

Stage découverte de l'univers Nspire

Baccalauréat Polynésie 2010

Mots-clés : intégrale, fonctions, suites, convergence.

Fichier associé : polynesie.tns

1. Objectifs

Traiter, à l'aide de la TI-Nspire, un exercice de baccalauréat dans son intégralité.

2. Énoncé

Le texte suivant est l'exercice 4 de l'épreuve du baccalauréat de Polynésie, juin 2010.

Partie A

1. On considère la fonction g définie sur $[1 ; +\infty[$ par : $g(x) = \ln(2x) + 1 - x$.

a. Cette question demande le développement d'une certaine démarche comportant plusieurs étapes. La clarté du plan d'étude, la rigueur des raisonnements ainsi que la qualité de la rédaction seront prises en compte dans la rédaction.

Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $[1 ; +\infty[$ une unique solution notée α .

b. Démontrer que $\ln(2\alpha) + 1 = \alpha$.

2. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n , par $u_{n+1} = \ln(2u_n) + 1$.

On désigne par (G) la courbe d'équation $y = \ln(2x) + 1$ dans un repère orthonormal d'origine O.

a. En utilisant la courbe (G), construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite u .

b. Démontrer que pour tout entier naturel n , $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$.

c. Démontrer que la suite (u_n) converge vers α .

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[1 ; +\infty[$ par : $f(x) = (x-1)e^{1-x}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal d'origine O.

1. Pour tout nombre réel x supérieur ou égal à 1, on pose : $F(x) = \int_1^x f(t)dt$.

a. Démontrer que la fonction F est croissante sur $[1 ; +\infty[$.

b. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que pour tout réel x de $[1 ; +\infty[$, $F(x) = -xe^{1-x} + 1$.

c. Démontrer que sur $[1 ; +\infty[$, l'équation $F(x) = \frac{1}{2}$ est équivalente à l'équation $\ln(2x) + 1 = x$.

2. Soit un réel a supérieur ou égal à 1.

On considère la partie D_a du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = a$.

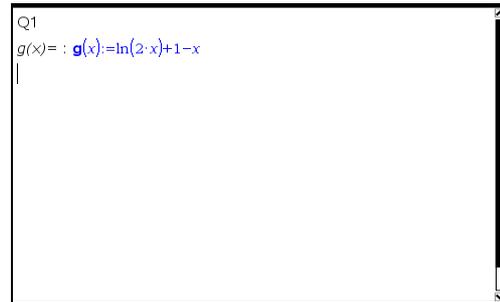
Déterminer a tel que l'aire, en unités d'aires, de D_a , soit égale à $\frac{1}{2}$ et hachurer D_a sur le graphique.

3. Traitement

Il se fait dans l'application **Éditeur mathématique**, qui permet à la fois d'écrire du texte et d'effectuer des calculs numériques ou formels.

Partie A – Question 1.a.

Ouvrir un nouveau classeur contenant une page **Éditeur mathématique**. Insérer par exemple le texte suivant : « Q1 On considère g définie sur $[1; +\infty[$ par : »
 Insérer une Boîte de saisie math (**menu** **3** **1** ou **ctrl** **M**) dans laquelle saisir l'instruction $g(x)=\ln(2*x)+1-x$ et valider par **enter**.
 La fonction g est désormais en mémoire.

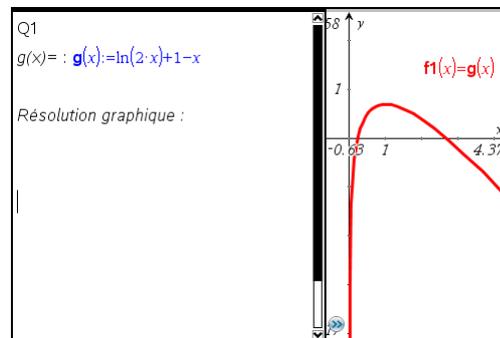


Remarques : C'est lors de la validation que $g(x)$ est automatiquement écrit en caractères gras.
 On aurait pu choisir de définir g sur $[1; +\infty[$ en ajoutant $|x \geq 1$ mais cela empêcherait le traitement algébrique ultérieur de la dérivée par exemple.

Vers la résolution de $g(x)=0$

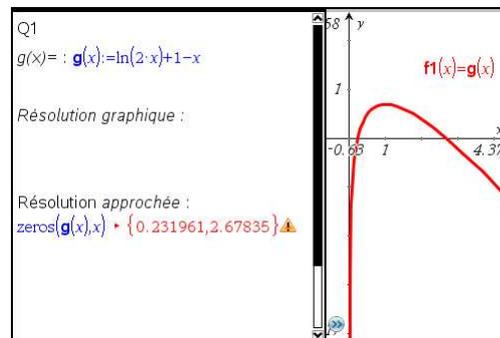
Approche graphique :

Partager la page en personnalisant le format (**doc** **5** **1**) et utiliser le pavé de navigation pour partager la page en $2/3 - 1/3$, valider par **enter**.
 Passer dans la demi-page de droite (**ctrl** **tab**).
 Saisir $f1(x)=g(x)$ et valider par **enter**.
 Régler la fenêtre graphique
 $X_{min} = -1, X_{max} = 5, Y_{min} = -5, Y_{max} = 5$.
 Observer que $g(x) = 0$ a apparemment 2 solutions dont une après $x = 0,5$.



Résolution numérique assistée :

Revenir en demi-page de gauche (**ctrl** **tab**).
 Utiliser la fonction de recherche des zéros d'une fonction : $zero(g(x),x)$ (**menu** **6** **3** **4**) et valider par **enter**.



Preuve formelle :

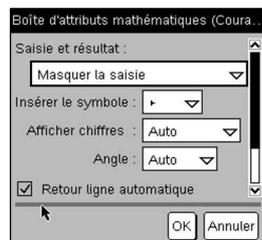
Elle requiert l'utilisation du Théorème des Valeurs Intermédiaires.

Détail de la preuve :

Insérer une nouvelle page **Éditeur mathématique**.

Compléter comme ci-contre.

On pourra améliorer l'affichage en cachant la saisie de chacune des 3 formules (**ctrl** **menu** **6**).



TVI
 - dérivée $g'(x) = \frac{d}{dx}(g(x)) = \frac{1}{x} - 1$
 - Même dénominateur : $g'(x) = \text{comDenom} \left(\frac{d}{dx}(g(x)) \right) = \frac{1-x}{x}$
 - Signe de g' : $g'(x) > 0$ lorsque solve $\left(\frac{d}{dx}(g(x)) > 0, x \right) = 0 < x < 1$

Une rédaction reste à ce niveau nécessaire.

g est une fonction continue sur $[1; +\infty[$ car dérivable.

Sa dérivée est strictement négative pour $x > 1$ donc g est strictement décroissante sur $[1; +\infty[$.

g ($[1; +\infty[=]-\infty; \ln(2)$], intervalle qui contient 0.

Les conditions d'application du corollaire du Théorème des Valeurs Intermédiaires sont réunies, ce qui permet d'affirmer que $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[1; +\infty[$.

Partie A – Question 1.b.

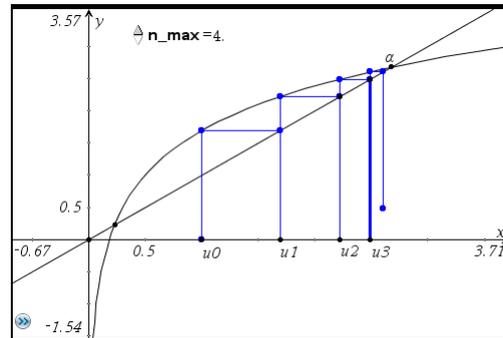
Elle se traite sans le renfort de la calculatrice.

On sait que $g(\alpha) = 0$ soit $\ln(2\alpha) + \alpha - 1 = 0$ donc $\ln(2\alpha) + 1 = \alpha$.

Partie A – Question 2.a.

On utilise ici une application préconstruite et téléchargeable à l'URL suivante :

<http://www.univers-ti-nspire.fr/>, rubrique réussir en prépa/exemples/suites.



Partie A – Question 2.b.

Elle nécessite un raisonnement par récurrence dont l'étape d'hérédité est traitée ci-contre dans une page **Éditeur mathématique**.

Détails :

- **hr** est l'hypothèse de récurrence au rang n .
- On compose l'inégalité par la fonction **ln** (croissante). Le résultat est stocké dans **eq**.
- On ajoute ensuite 1 à l'inéquation et on reconnaît la propriété au rang $(n + 1)$.

```
hr:=u(n)≤u(n+1) • u(n)≤u(n+1)
eq:=ln(hr) • ln(u(n))≤ln(u(n+1))
eq+1 • ln(u(n))+1≤ln(u(n+1))+1
```

Partie A – Question 2.c.

La suite étant croissante et majorée elle converge vers l'unique solution de $\ln(2x) + 1 = x$ qui est le réel α .

Partie B – Question 1.a.

Dans une nouvelle page **Éditeur mathématique**, définir la fonction **f**.

(L'intégrale s'obtient via **menu** (6) (4) (3)).

Calculer ensuite sa dérivée et étudier son signe.

```
B1. f(x):=∫₁ˣ ((t-1)•e¹⁻ᵗ)dt
dérivée : f'(x)=d/dx(f(x)) • (e•x-e)•e⁻ˣ
signe : f'(x)>0 lorsque solve(d/dx(f(x))>0,x) • x>1.
```

Partie B – Question 1.b.

Là encore, on peut utiliser un module préconstruit d'intégration par parties.

Le résultat n'a pas la forme escomptée. Il faut développer l'expression obtenue à la calculatrice.

```
IPP
ff(x):=u(x)•v(x)-∫₁ˣ (u(t)•dv(t))dt
du(t):=e¹⁻ᵗ, v(t):=t-1
u(t):=∫₁ᵗ (du(σ))dσ=(e¹-σ)•e⁻ᵗ, dv(t):=d/dt(v(t))=1
f(x):=u(x)•v(x)-∫₁ˣ (u(t)•dv(t))dt
Donc F(x)=(eˣ-e•x)•e⁻ˣ
```

Partie B – Question 1.c.

Il est préférable de traiter cette question manuellement. Il s'agit d'une transformation algébrique que la calculatrice ne fait pas naturellement. Il faudrait lui indiquer les premières étapes.

Partie B – Question 2.

On démontre que f est positive sur $[1 ; +\infty [$.

Ainsi l'aire de D_a vaut $\int_1^a (x-1)e^{1-x} dx$.

On dessine également cette aire en demi-page de droite (menu (6) (7)).

Il reste à résoudre $\int_1^a (x-1)e^{1-x} dx = \frac{1}{2}$ soit

encore $F(x) = \frac{1}{2}$ donc $g(x) = x$ dont l'unique

solution est le réel α trouvé précédemment.

