EP071 - 2008: Calcul approché d'une intégrale

Auteurs du corrigé : France et Michel Villiaumey **TI-Nspire™ CAS**

Avertissement : ce document a été réalisé avec la version 1.4 ; il est disponible dans sa version la plus récente sur notre site http://education.ti.com/france, menu Ressources pédagogiques.

Fichier associé : EP071_2008_Intégrale_CAS.tns

1. Le sujet

Sujet 071 de l'épreuve pratique 2008 – Calcul approché d'une intégrale

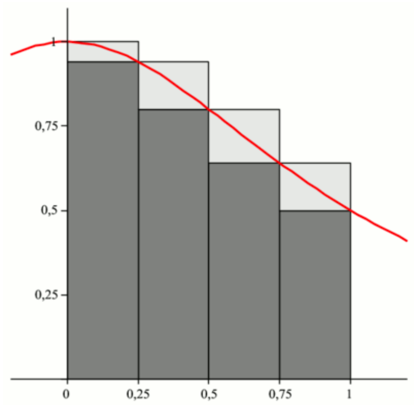
Enoncé

On considère l'intégrale $I = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$, où la fonction f est définie pour tout nombre réel x, par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$,

I est une intégrale dont on ne sait pas, en terminale S, calculer la valeur exacte.

Le but de l'exercice consiste donc à en déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2}.

Pour cela on convient d'appliquer une méthode dite des « rectangles » et de partager l'intervalle [0 ; 1] en n intervalles de même amplitude, n étant un entier naturel non nul.



1. Dans cette question on donne à n la valeur 4. Quel encadrement de l'intégrale I le dessin ci contre suggère-t-il ? Quelle est l'amplitude de cet encadrement ?
Faire calculer cet encadrement par la calculatrice ou le tableur

2. On souhaite pouvoir généraliser, à n entier naturel non nul quelconque, l'encadrement obtenu dans le cas où $n = 4$.

a) Modifier l'organisation du calcul pour obtenir l'encadrement de I et son amplitude dans le cas où $n = 10$ puis où $n = 20$.

b) Conjecturer une valeur de n à partir de laquelle l'encadrement de I obtenu a une amplitude inférieure ou égale à 10^{-2}.

3. Proposer des éléments permettant de justifier que, pour la valeur trouvée en **2.b)** l'amplitude de l'encadrement est bien inférieure ou égale à 10^{-2}.

Production demandée

- Encadrements de I obtenus sur calculatrice ou tableur pour les valeurs de n demandées ;
- Stratégie de démonstration du résultat conjecturé à la question **2.b)**.

Compétences évaluées

- **Compétences TICE**
  - Réaliser un algorithme ou une feuille de calcul adapté à la situation.
- **Compétences mathématiques**
  - Calcul algébrique ;
  - Encadrement d'une intégrale par la « méthode des rectangles ».

2. Corrigé

1) Ouvrir une page **Tableurs & listes**.

Dans la cellule **A1** écrire le nombre 4 et le stocker dans la variable ***n***.

Dans la cellule grisée de la colonne **B**, écrire la formule ci-contre qui permet de générer la suite des n multiples de $\frac{1}{n}$.

	A	B	C	D	E	F
◆		=seq(i/'n,i,				
1	4	1/4				
2		1/2				
3		3/4				
4		1				
5						
6						
7						
8						

B $=\mathrm{seq}\left(\frac{i}{'\mathbf{n}},i,1,'\mathbf{n}\right)$

Dans la cellule grisée de la colonne **C**, écrire la formule ci-contre qui donne la somme cumulée des aires des rectangles de largeur $\frac{1}{n}$ et dont la hauteur est l'image par la fonction $\frac{1}{1+x^2}$ des valeurs de la colonne **B**.

On obtient donc ici la somme des aires des rectangles inférieurs qui représente la borne inférieure de l'encadrement cherché.

	A	B	C	D	E	F
◆		=seq(i	=cumsum(			
1	4	1/4	0.23529...			
2		1/2	0.43529...			
3		3/4	0.59529...			
4		1	0.72029...			
5						
6						
7						

C $=\dfrac{\mathrm{cumsum}\left(\dfrac{1.}{1+b[\,]^2}\right)}{'\mathbf{n}}$

Ecrire dans la cellule grisée de la colonne **D** la formule **= B –** $\frac{1}{n}$ afin d'obtenir les nouvelles hauteurs des rectangles.

Ecrire dans la cellule grisée de la colonne **E** la formule ci-contre qui donne la somme cumulée des aires des rectangles de largeur $\frac{1}{n}$ et dont la hauteur est l'image par la fonction $\frac{1}{1+x^2}$ des valeurs de la colonne **D**.

On obtient donc ici la somme des aires des rectangles supérieurs qui représente la borne supérieure de l'encadrement cherché.

	A	B	C	D	E	F
◆		=seq(i	=cumsum(	=b[]−1/'n	=cumsum(	
1	4	1/4	0.23529...	0	0.25	
2		1/2	0.43529...	1/4	0.48529...	
3		3/4	0.59529...	1/2	0.68529...	
4		1	0.72029...	3/4	0.84529...	
5						
6						
7						

E $=\mathrm{cumsum}\left(\dfrac{\dfrac{1.}{1+d[\,]^2}}{'\mathbf{n}}\right)$

Calculer en colonne **F** la différence entre les deux sommes cumulées, la dernière cellule donnant l'amplitude de l'encadrement.

	A	B	C	D	E	F
◆		=seq(i	=cumsum(	=b[]−1/'n	=cumsum(	=e[]−c[]
1	4	1/4	0.23529...	0	0.25	0.01470...
2		1/2	0.43529...	1/4	0.48529...	0.05
3		3/4	0.59529...	1/2	0.68529...	0.09
4		1	0.72029...	3/4	0.84529...	0.125
5						
6						
7						
8						
9						

F1 =0.01470588235294

Pour ***n*** = 4, on a l'encadrement :

0,720 < I < 0,845

d'amplitude 0,125.

2) a) Remplacer dans la cellule **A1**, la valeur de ***n*** par 10 et lire à la ligne 10 les nouvelles valeurs.

	A	B	C	D	E	F
◆		=seq(i	=cumsum(	=b[]−1/'n	=cumsum(	=e[]−c[]
2		1/5	0.19516...	1/10	0.19900...	0.00384...
3		3/10	0.28690...	1/5	0.29516...	0.00825...
4		2/5	0.37311...	3/10	0.38690...	0.01379...
5		1/2	0.45311...	2/5	0.47311...	0.02
6		3/5	0.52664...	1/2	0.55311...	0.02647...
7		7/10	0.59375...	3/5	0.62664...	0.03288...
8		4/5	0.65473...	7/10	0.69375...	0.03902...
9		9/10	0.70998...	4/5	0.75473...	0.04475...
10		1	0.75998...	9/10	0.80998...	0.05

F10 =0.05

Pour ***n*** = 10,on a l'encadrement :

0,75998< I < 0,8998

d'amplitude 0,05.

Remplacer dans la cellule **A1**, la valeur de ***n*** par 20 et lire à la ligne 20 les nouvelles valeurs.

Pour aller directement à la cellule **F20**, taper :

Ctrl G puis **F20** dans la boîte de dialogue qui s'affiche.

	A	B	C	D	E	F
◆		=seq(i	=cumsum(	=b[]−1/'n	=cumsum(	=e[]−c[]
12		3/5	0.53366...	11/20	0.54690...	0.01323...
13		13/20	0.56881...	3/5	0.58366...	0.01485...
14		7/10	0.60237...	13/20	0.61881...	0.01644...
15		3/4	0.63437...	7/10	0.65237...	0.018
16		4/5	0.66486...	3/4	0.68437...	0.01951...
17		17/20	0.69388...	4/5	0.71486...	0.02097...
18		9/10	0.72151...	17/20	0.74388...	0.02237...
19		19/20	0.74779...	9/10	0.77151...	0.02371...
20		1	0.77279...	19/20	0.79779...	0.025

F20 =0.02500000000004

Pour ***n*** = 20, on a l'encadrement :

0,77279 < I < 0,79779

d'amplitude 0,0.25.

b) Finir en choisissant $\boldsymbol{n} = 50$ pour obtenir l'amplitude 0,01 demandée. En effet $0.78038 < I < 079038$.

Remarque : En fait $I = \frac{\pi}{4}$ donc $I \approx 0.785398$

	A	B	C	D	E	F	G	H
◆		=seq(i	=cumsum(	=b[]−1/'n	=cumsum(	=e[]−c[]		
42		21/25	0.69450...	41/50	0.70277...	0.00827...		
43		43/50	0.70600...	21/25	0.71450...	0.00850...		
44		22/25	0.71727...	43/50	0.72600...	0.00872...		
45		9/10	0.72832...	22/25	0.73727...	0.00895...		
46		23/25	0.73915...	9/10	0.74832...	0.00916...		
47		47/50	0.74977...	23/25	0.75915...	0.00938...		
48		24/25	0.76017...	47/50	0.76977...	0.00959...		
49		49/50	0.77038...	24/25	0.78017...	0.00979...		
50		1	0.78038...	49/50	0.79038...	0.01		

F50 =0.01000000000007

3) Ouvrir une nouvelle page **Calculs.**

Définir la fonction *f*.

En remarquant que l'amplitude de l'encadrement est la somme des aires des petits rectangles contenant la courbe, on calcule la somme ci-contre.

On valide la valeur 50 trouvée.

$f(x):=\frac{1}{1+x^2}$ *Terminé*

$$\frac{\sum_{i=0}^{k-1}\left(f\left(\frac{i}{k}\right)-f\left(\frac{i+1}{k}\right)\right)\cdot 1}{k} \qquad \frac{1}{2\cdot k}$$

$$\frac{\sum_{i=0}^{k-1}\left(f\left(\frac{i}{k}\right)-f\left(\frac{i+1}{k}\right)\right)\cdot 1}{k}\Bigg|k=50 \qquad \frac{1}{100}$$

1/3

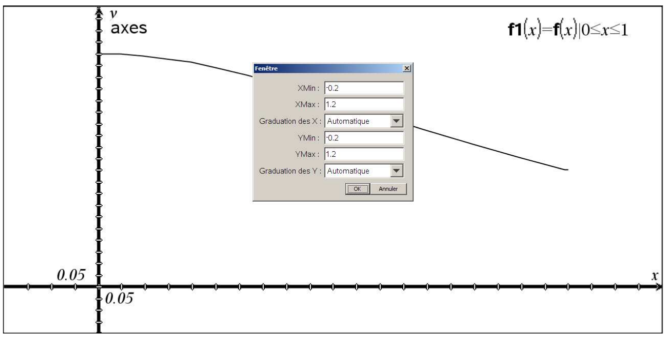
3. Pour aller plus loin.

Ouvrir une nouvelle page **Graphiques et géométrie**

Régler la fenêtre comme ci-contre :
Xmin = - 0.2 ; **Xmax** = 1.2 ;
Ymin = - 0.2 ; **Ymax** = 1.2.

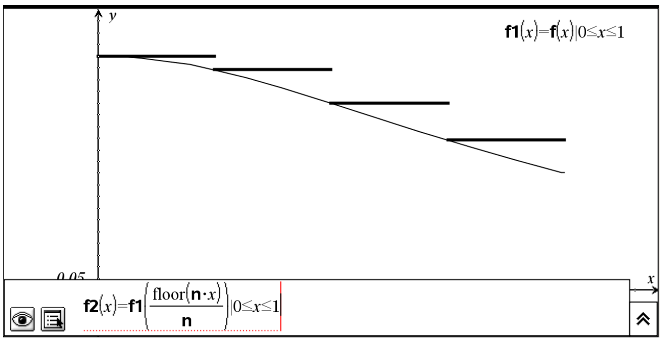
Ecrire dans la ligne de saisie :

$f1(x) = f(x) | \ 0 \le x \le 1$



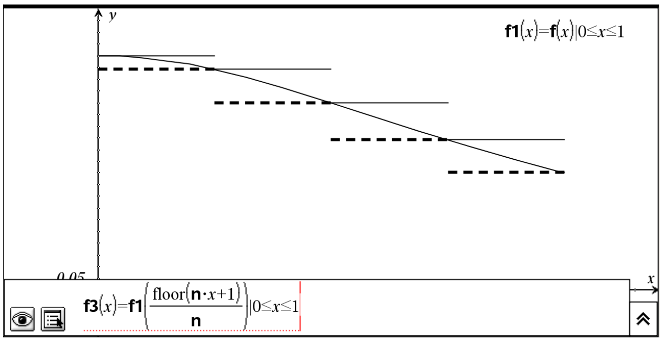
Tracé de la fonction en escalier majorante :

$$f2(x) = f1\left(\frac{\text{floor}(n.x)}{n}\right) \ | \ 0 \le x \le 1$$



Tracé de la fonction en escalier minorante :

$$f3(x) = f1\left(\frac{\text{floor}(n.x+1)}{n}\right) \mid 0 \le x \le 1$$

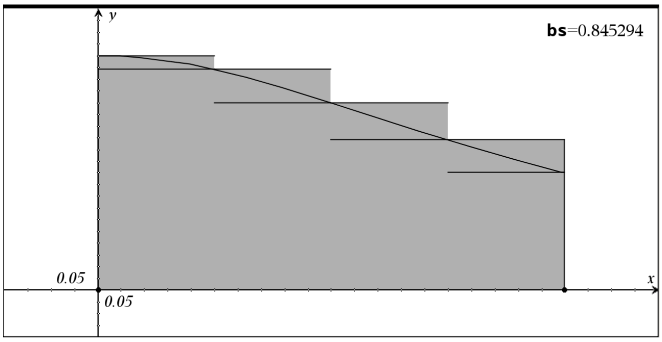


Calcul de l'intégrale de la fonction f2 sur [0 ; 1] :

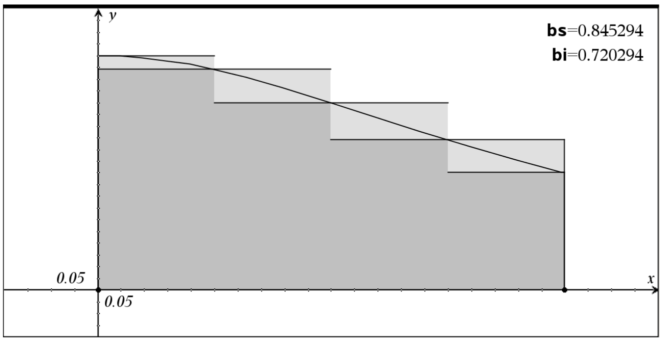
Icône 7 Intégrale

Montrer la courbe, on doit voir apparaître « graphique f2 », valider, taper 0, valider, taper 1, valider.

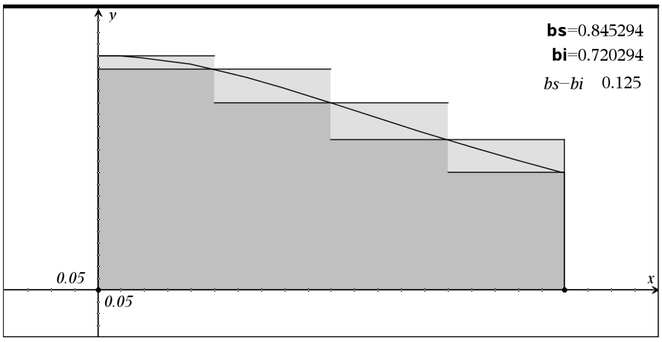
Stocker le résultat dans la variable ***bs***.



Procéder de même pour calculer l'intégrale de la fonction f3 et stocker le résultat dans la variable ***bi***.

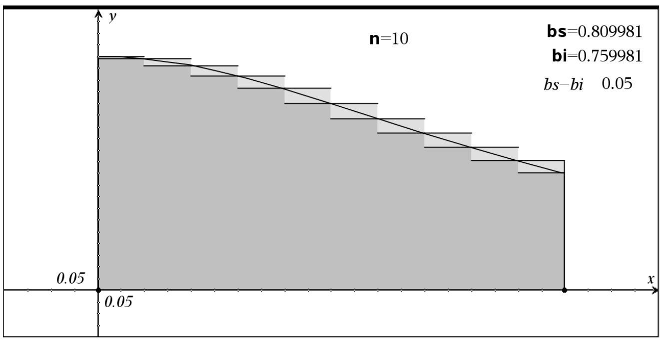


Ecrire un texte bs – bi, et calculer cette expression.



Taper un texte avec la valeur 4, la **Lier à** la variable ***n*** puis remplacer 4 par 10.

Remarque : quand on change la valeur de ***n*** dans cette page, elle est également changée dans la page tableur qui est donc actualisée automatiquement et réciproquement.



Visualisation géométrique de l'amplitude de l'encadrement : en ramenant tous les petits rectangles sur la première colonne on obtient un rectangle de dimensions $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{n}$, donc d'aire $\frac{1}{2n}$.