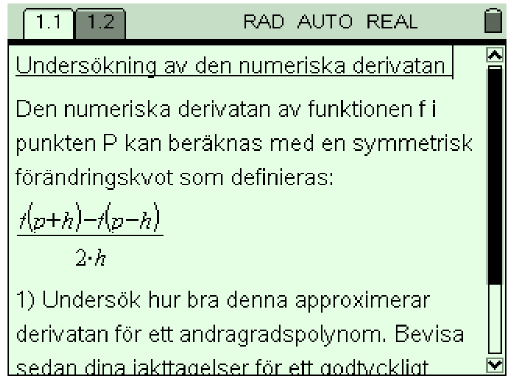
Laboration: Den symmetriska förändringskvoten

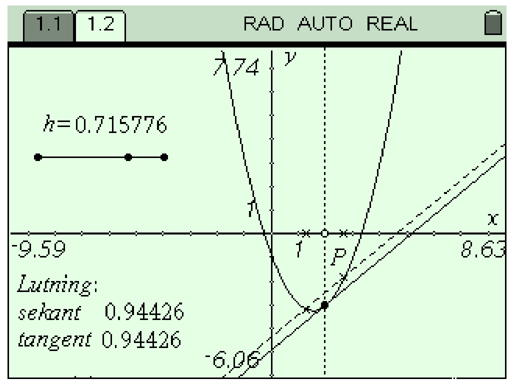
Målet med denna aktivitet är att du ska förstå hur numerisk derivering fungerar och också hur väl det fungerar genom att jämföra de värden som du får med hjälp av den numeriska derivatan med de du får med derivatan själv.

Undersökningen behandlar andragrads- och tredjegradsfunktioner, men kan lätt utvidgas till andra typer av funktioner. Öppna filen *num deriv.tns* där en konstruktion finns gjord.

I filen finns andragradsfunktionen $f1(x) = x^2 - 3x - 1$ ritad. Tangenten är ritad i en punkt P på grafen och dessutom en rät linje, en sekant, genom punkterna på grafen med x-koordinaterna x = p + h och x = p – h. Dessa båda linjers lutningar jämföres i övningen.

I bilden bredvid är sekanten streckad och tangenten heldragen. Värdet på h är för tillfället ca 0,7.





Några steg på vägen:

- Flytta punkten P på x-axeln och studera vad som händer med de båda linjernas lutningar.
- Variera storleken på h genom att flytta punkten på skjutreglaget, sträckan under h-värdet. Vad händer med sekanten och tangenten? Hur förändras lutningarna?
- Gör inmatningsraden synlig (menu, View, Show Entry Line) och redigera funktionen. Ändra den t ex till $f1(x) = x^2 - 2x - 3$. Avsluta med enter. Dölj på nytt inmatningsraden. Upprepa undersökningarna enligt ovan.
- För att bevisa det du observerat så infogar du en Calculator applikation (, Calculator) och definierar ett allmänt andragradspolynom, dvs med godtyckliga koefficienter a, b och c så här: $f(x) = a*x^2 + b*x + c$.
- Definiera derivatan av funktionen $f(x)$ som f$d(x)$.
- Bestäm fd(p) och jämför med den symmetriska förändringskvoten runt punkten med x = p. Vilken slutsats kan du dra?
- Återvänd till Graphs & Geometry-sidan och redigera funktionen $f1(x)$ så att du får en funktion av tredje graden, t ex $f1(x) = x^3 - x - 1$. Upprepa de undersökningar du gjorde under de två första punkterna ovan, dvs flytta P och variera h. Vad observerar du nu?
- Återvänd till Calculatorsidan och definiera om $f(x)$ och $fd(x)$. Hur stor är skillnaden mellan värdet på den symmetriska förändringskvoten och derivatan?

Matematisk nivå

Kunskaper motsvarande matematik kurs C.

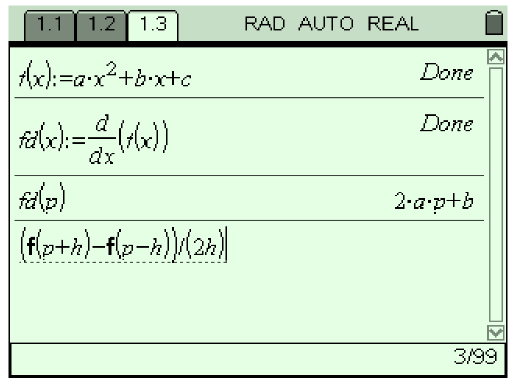
Teknisk nivå

Tidigare erfarenhet av CAS i Calculator är nödvändig.

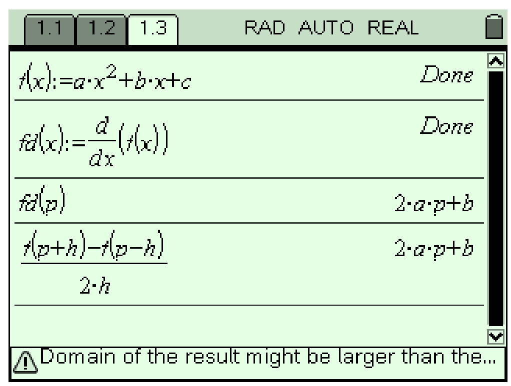
Läraranvisning

Undersökningen i Graphs & Geometry visar att den symmetriska förändringskvoten överensstämmer med derivatan i intervallets mittpunkt oberoende av läget av P och oberoende av storleken på h.

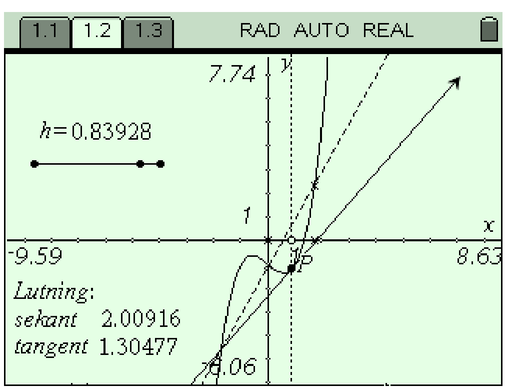
För att bevisa det infogas en Calculator-applikation och definitionerna enligt elevinstruktionen utföres. Använd Define eller := (kolon lika-med) notation för att definiera de båda funktionerna. För derivatan infogas en mall (menu, Calculus, Derivative). Se bild!



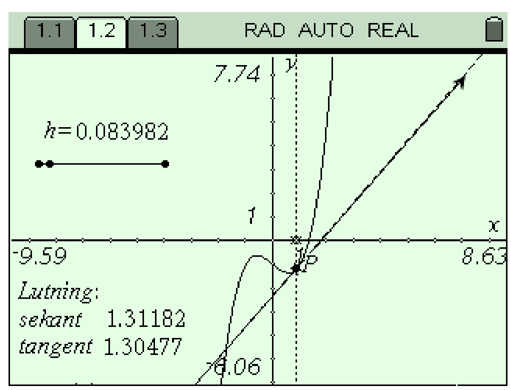
En enter-tryckning bekräftar resultatet. För ett andragradspolynom är derivatan och den symmetriska förändringskvoten lika.



Funktionen redigeras på sidan 1.2 (ctrl, G för att visa inmatnigsraden. Sedan pil-upp till *f1(x)* följt av ändringen). Ändra till $f1(x) = x^3 - x - 1$ och avsluta med enter. Se bilder nedan!



Som framgår av bilden ovan är överensstämmelsen dålig för detta värde på h.

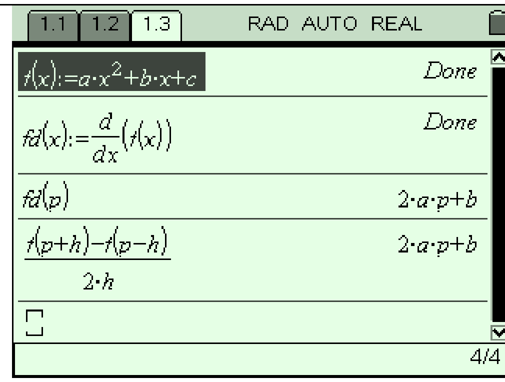


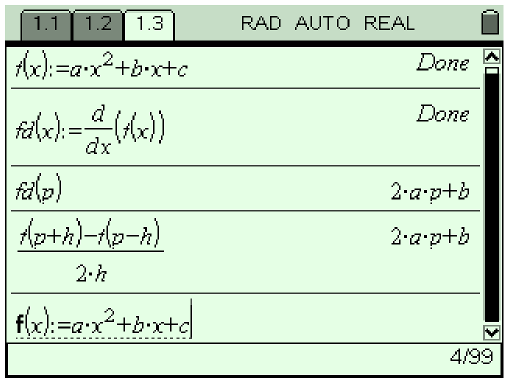
En minskning av h gör att approximationen blir betydligt bättre. Vid numerisk derivering är h förinställt till h = 0,001, dvs betydligt mindre än ovan.

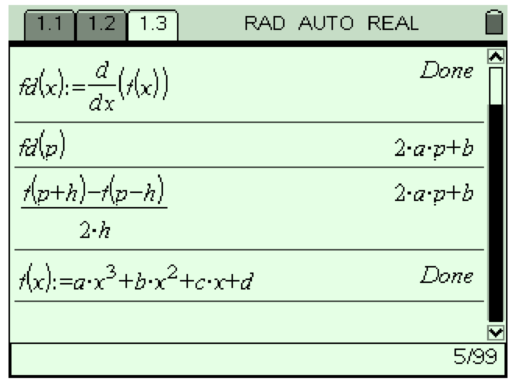
För att studera hur stor skillnaden mellan den symmetriska förändringskvoten och derivatan är, utnyttjas tidigare gjorda definitioner med hjälp av de historiska paren.

Med pil-upp flyttas markören till den tidigare definitionen av *f(x)*, bild till höger.

Med enter-tryckning kopieras detta uttryck till inmatningsraden, se bild nedan till vänster. Uttrycket redigeras och avslutas med enter, bild till höger nedan.

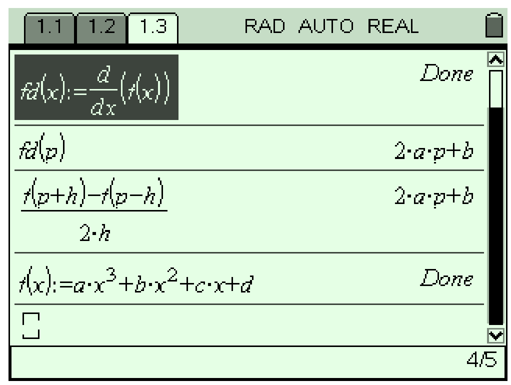


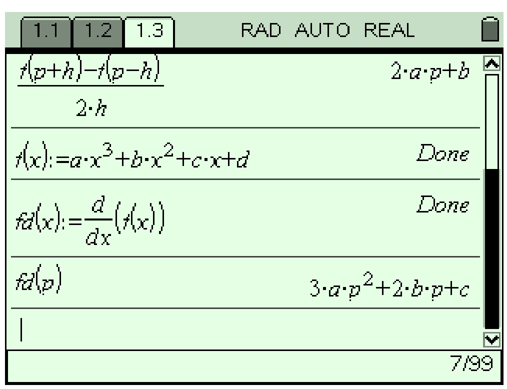


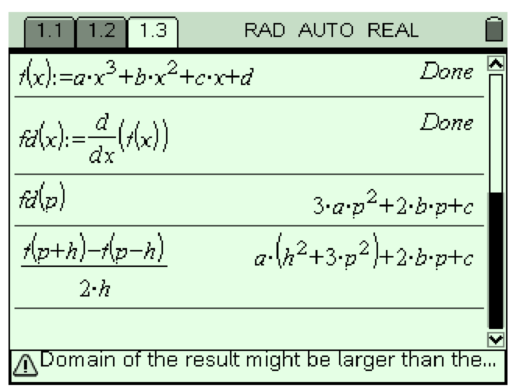


Detta upprepas för derivatan, derivatans värde i punkten p och den symmetriska förändringskvoten.

Bilden till höger visar hur derivatans definition hämtas och bilderna nedan resultaten av de senare hämtningarna.



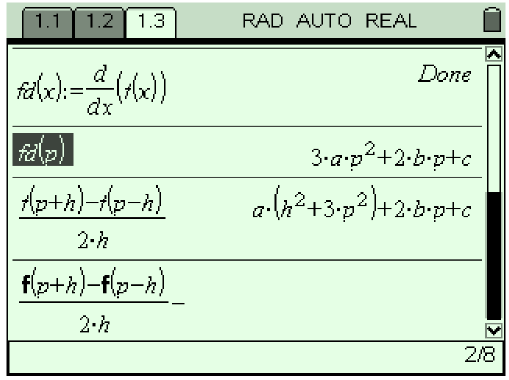


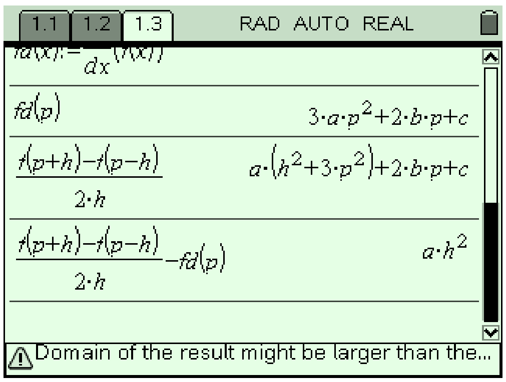


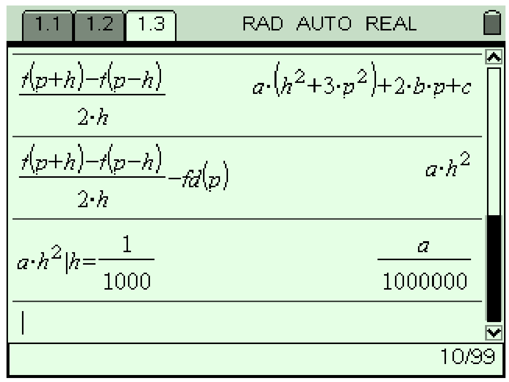
Differensen bildas med hjälp av de historiska paren.

Som framgår av bilderna beror differensen av koefficienten för tredjegradstermen och av h.

För det värde på h som används av många räknare är differensen en miljontedel av koefficienten för x^3.







Fördjupning

- Utvidga undersökningen till fjärdegradspolynom och till andra funktionstyper.
- Genomför den inledande konstruktion som finns i filen *num deriv.tns*