EP 031 - 2007 : Tangentes à une Parabole

Auteurs du corrigé : Alain Soléan, France et Michel Villiaumey **TI-Nspire™ CAS**

***Avertissement** : ce document a été réalisé avec la version 1.4 ; il est disponible dans sa version la plus récente sur notre site http://education.ti.com/france, menu Ressources pédagogiques.*

Fichier associé : EP031_2007_TangenteParabole_CAS.tns

1. Le sujet

Sujet 031 de l'épreuve pratique 2007 – Tangentes à une parabole

Enoncé

Le plan est apporté à un repère orthonormal. On considère la parabole $\mathcal{C}$ d'équation $y = \frac{1}{2}x^2$.

Étant donné un réel t non nul, on se propose de mettre en évidence, puis de démontrer une propriété du point d'intersection des tangentes à la parabole $\mathcal{C}$ aux points M et M' d'abscisses respectives t et $t' = -\frac{1}{t}$.

1. a) À l'aide d'un logiciel adapté, tracer la parabole $\mathcal{C}$.

b) On se donne un réel t. Placer le point M d'abscisse t sur la courbe $\mathcal{C}$.

c) Tracer la droite D tangente à $\mathcal{C}$ au point M.

d) Placer le point M' d'abscisse $t' = -\frac{1}{t}$ sur la courbe $\mathcal{C}$. Tracer la droite D' tangente à $\mathcal{C}$ au point M'.

Placer le point d'intersection P des droites D et D'.

e) Lorsque t varie dans $\mathbb{R}^*$, à quel ensemble le point P semble-t-il appartenir ?

2. Démonstration

a) Donner les équations des droites D et D'.

b) Calculer les coordonnées du point P et conclure sur la propriété conjecturée.

Production demandée

- Visualisation à l'écran et si possible impression de la figure réalisée avec le logiciel ;
- Rédiger la conjecture relative au point P ;
- Calcul des équations des droites D et D' ;
- Calcul des coordonnées du point P et conclusion.

Compétences évaluées

- **Compétences TICE**
  - Utilisation logiciel de géométrie dynamique ;
  - Construction des tangentes à une courbe ;
  - Visualisation à l'écran de la trace d'un point mobile.
- **Compétences mathématiques**
  - Équations de tangentes à la courbe représentative d'une fonction ;
  - Résolution d'un système de deux équations..

2. Corrigé

1) a) Ouvrir une page **Graphiques & géométrie**.

Choisir **Type de graphique**, **Fonction**, puis dans la ligne de saisie inscrire $\frac{1}{2}x^2$.

Régler la **Fenêtre**. Sur l'image de la page suivante, on a choisi :

Xmin = – 2 ; **Xmax** = 2 ; **Ymin** = –1 ; **Ymax** = 2.

b) Placer un point M sur la courbe $\mathcal{C}$ et le nommer M (**Point sur**). Ses coordonnées s'affichent.

c) Construire la **Tangente** D en M à $\mathcal{C}$.

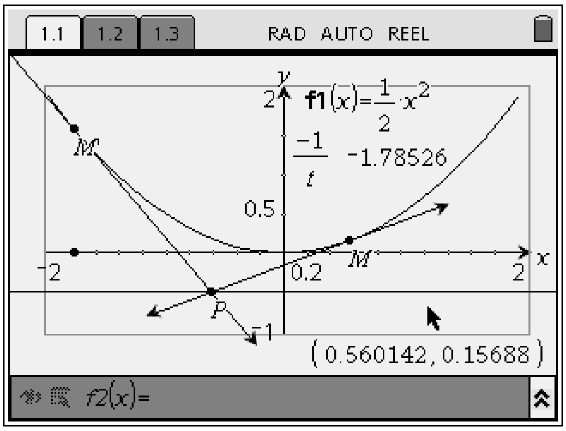
d) Inscrire le **Texte** $-\dfrac{1}{t}$.

Avec l'option **Calculer**, évaluer ce texte en désignant l'abscisse de M comme variable t.
Avec l'option **Report de mesure**, placer le point d'abscisse $-\dfrac{1}{t}$ sur l'axe des abscisses.
Construire la droite **Parallèle** à l'axe des ordonnées passant par ce point.
Demander le **Point d'intersection** entre la courbe $\mathcal{C}$ et cette droite, le nommer M'.
Construire la Tangente D' en M' à $\mathcal{C}$. Construire finalement P **Point d'intersection** entre D et D'.

e) Demander le **Lieu** de P lorsque M décrit $\mathcal{C}$.

Il semble que P décrive la droite (Δ) d'équation $y = -\dfrac{1}{2}$.

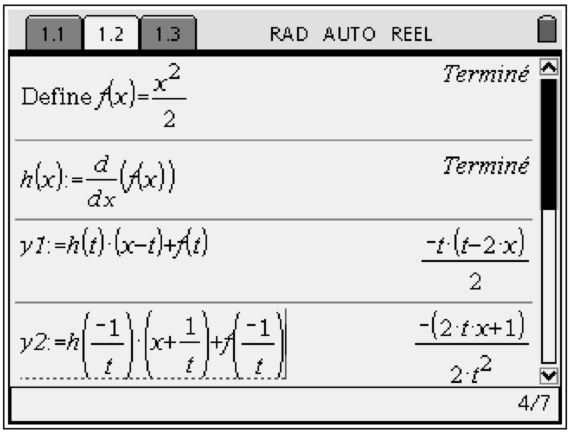
Les images ci-dessous sont obtenues à partir de la calculatrice



2) a) Ouvrir une page **Calculs**.

Définir la fonction f par $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2$.

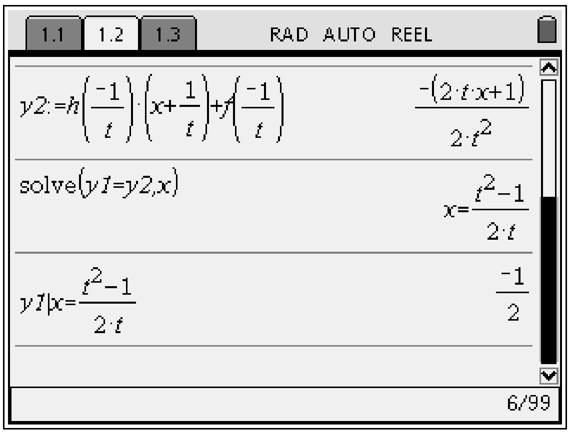
Calculer la dérivée de f et définir ainsi la fonction h.
Ecrire les équations des deux tangentes.
y_1 est l'équation de la droite D et y_2 celle de D'.



b) On résout ensuite l'équation $y_1 = y_2$ d'inconnue x et on reporte la valeur de x trouvée dans $y1$ par exemple.
On trouve (voir ci-contre, avec $t \neq 0$) :

$$x = \frac{t^2 - 1}{2t} \text{ et } y = -\frac{1}{2}.$$

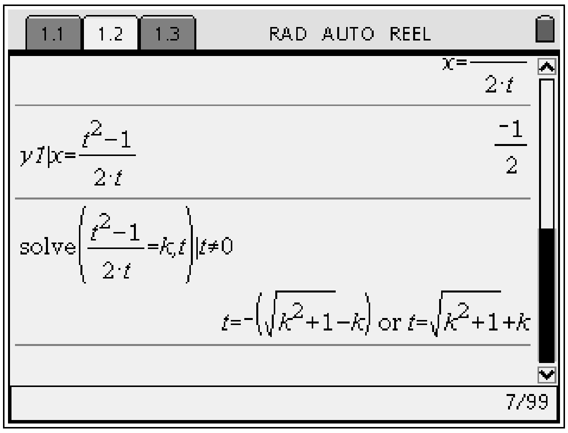
Ceci prouve que le lieu de P est bien inclus dans la droite d'équation $y = -\dfrac{1}{2}$.



Montrons que P décrit entièrement cette droite.

Pour cela, il suffit de montrer que l'équation $x = k$ admet toujours au moins une solution, quel que soit le réel k.

On peut remarquer que pour $k = 0$, on obtient une seule solution : $t = 1$. D'autre part, pour $t \neq 0$, on obtient deux solutions distinctes, de produit -1 (soit t et $-\frac{1}{t}$.



On peut en conclure que lorsque x décrit $\mathbb{R}^*$, $g(x)$ décrit $\mathbb{R}$, donc P décrit toute la droite d'équation $y = -\frac{1}{2}$.

La conjecture émise grâce au graphique, est donc bien vérifiée.