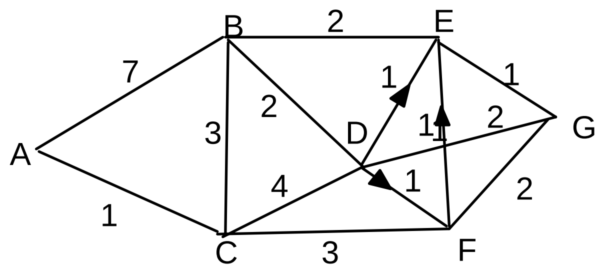
3. Al escoger primero el camino *A*-*B*-*C*-*E* en la pregunta 4, no se llegó finalmente a los caminos para el flujo máximo. Hay un “algoritmo de flujo-aumento” el cual construye de modo iterado una serie de caminos que siempre conducen al flujo máximo. Esto se debe a Ford y Fulkerson. Encontrarás más información en los siguientes sitios Web:

- **http://mathworld.wolfram.com/NetworkFlow.html**
- **http://www-b2.is.tokushima-u.ac.jp/~ikeda/suuri/maxflow/Maxflow.shtml.en**

Tom Butts, Universidad de Texas en Dallas, Richardson, TX

<u>Problema relacionado</u>

El **problema del camino más corto** es complementario al problema de flujo máximo. En este problema buscamos el camino más corto de *A* a *G,* donde los pesos de las aristas pueden ser el tiempo que se tarde ir de vértice a vértice, así como la distancia o incluso el costo de un taxi. Nota que las tres aristas son “de una sola vía”.



Para más información, visita:

- **http://mathworld.wolfram.com/ShortestPathProblem.html**
- <u>For All Practical Purposes</u>, 7ª ed. COMAP, Inc., 2006, W.H.Freeman, Capítulos 1, 2

Tom Butts, Universidad de Texas en Dallas, Richardson, TX