EP 027 - 2007 : Aire maximale

Auteurs du corrigé : Alain Soléan, France et Michel Villiaumey **TI-Nspire™ CAS**

Avertissement *: ce document a été réalisé avec la version 1.4 ; il est disponible dans sa version la plus récente sur le site* http://education.ti.com/france*, menu Ressources pédagogiques.*

Fichier associé : EP027_2007_AireMaximale_CAS.tns

1. Le sujet

Sujet 027 de l'épreuve pratique 2007 – Triangle d'aire maximale

Enoncé

On considère un triangle isocèle de périmètre fixé, égal à 15.

Le but de cet exercice est de déterminer parmi tous les triangles possibles celui dont l'aire est maximale.

1. Expérimentation à l'aide d'un logiciel de géométrie

a) À l'aide d'un logiciel de géométrie, construire un triangle ABC isocèle en A, dont le périmètre est fixé et exactement égal à 15.

b) Parmi tous les triangles possibles, quelle semble être la nature du triangle d'aire maximale ?

2. Démonstration

On note x la longueur BC et $\mathcal{A}(x)$ l'aire de ABC

a) Dans quel intervalle le réel x peut-il prendre ses valeurs ?

b) Soit H le milieu de $[BC]$, exprimer AH en fonction de x et en déduire que :

$$\mathcal{A}(x) = \frac{x}{4}\sqrt{225 - 30x}\ .$$

c) Résoudre le problème posé.

Production attendue

- Réponses écrites aux questions **1.b)** et **2.a)**, **2.b)** et **2.c)**.
- Obtention à l'écran de la figure correspondant aux hypothèses au **1.a)** avec éventuellement impression.

Compétences évaluées

- **Compétences TICE**
  - Utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique.
- **Compétences mathématiques**
  - Calculs de longueur et d'aire ;
  - Etude des variations d'une fonction.

2. Corrigé

1) a) Ouvrir une page **Graphiques & géométrie**.

Afficher Plan Géométrique.

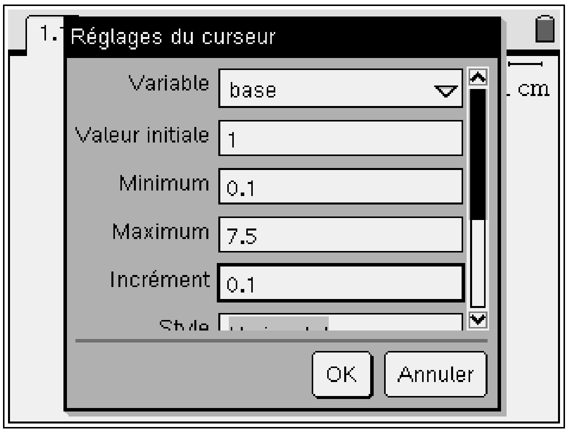
Remarque préliminaire : la « base » $[BC]$ *ne peut pas être supérieure à* 7,5 *cm.*

Construire un curseur :

menu **1 : Actions A : Contrôle curseur**.

ctrl menu **1 : Réglages.**

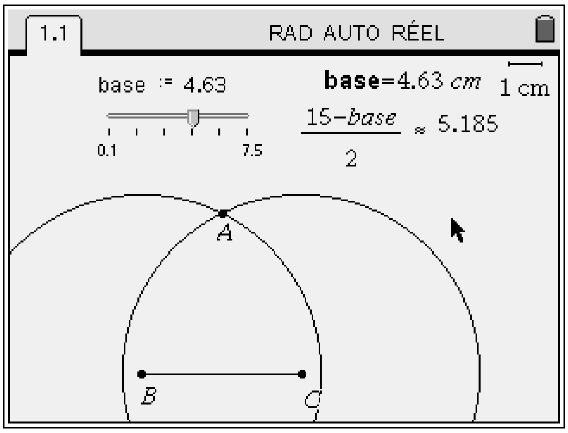
Remplir comme ci-contre la boite de dialogue.
Remarque : la longueur minimale n'est pas 0 car sinon l'aire du triangle sera « indéfinie ».



Tracer un segment [BC], mesurer sa longueur et la lier à la variable *base.*
Si l'on bouge le curseur, le segment [BC] doit être automatiquement modifié.

Créer le texte $\dfrac{15-\text{base}}{2}$, cette expression donne la longueur des côtés [AB] et [AC] lorsque BC = *base*, puis avec l'outil **Calculer** remplacer *base* par sa valeur.

Enfin avec l'outil **Compas** créer deux cercles de centre B et C et de rayon $\dfrac{15-x}{2}$, nommer A l'un des **Point d'intersection** de ces cercles.

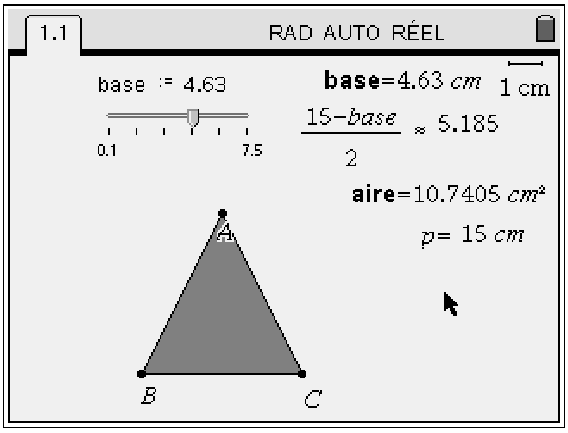


Définir le triangle ABC.
Demander son **Aire** et stocker le résultat dans la variable *aire*.

Les images sont obtenues à partir de la calculatrice.

Sur l'image ci-contre les « objets inutiles » (cercles) ont été cachés et le périmètre p a été calculé pour vérifier qu'il reste constant.

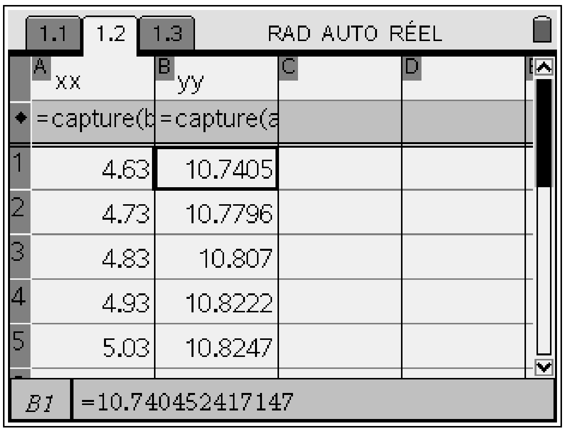
Animer manuellement le curseur : on peut conjecturer ainsi que le triangle a une aire maximale lorsque BC = 5 et dans ce cas ABC est équilatéral.



Vérifions plus précisément cette conjecture.
Ouvrir une page **Tableur & listes**.

Capture des données **base** et **aire** dans le tableur :

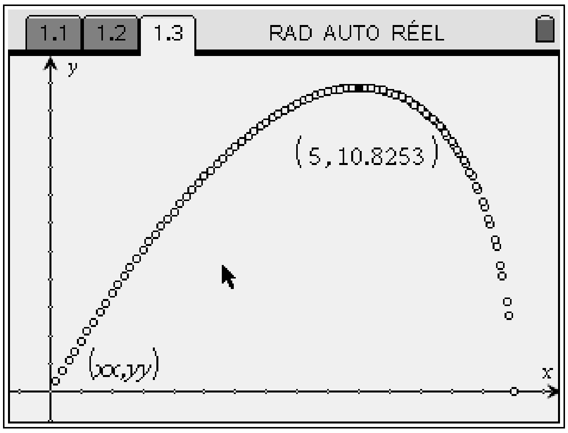
Dans la colonne **A** et dans la cellule grisée, à l'aide de l'outil **Capture automatique de données**, remplacer *var* par **base**, puis dans la colonne **B** faire de même en remplaçant *var* par **aire**. Nommer **xx** et **yy** respectivement les colonnes **A** et **B**
Revenir à la page précédente et animer le curseur : le tableau se remplit automatiquement.



Affichage du nuage de points (**base**, **aire**) :

Ouvrir une page **Graphiques & géométrie**.
Choisir **Nuage de points**, associer à x le nom de la colonne **A** et à y le nom de la colonne **B**.
Prendre un **Zoom Données**.

En plaçant un point sur le nuage de points (**Point Sur**), on peut obtenir une valeur approchée du maximum.
Ci-contre, le maximum semble atteint pour un point proche du point de coordonnées (5 ; 10,8253).



2) a) On a vu plus haut que x doit appartenir à l'intervalle]0 ; 7,5[pour que le triangle existe.

b) Si $BC = x$ alors $AB = AC = \frac{15-x}{2}$. Soit H le milieu de $[BC]$. $BH = \frac{x}{2}$.

On a $\mathcal{A}(x) = \frac{1}{2} AH \times BC$.

Le calcul de AH s'effectue avec la propriété de Pythagore dans le triangle AHB : $AH^2 = AB^2 - BH^2$.

On obtient $AH = \sqrt{\left(\frac{15-x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{-15(2x-15)}$.

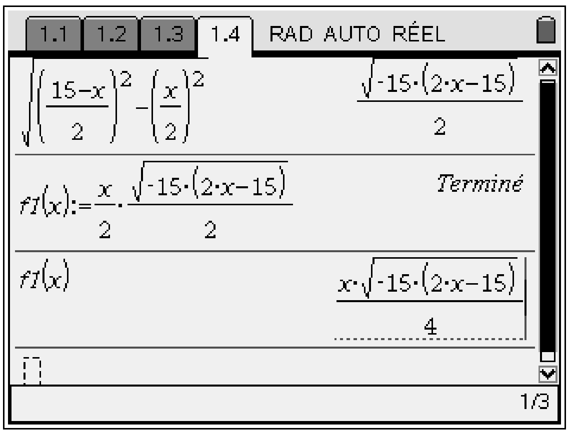
Finalement, on a bien : $\mathcal{A}(x) = \frac{x}{4}\sqrt{-15(2x-15)}$.

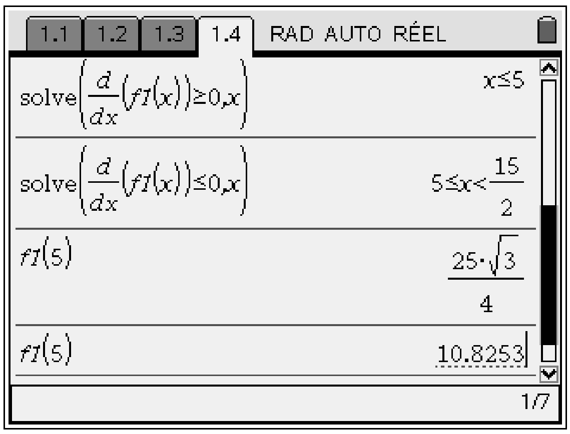
Pour démontrer la conjecture, nous allons étudier la fonction f_1 définie par $f_1(x) = \frac{x}{4}\sqrt{-15(2x-15)}$.

Ouvrir une page **Calculs**. Définir f_1.
Résoudre les inéquations $f_1'(x) \geq 0$ et $f_1'(x) \leq 0$
Le résultat montre que $f_1'(x)$ change de signe pour $x = 5$, qu'elle est positive sur]0 ; 5[et négative sur]5 ; 7,5[. Par conséquent, f_1 présente un maximum pour $x = 5$; ce maximum vaut :

$$f_1(5) = \frac{25\sqrt{3}}{4} \approx 10{,}8253.$$

Les conjectures faites sont donc démontrées.





3. Pour aller plus loin

Le résultat est indépendant de la valeur du périmètre :
« Parmi les triangles isocèles de périmètre constant celui qui possède l'aire maximale est le triangle équilatéral ».