ESD 2008 – 0717 : Lieu géométrique

Auteur du corrigé : Gilbert Julia **TI-Nspire™ CAS**

Avertissement *: ce document a été réalisé avec la version 1.6 de TI-Nspire CAS*

Fichier associé : esd2008_0717.tns

1. Le sujet

L'exercice proposé au candidat

Soient A, B et C trois points non alignés. On se propose de déterminer l'ensemble des points M du plan tels que les triangles MAB et MAC aient la même aire. On note (Δ_0) la parallèle à (BC) passant par A et (Δ_1) la médiane issue de A dans ABC.
1) Montrer que l'ensemble $(\Delta_0)\cup(\Delta_1)$ est inclus dans $\mathcal{L}$

Pour tout point M distinct de A, on note d_B et d_C les distances respectives de B et C à la droite (AM).
2) Soit M un point n'appartenant pas à (Δ_0). On appelle J l'intersection de la droite (AM) et de la droite (BC).
a) Montrer que si M appartient à $\mathcal{L}$, alors $d_B = d_C$.
b) En déduire que J est le milieu de $[BC]$.

3) Conclure.

Le travail demandé au candidat

Q1) Dégager les méthodes et les savoirs mis en jeu dans la résolution de l'exercice.
Q2) Proposer une solution de la question **2)** telle que le candidat la présenterait à une classe.

2. Eléments de correction

a. Analyse de l'exercice

L'exercice a pour objectif l'étude d'un lieu défini par une condition métrique (l'ensemble $\mathcal{L}$ privé de A pourrait être interprété comme la ligne de niveau 1 de l'application : $M \mapsto \dfrac{\text{aire}(MAB)}{\text{aire}(MAC)}$) et donne l'occasion de retrouver une propriété corollaire d'un théorème du programme de la classe de cinquième :

- Théorème : *Chaque médiane d'un triangle le partage en deux triangles de même aire*.
- Corollaire : *Si M est un point de la médiane issue de A d'un triangle ABC, alors les triangles MAB et MAC ont la même aire*.

Cette propriété corollaire n'est cependant pas caractéristique de la médiane, puisque l'exercice fait justement apparaître que les points appartenant à une deuxième droite, la parallèle à (BC) passant par A, possèdent exactement la même propriété.

L'exercice est assez guidé, il livre d'entrée de jeu l'ensemble $\mathcal{L}$, et on peut regretter que l'initiative de cette recherche ne soit pas mieux confiée aux élèves.

Il propose une phase d'analyse (question **1**) puis une phase de synthèse (question **2**). La nature exacte de $\mathcal{L}$ est ainsi obtenue par une double inclusion, on démontre d'abord que $(\Delta_0)\cup(\Delta_1) \subset \mathcal{L}$ puis que $\mathcal{L} \setminus (\Delta_0) \subset (\Delta_1)$[1]. À ce titre, l'exercice développe une méthode importante d'étude de lieu. Il convient, dans une synthèse de l'exercice avec des élèves, de bien insister sur ces deux phases du raisonnement.

[1]On pourra attirer l'attention des élèves sur la démarche suggérée pour établir l'inclusion $\mathcal{L} \subset (\Delta_0)\cup(\Delta_1)$: « pour montrer qu'un élément appartient à une réunion de deux ensembles E et F, on peut supposer que cet élément n'est pas dans E et établir qu'alors il est nécessairement dans F ».

b. Pistes de résolution pour la question 2

Les triangles *MAB* et *MAC* ont une base commune, [*AM*]. S'ils ont des aires égales, alors leurs hauteurs respectives issues de *B* et de *C* sont égales. On en déduit $d_B = d_C$.

M n'appartenant pas à (Δ_0), les droites (*AM*) et (*BC*) sont sécantes, ce qui légitime l'existence du point *J*. Pour démontrer que *J* est milieu de [*BC*], plusieurs pistes peuvent dès lors être explorées :

- S'intéresser aux triangles *JAB* et *JAC* et exprimer de deux façons leur aire.
- Désigner par *B'* et *C'* les projetés orthogonaux respectifs de *B* et de *C* sur (*AM*). Si (*AM*) n'est pas orthogonale à (*BC*), *B'* et *C'* sont distincts, déterminer la nature du quadrilatère *BB'CC'* ou comparer les triangles *JBB'* et *JCC'*. Si (*AM*) est orthogonale à (*BC*), *B'* et *C'* sont tous deux confondus avec le point *J* et s'intéresser à la position de ce point sur [*BC*] (cas *ABC* isocèle de sommet principal *A*).

A juste raison, l'énoncé ne privilégie aucune de ces pistes particulièrement et, si plusieurs d'entre elles apparaissent, il sera intéressant de les confronter lors de la correction de cette question.

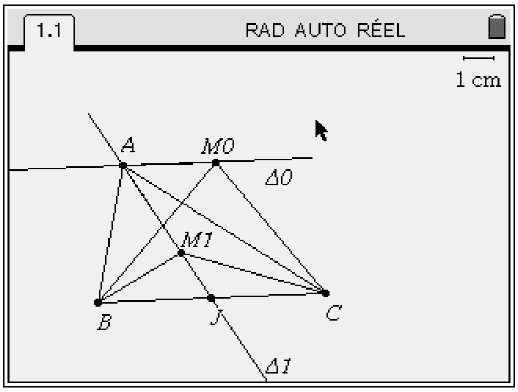
3. Apport de la TI-Nspire

a. Apports proposés

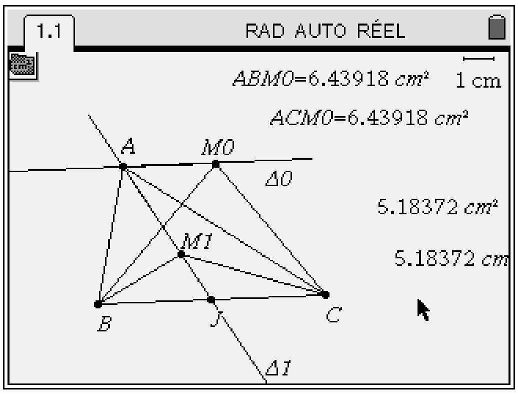
- Une figure illustrant l'inclusion « $(\Delta_0)\cup(\Delta_1)$ est inclus dans $\mathcal{L}$ » (question **1**).
- Une figure de recherche susceptible de faire découvrir l'ensemble $\mathcal{L}$ aux élèves eux-mêmes.

b. Illustration de la question 1

Ouvrir une page **Graphiques & géométrie**, afficher le **plan géométrique**.



Créer (menu 8) le triangle *ABC*, construire (menu 9) le milieu *J* de [*BC*], puis la médiane (Δ_1) que l'on peut nommer en caractères grecs à l'aide de ctrl ∞β°. Construire la parallèle (Δ_0) à (*BC*) passant par *A*. Créer un point M_0 sur (Δ_0) et un autre M_1 sur (Δ_1). Créer les quatre triangles ABM_0, ACM_0, ABM_1 et ACM_1.



A l'aide de (menu 7) **: Mesures 2** : **Aires**, mesurer les aires des quatre triangles.
Facultativement, les textes « *ABM0* = » et « *ACM0*= » ont été insérés devant la mesure les aires des triangles ABM_0 et ACM_0 (menu 1 1 puis cliquer deux fois). On pourrait faire de même pour les aires des deux autres triangles.
Déplacer avec le pointeur successivement le point M_0 puis le point M_1. Observer l'actualisation des aires des triangles correspondants.

Cette illustration peut jouer deux rôles différents :

- Un rôle *d'aide à la résolution* pour des élèves qui seraient en échec sur la question 1 (donc servir à une *différenciation* : seuls les élèves en difficulté disposent de l'illustration dynamique) : en déplaçant M_0, faire observer dans les triangles ABM_0 et ACM_0 ce qui reste invariant : les deux triangles ont une base commune, et la hauteur reste la même. Pour les deux autres triangles, cibler ce qu'il faut démontrer : les points *B* et *C* sont-ils à des distances égales de la médiane issue de *A* ?

- Un rôle de *validation* des résultats de la question 1, une fois que celle-ci a été traitée par tous les élèves.

c. Une figure de recherche

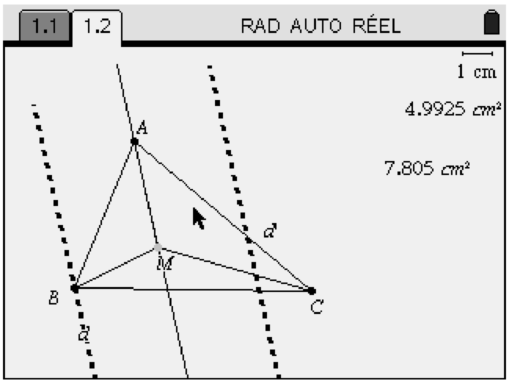
Nous proposons une alternative destinée à augmenter la part d'autonomie des élèves dans la résolution de l'exercice.
Cette variante s'appuie sur une utilisation de la TI-Nspire à des fins *d'aide à la conjecture*. L'objectif est de déléguer aux élèves la charge d'identifier les lignes sur lesquelles *M* peut se déplacer tout en conservant la propriété d'égalité des aires des deux triangles *MAB* et *MAC*.

Dans cette variante, l'ensemble $\mathcal{L}$ n'est plus donné par l'énoncé et les élèves ont à le découvrir. La question **2 a** est posée d'entrée de jeu, juste après « On se propose … même aire ». En synthèse de cette question, on convient que : « *MAB* et *MAC* sont deux triangles de même aire si et seulement si les points *B* et *C* sont à la même distance de la droite (*AM*) ».
La recherche est ensuite relancée : « Où doit se trouver *M* pour cela » ?

Pour tenter de répondre à cette question, la calculatrice entre en jeu, en ouvrant une nouvelle page **Graphiques & géométrie**.

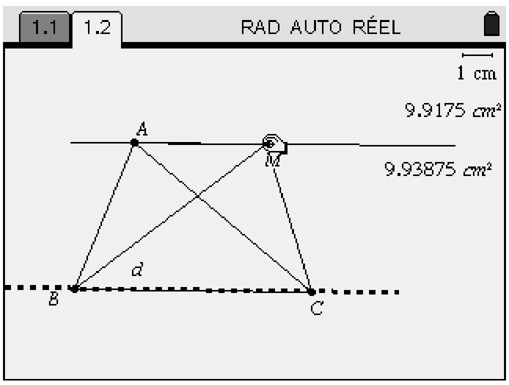
Prérequis :

- Savoir que l'ensemble des points situés à une distance donnée *d* d'une droite D, la ligne de niveau *d* de l'application $M \mapsto \text{dist}(M, \text{D})$, se compose d'une paire de droites parallèles à D (et symétriques l'une de l'autre par rapport à D).



Créer le triangle *ABC*. Le point *M* est maintenant un point libre du plan. Créer la droite (*AM*). Construire la parallèle *d* à (*AM*) passant par *B* et l'image *d'* de *d* par la réflexion d'axe (*AM*) (menu A 2). Leurs attributs (menu 1 4) ont été modifiés en pointillés gras pour plus de lisibilité. La paire de droites {*d* ; *d'*} est l'ensemble des points situés à la même distance de (*AM*) que *B*.

Créer les triangles *MAB* et *MAC* et mesurer leur aire.

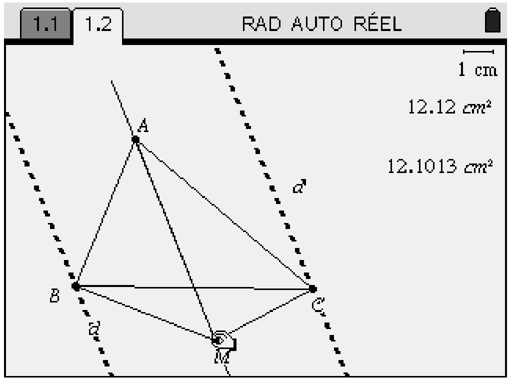


Le point *M* appartient à $\mathcal{L}$ lorsque *C* est sur l'une ou l'autre des deux droites *d* ou *d'*. Il y a donc deux cas à envisager. On va piloter *M* de manière à ce que *C* paraisse appartenir à une des deux droites, puis à l'autre.

Ci-contre, le cas où *C* est sur *d* (on y est presque !). Il reste à ajuster du mieux possible et à faire « glisser » le point *M* en conservant *C* sur *d* pour susciter une première conjecture.

Mais tout aussi bien, *C* peut être sur *d’*. Manipulations analogues pour susciter une deuxième conjecture.

La raison pour laquelle $\mathcal{L}$ est une réunion de deux droites est peut-être plus apparente ainsi.



Une fois les conjectures formulées, il reste à les démontrer et les questions **1), 2 b)** et **3)** posées dans l’exercice gardent toute leur actualité. Il est très important de conserver, dans la phase de résolution de l’exercice, les deux sens d’inclusion.

4. Conclusion

On pourra rapprocher ce dossier du dossier 2008_0703. Dans les deux cas, la recherche du lieu géométrique en question fait intervenir plus ou moins implicitement une ligne de niveau.

Pour compléter l’étude du thème « **Exemples de problèmes de lieu géométrique**[2] », il semble opportun de proposer, dans l’un et l’autre dossier, au moins un problème de lieu géométrique traité à l’aide de l’outil des *transformations* (cas d’une configuration mobile par exemple).

[2] Consulter « *Réussir l’épreuve sur dossier du CAPES de Mathématiques* », G. Julia, éditions Dunod, page 63 à propos des problèmes de leu géométrique puis page 253 pour un exemple d’utilisation d’une Voyage 200 dans une étude de lieu à l’aide de transformations, facilement transférable sur TI-Nspire.