Derivata av exponentialfunktioner

Mål för aktiviteten

Att undersöka utseendet av derivatan av exponentialfunktioner.

Nödvändiga förkunskaper

Kunskaper om begreppet derivata. Någon erfarenhet av att använda TI-Nspire CAS+.

Uppgift

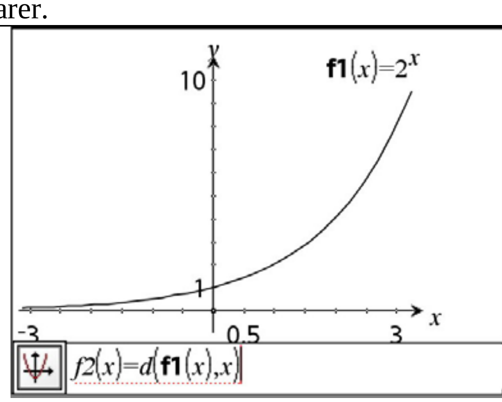
Studera funktionen $y = 2^x$ och dess derivata grafiskt. Jämför utseendet av derivatan och funktionen. Fortsätt studera $y = 3^x$ och gör observationer rörande denna graf och dess derivata. Gör jämförelser mellan de båda paren av funktioner, 2^x och dess derivata och 3^x och dess derivata. Undersök vidare baser i intervallet mellan 2 och 3 för att göra upptäckter. Finna basen e.

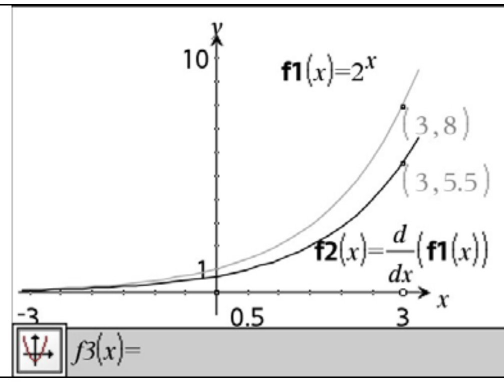
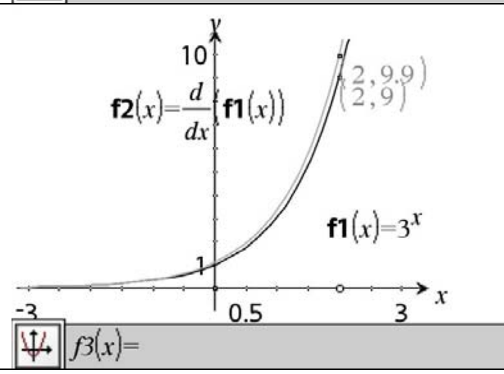
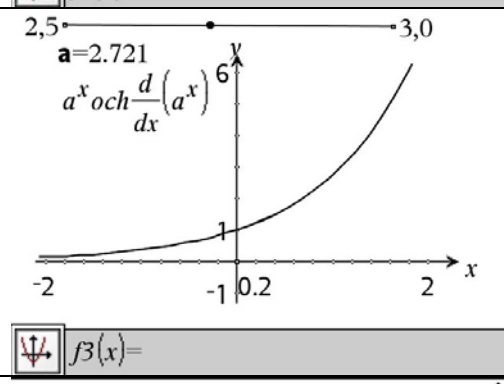
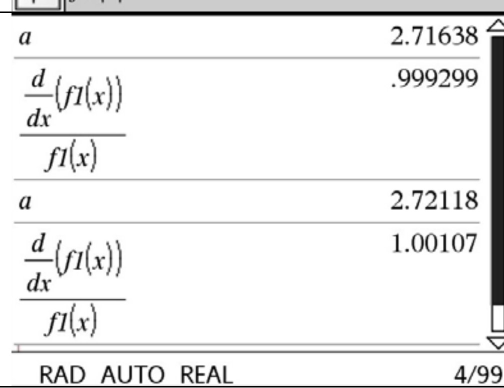
Genomförande

Skicka filen ”Aktivitet4_DerivataAvExpfunktioner_CAS_student.tns” till elevernas räknare. I denna fil finns fullständig steg för steg anvisning till eleverna för att genomföra undersökningen. Denna sker i två steg. I problem 1 görs den egna konstruktionen och jämförelsen mellan $y = 2^x$ och $y = 3^x$. I problem 2 finns en förberedd sida där eleverna kan leka med ett skjutreglage för att variera basen i exponentialfunktionen. Låt gärna eleverna arbeta i par och uppmuntra dem att i Räknar-delen finna ett bra närmevärde experimentellt på basen för vilken $\frac{D(a^x)}{a^x} = 1$ med god noggrannhet.

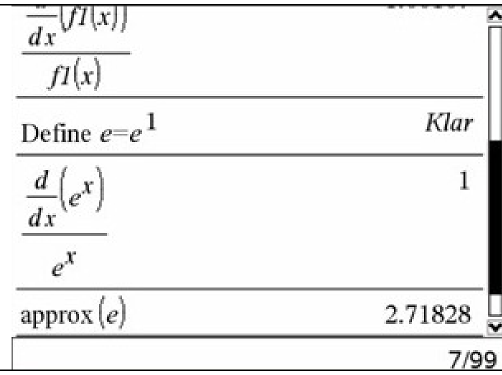
Lärarstöd

En fullständig lösning till uppgiften finns i filen ”Aktivitet4_DerivataAvExpfunktioner_CAS_lösning.tns”. Innehållet i denna redovisas översiktligt nedan med kommentarer.

Eleverna öppnar en sida med Grafer & Geometri. De justerar axlarna efter anvisningarna och definierar sedan funktionen $f1(x) = 2^x$. Därefter definieras funktionen *f2(x)* som derivatan av *f1(x).* Derivationen kan utföras symboliskt med hjälp av *d*(, ”derivata” eller numeriskt med hjälp av *NDeriv*(. Båda hittar eleverna i katalogen. I bilden har den symboliska derivatan använts..	

<table>
<tr>
<td>När de båda funktionerna är synliga måste eleverna identifiera dem. Detta kan ske t.ex. med Spåra graf. Som framgår ligger derivatans graf under funktionen 2^x. Dessutom tycks derivatan också vara en exponentialfunktion.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Eleverna redigerar funktionen f1(x) genom att ändra bas till 3.
Med Spåra identifieras funktionerna och eleverna kan konstatera att grafen av funktionen 3^x nu ligger under grafen av dess derivata.
Någonstans mellan baserna 2 och 3 bör det alltså finnas en graf där de båda sammanfaller.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Nu växlar eleverna till Problem 2 i samma fil där det finns instruktioner hur de ska utnyttja den förberedda G&G -sidan för att fortsätta undersökningen.
I bilden intill har skjutreglaget justerats så att basen är 2,721 och det är endast en graf synlig i fönstret.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Det är här lägligt att öppna en sida med Räknare för att undersöka kvoten mellan derivatan och exponentialfunktionen.
I bilden visas två olika inställningar av skjutreglaget (a presenteras överst i båda fallen). I det ena fallet är basen 2,71638 och kvoten mindre än 1. I det andra då basen är 2,72118 är kvoten större än 1.
Här kan eleverna ”leka” vidare en stund.</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

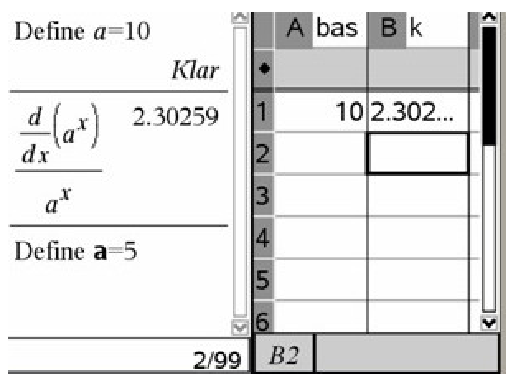
Introducera nu basen e. I bilden intill har e definierats som exp(1). Som synes blir kvoten nu exakt = 1
Genom att använda *approx*(e) kan ett numeriskt närmevärde tas fram.

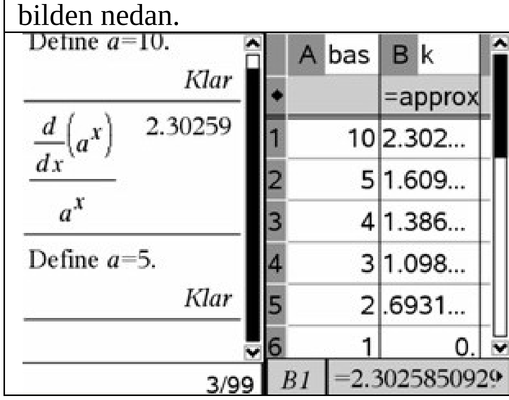


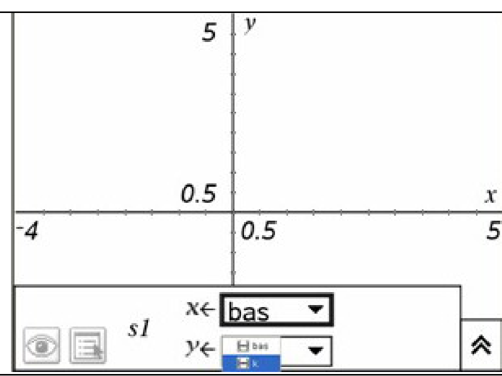
Extra

Eleverna har i ovanstående undersökning sett att $\frac{D(a^x)}{a^x} = k$, där värdet på konstanten k beror av basen a. Sambandet kan naturligtvis lika gärna skrivas $D(a^x) = k \cdot a^x$.
Eleverna kan identifiera k på en mängd olika sätt. Först bör eleverna göra en tabell med olika baser, a, och motsvarande värde på konstanten k. Studera gärna baserna 10, 5, 4, 3, 2, 1, 0,5 och 0,2. Använd Räknare för att beräkna kvoten mellan derivatan och funktionen, så som bilderna ovan visar.
Det enklaste (på snudd fuskbetonade) är att konsultera formelsamlingen och ”tjuvkika” för att sedan kontrollera tabellen genom att bestämma den naturliga logaritmen för de olika baser eleverna studerat. Genom att se att värdena stämmer kan även svagare elever nå ett resultat.
Mera vetenskapligt är att utnyttja Listor & Kalkylblad tillsammans med Räknare att skapa tabellen och sedan plotta grafen.

Bilden visar en delad sida med Räknare och Listor & Kalkylblad. I vänstra fönstret beräknas konstanterna *k* för olika baser a. Observera punkten efter talet 10 för att få ett närmevärde på *k*.
De olika baserna läggs in i kolumn A, som döpts till bas och motsvarande värden på k i kolumn B, döpt till k.
Öppna ett fönster med G&G och skifta på inmatningsraden till s1. Välj bas för x-värden och k för y-värden. Se högra bilden nedan.







Tryck enter när valet är klart. Ett punktdiagram, med utseendet som bilden nedan till vänster visar, dyker upp. Punkterna tycks falla utmed en graf som är inversen av en exponentialfunktion (låt eleverna tänka sig x och y skiftade).
Definiera därför funktionen f1(x)= ln (x).
Som framgår av högra bilden nedan ansluter punktdiagrammets punkter väl till grafen av ln x.
Vi har visat att $D(a^x) = a^x \cdot \ln a$.