EP 011 - 2009 : Suite et relation de récurrence

Auteur du corrigé : François TEXIER **TI-Nspire™ – TI-Nspire™ CAS**

***Avertissement** : ce document a été réalisé avec la version* 1.7

Fichier associé : EP011_2009_Suites.tns

1. Le sujet

Sujet 011 de l'épreuve pratique 2009 – Étude d'une suite définie par une relation de récurrence

Énoncé

On considère la suite récurrente (u_n) de premier terme $u_1 = 0$ et telle que, pour tout entier naturel n non nul,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n}.$$

1.
a) En utilisant un tableur ou une calculatrice, donner les 40 premiers termes de cette suite.
b) Représenter graphiquement le nuage de points de coordonnées $(n\,;\,u_n)$.
c) En observant le nuage de points, quelles conjectures peut-on faire sur le comportement de cette suite ?

2. On cherche à déterminer une formule qui permette de calculer u_n en fonction de n.

a) Compléter le tableau de valeurs en faisant figurer le calcul de $\dfrac{1}{u_n - 1}$ pour les 40 premiers termes de la suite (u_n).
b) Conjecturer l'expression explicite de u_n en fonction de n.

3. Démontrer la formule conjecturée.

Production demandée

- Visualisation à l'écran du tableau de valeurs et du nuage de points.
- Démonstration.

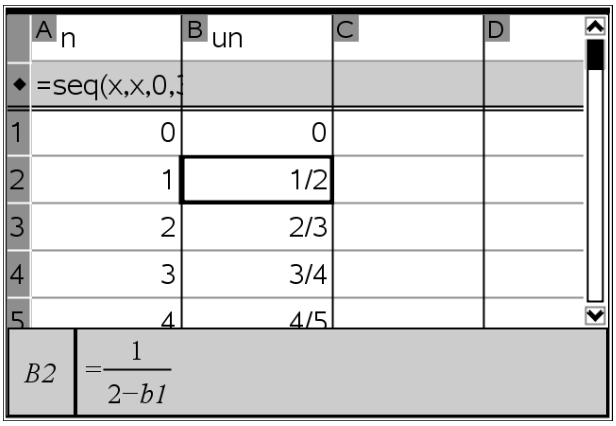
Compétences évaluées

- Faire calculer les termes d'une suite.
- Représenter graphiquement un nuage de points.
- Raisonner par récurrence.

2. Corrigé

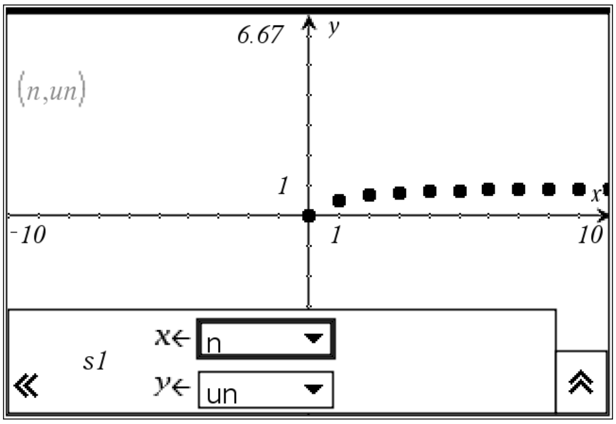
1)
a) Ouvrir une page **Tableur & listes**.

Nommer « n » la colonne **A**, puis, dans la cellule grisée de la colonne **A**, saisir la formule **=seq(x,x,0,39,1)** qui permet de créer les 40 premières valeurs de n.
Nommer « un » la colonne **B**, puis, en cellule **B1**, entrer 0 (valeur de u_0) et ensuite en **B2** la formule indiquée ci-contre et valider.
Revenir sur la cellule **B2**, puis utiliser le menu **Données**, **Saisie rapide**, puis sélectionner les cellules **B3** à **B40** et valider pour créer la suite (u_n).

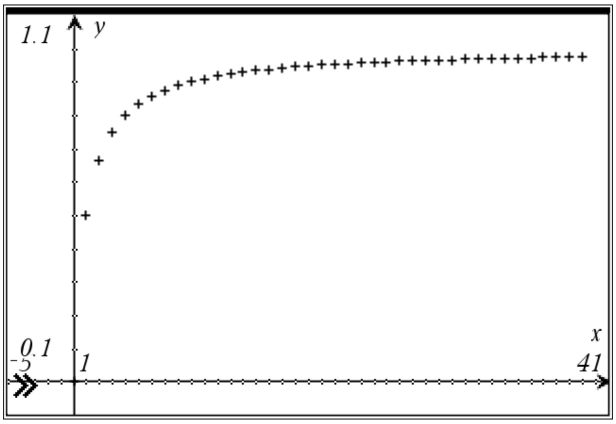


b) Insérer une page **Graphiques & géométrie**.

Dans **Type de graphique**, sélectionner **Nuage de points** ; indiquer les éléments comme ci-contre, cacher la ligne de saisie.

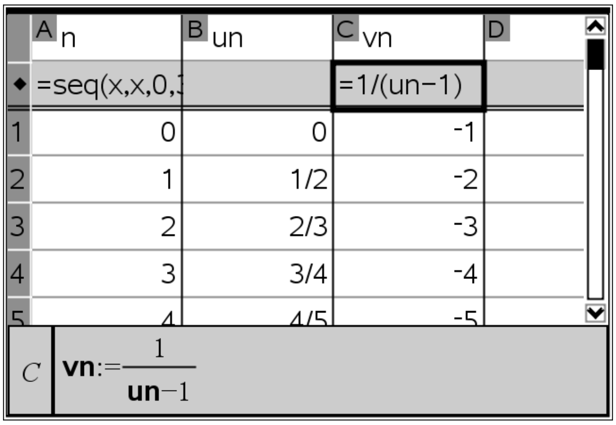


Demander un **Zoom données** et, éventuellement, affiner le réglage.
Le réglage de la copie d'écran ci-contre est
Xmin = – 5 ; **Xmax** = 41 ; **Ymin** = – 0.1 ;**Ymax** = 1.1.



c) En observant ce nuage de points, il semble que la suite soit croissante et qu'elle converge vers un réel proche de 1.

2)
a) Revenir à l'écran **Tableur & listes**.
Nommer « vn » la colonne **C**, puis taper, dans la cellule grisée, la formule $=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{un-1}}$.



	A n	B un	C vn	D
◆	=seq(x,x,0,3		=1/(un−1)	
1	0	0	-1	
2	1	1/2	-2	
3	2	2/3	-3	
4	3	3/4	-4	
5	4	4/5	-5	

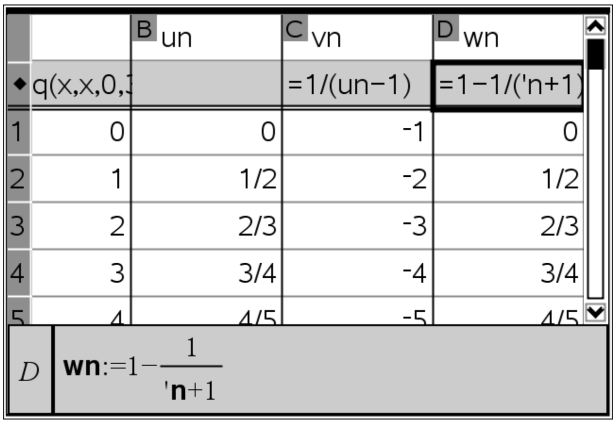
C $\mathbf{vn}:=\dfrac{1}{\mathbf{un}-1}$

b) Au vu de la colonne **C**, il semble que

$$\frac{1}{u_n-1} = -(n+1)\ ;$$

d'où $u_n - 1 = -\dfrac{1}{n+1}$, soit $u_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$.

Rajoutons une colonne **D**, nommée « wn » et entrons la formule ci-contre dans la cellule grisée.



		B un	C vn	D wn
◆	q(x,x,0,3		=1/(un−1)	=1−1/('n+1)
1	0	0	-1	0
2	1	1/2	-2	1/2
3	2	2/3	-3	2/3
4	3	3/4	-4	3/4
5	4	4/5	-5	4/5

D $\mathbf{wn}:=1-\dfrac{1}{'\mathbf{n}+1}$

Au vu des cette dernière colonne, il semble que la conjecture soit bonne.

3) Démontrons cette conjecture par récurrence.

Soit P_n la proposition : $u_n = 1 - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{n}{n+1}$.

Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 0$ et $\dfrac{0}{0+1} = 0$, donc P_0 est vraie.

Hérédité : Supposons que cette proposition soit vraie pour un rang k ;

alors $u_{k+1} = \dfrac{1}{2-u_k} = \dfrac{1}{2-\dfrac{k}{k+1}} = \dfrac{1}{\dfrac{k+2}{k+1}} = \dfrac{k+1}{(k+1)+1}$, donc P_{k+1} est vraie.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{n}{n+1}$.