EP 058 - 2009 : Suite définie par sommation

Auteur du corrigé : François TEXIER **TI-Nspire™ – TI-Nspire™ CAS**

***Avertissement** : ce document a été réalisé avec la version* 1.7

Fichier associé : EP058_2009_SuiteSommation.tns

1. Le sujet

Sujet 058 de l'épreuve pratique 2009 – Suite définie par sommation

Enoncé

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n non nul, par :

$$v_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots. + \frac{1}{n^2}.$$

1. À l'aide d'un outil adapté, calculer les 500 premiers termes de la suite (v_n).
Quelle conjecture peut-on faire concernant la convergence de cette suite ?

2. Rechercher, dans les deux cas suivants, à l'aide de l'outil choisi, un entier n_0 tel que, pour tout entier $n \geq n_0$, on ait :
(a) $v_{n+1} - v_n \leq 10^{-3}$;
(b) $v_{n+1} - v_n \leq 10^{-5}$.
Comment interpréter ces résultats au regard de la conjecture émise à la question **1** ?

3. Pour tout nombre entier naturel non nul n, on pose $x_n = v_n + \frac{1}{n}$.
À l'aide de l'outil choisi, calculer les 500 premiers termes de la suite (x_n) puis représenter graphiquement les suites (v_n) et (x_n).
Quelle conjecture peut-on faire sur la nature de ces deux suites ?

4.
a) Démontrer la conjecture émise à la question **3**.
b) Conclure sur la convergence de la suite (v_n).

Production demandée

- Obtention des 500 premières valeurs des suites (v_n) et (x_n), ainsi que la représentation graphique de ces valeurs.
- Obtention des valeurs de n_0 à la question **2**.
- Réponses argumentées pour la question **4**.

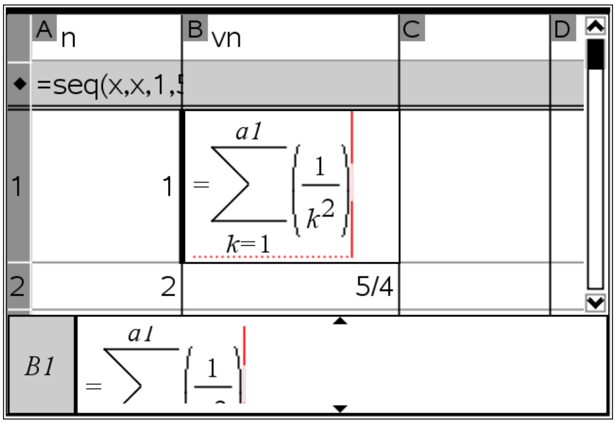
Compétences évaluées

- Émettre des conjectures.
- Démontrer des inégalités.
- Résoudre une inéquation.

2. Corrigé

1) Ouvrir une page **Tableurs & listes**.

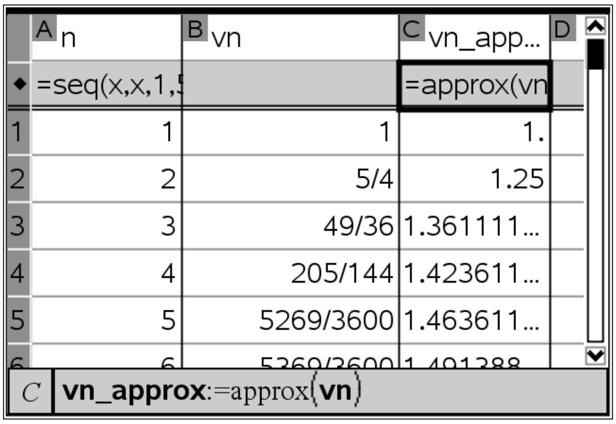
Nommer « n » la colonne **A**, puis, dans la cellule grisée de la colonne **A**, saisir la formule **=seq(x,x,1,500,1)** qui permet de créer les 500 premières valeurs de n.
Nommer « vn » la colonne **B**, puis, en cellule **B1**, entrer la formule indiquée ci-contre et valider.
Revenir sur la cellule **B1**, puis utiliser le menu **Données**, **Saisie rapide**, puis sélectionner les cellules **B2** à **B500** et valider pour créer la suite (v_n).



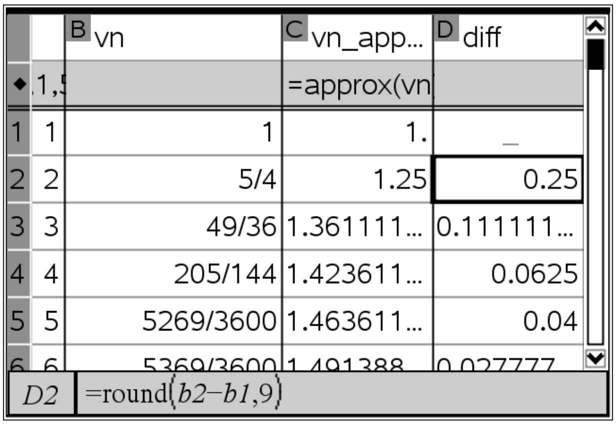
Régler l'affichage du classeur en virgule flottante (menu **Fichier**, **Réglages**, **Réglages du classeur**, **Afficher chiffres**) ; ce réglage sera important pour la question **2**).

Nommer «vn_approx » la colonne **C**, puis, dans la cellule grisée de la colonne **C**, entrer la formule ci-contre et valider.

En parcourant la colonne **C**, il semble que la suite (v_n) soit croissante et convergente vers un réel proche de 1,65.



2) Nommer « diff » la colonne **D**, puis dans la cellule **D2**, entrer la formule ci-contre qui permet d'obtenir la valeur approchée à 10^{-9} près de la différence de deux termes consécutifs de la suite (v_n) et valider.
Revenir sur la cellule **B2**, puis utiliser le menu **Données**, **Saisie rapide**, puis sélectionner les cellules **B2** à **B500** et valider pour créer la liste des valeurs approchées des différences de deux termes consécutifs.

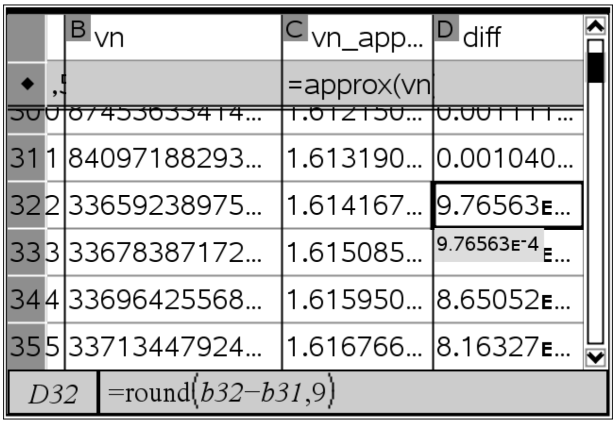


Parcourir ensuite la colonne **D** pour trouver les deux valeurs de n_0.

On obtient alors :

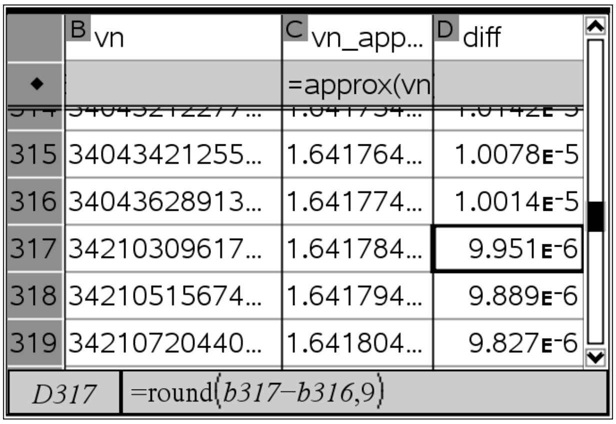
(a) $v_{n+1} - v_n \leq 10^{-3}$ pour $n \geq 31$.

N.B. $v_{n+1} - v_n$ est lu sur la ligne $n + 1$ du tableur.



(b) $v_{n+1} - v_n \leq 10^{-5}$ pour $n \geq 316$.

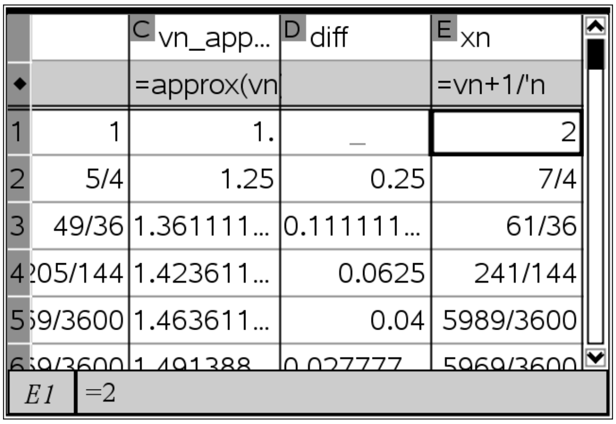
Ces résultats tendent à confirmer la convergence de la suite (v_n), puisque la différence de deux termes consécutifs semble tendre vers 0.



	B vn	C vn_app...	D diff
♦		=approx(vn	
315	34043421255...	1.641764...	1.0078E-5
316	34043628913...	1.641774...	1.0014E-5
317	34210309617...	1.641784...	9.951E-6
318	34210515674...	1.641794...	9.889E-6
319	34210720440...	1.641804...	9.827E-6

D317 =round(b317−b316,9)

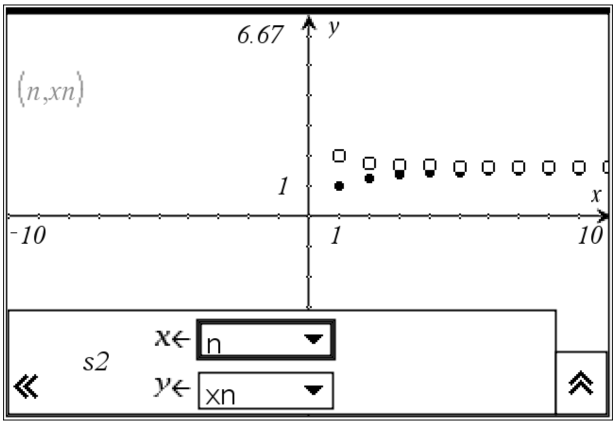
Nommer «xn » la colonne **E**, puis, dans la cellule grisée de la colonne **E**, entrer la formule qui figure ci-contre dans cette même cellule et valider.



		C vn_app...	D diff	E xn
♦		=approx(vn		=vn+1/'n
1	1	1.	_	2
2	5/4	1.25	0.25	7/4
3	49/36	1.361111...	0.111111...	61/36
4	205/144	1.423611...	0.0625	241/144
5	59/3600	1.463611...	0.04	5989/3600

E1 =2

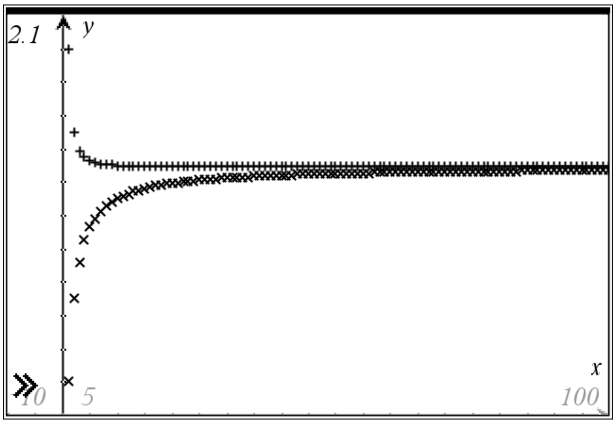
Insérer une page **Graphiques & géométrie**.
Choisir, dans le menu **Type de graphique**, **Nuage de points**, paramétrer « s1 » pour la suite (v_n) et « s2 » pour la suite (x_n).



Masquer ensuite la ligne de saisie et demander un **Zoom données** et, éventuellement, affiner le réglage.

Le réglage de la copie d'écran ci-contre est :
Xmin = –10 ; **Xmax** = 100 ; **Ymin** = 0,9 ; **Ymax** = 2,1 .

Au vu de ce graphique, il semble que les suites (v_n) et (x_n) soient adjacentes.



4)

a) Démontrons que les suites (v_n) et (x_n) sont adjacentes.

Pour la suite (v_n) : pour tout $n \geq 1$, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} > 0$, donc la suite (v_n) est croissante.

Pour la suite (x_n) : pour tout $n \geq 1$, $x_{n+1} - x_n = v_{n+1} - v_n + \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{(n+1)^2} - \dfrac{1}{n\,(n+1)} = \dfrac{-1}{n\,(n+1)^2} < 0$, donc la suite (x_n) est décroissante.

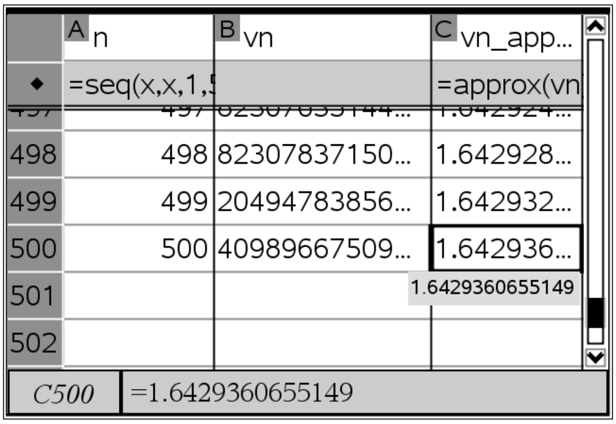
De plus, pour tout $n \geq 1$, $x_n - v_n = \dfrac{1}{n}$; or $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (x_n - v_n) = 0$.

Les suites (v_n) et (x_n) sont donc adjacentes.

b) Les suites (v_n) et (x_n) étant adjacentes, elles sont convergentes et ont la même limite l.

En reprenant les valeurs approchées de la suite (v_n), il semble que la limite commune l de ces deux suites soit comprise entre 1,64 et 1,65.

Remarque : la valeur exacte de cette limite est $\dfrac{\pi^2}{6}$ dont une valeur approchée à 10^{-5} près est 1,64493, ce qui confirme l'encadrement précédent. Mais cette valeur exacte est hors programme en terminale S et n'était donc pas demandée aux candidats.



	A n	B vn	C vn_app...
◆	=seq(x,x,1,5		=approx(vn
498	498	82307837150...	1.642928...
499	499	20494783856...	1.642932...
500	500	40989667509...	1.642936...
501			
502			

1.6429360655149

C500 =1.6429360655149