

F6 - LE PROBLÈME DE L'ÉLASTIQUE

TI-82 STATS – TI-83 Plus – TI-84 Plus

Mots-clés : fonction, sens de variation, représentation graphique, minimum d'une fonction.

1. Objectifs

Introduire les notions de fonction numérique, de représentation graphique, de sens de variation, de minimum, à travers l'étude d'un exercice concret.

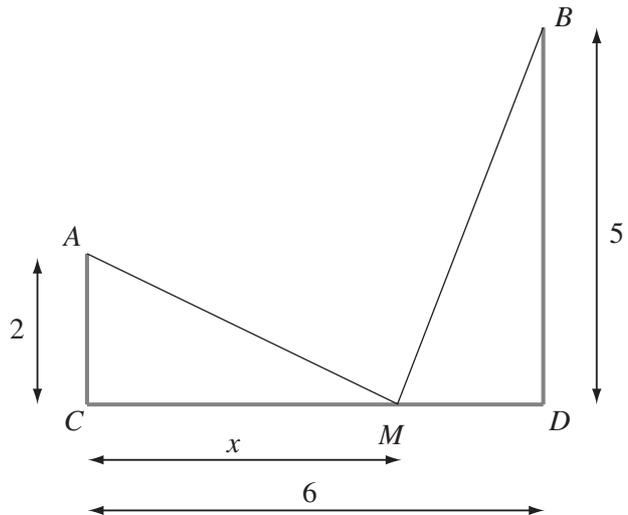
Travailler la notion de valeur approchée et de valeur exacte. Percevoir les potentialités et les limites de la calculatrice.

2. Énoncé

Un élastique fixé en A et B est passé dans un anneau (matérialisé par le point M) qui coulisse entre C et D . L'unité est le centimètre.

Le but de cette activité est d'étudier les variations de la longueur de cet élastique suivant la position de M sur $[CD]$.

Voir la *fiche élève* pour les questions.



3. Mise en place et commentaires

• La *fiche élève* est distribuée, l'élève commence par réaliser la figure sur son cahier et effectue plusieurs mesures afin de comprendre que L varie suivant la position de M .

On trouve en utilisant le théorème de Pythagore dans les triangles ACM et MDB :

$$L = \sqrt{4 + x^2} + \sqrt{(6 - x)^2 + 25}.$$

• On pourra, pour répondre à la question 3) d), régler le mode d'affichage des nombres après avoir appuyé sur la touche **MODE** (écran 1).

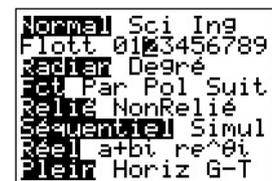
Il faudra, pour traiter la question 6), revenir ensuite au mode Flott initial.

• La question 6) nécessite un nouveau réglage de la table et un déplacement dans cette table à l'aide des touches de déplacement du curseur (écrans 2 et 3).

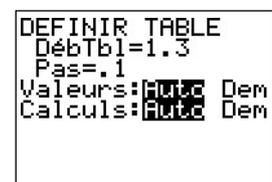
Afin d'atteindre la précision souhaitée dans l'encadrement de x_0 , il est nécessaire de placer le curseur dans la colonne Y_1 ; on notera l'affichage amélioré en bas de l'écran (écran 6).

On en déduit :

$$1,70 < x_0 < 1,72 \text{ et } L_0 \approx 9,22.$$



écran 1



écran 2

X	Y1
1.3	9.2476
1.4	9.2354
1.5	9.2268
1.6	9.2216
1.7	9.2196
1.8	9.2207
1.9	9.2247

écran 3

DEFINIR TABLE	
DébTbl=1.6	
Pas=.01	
Valeurs:Auto Dem	
Calculs:Auto Dem	

écran 4

X	Y1
1.67	9.2198
1.68	9.2197
1.69	9.2196
1.7	9.2196
1.71	9.2196
1.72	9.2196
1.73	9.2196

écran 5

X	Y1
1.67	9.2198
1.68	9.2197
1.69	9.2196
1.7	9.2196
1.71	9.2196
1.72	9.2196
1.73	9.2196

écran 6

- On trouve pour la question 7) c), que la position de M qui correspond à la longueur L la plus petite est située à l'intersection I de $(A'B)$ et (CD) . En effet, cette longueur correspond au plus court chemin qui relie les points A' et B .

En utilisant les triangles $A'CI$ et IBD , on aboutit à $CI = x_0 = \frac{12}{7}$.

On trouve pour L_0 suivant la méthode utilisée : $L_0 = \frac{\sqrt{340} + \sqrt{2125}}{7}$ ou $L_0 = \sqrt{85}$.

Il pourra être intéressant de demander aux élèves de prouver l'équivalence des deux réponses.

- Le tableau de variations est (question 8) :

x	0	$\frac{12}{7}$	6
L	$2 + \sqrt{61}$	$\sqrt{85}$	$2\sqrt{10} + 5$

- L'utilisation de la table dans la question 9) ne permet pas de prolonger très loin la recherche des décimales de x_0 comme le montrent les écrans 7 à 10.

On aboutit par ce procédé à l'encadrement :

$$1,71427 < x_0 < 1,71430.$$

X	Y1
1.71	9.2195
1.711	9.2195
1.712	9.2195
1.713	9.2195
1.714	9.2195
1.715	9.2195
1.716	9.2195

écran 7

X	Y1
1.7138	9.2195
1.7139	9.2195
1.714	9.2195
1.7141	9.2195
1.7142	9.2195
1.7143	9.2195
1.7144	9.2195

écran 8

```

DEFINIR TABLE
DébTbl=1.7142
Pas=1e-5
Valeurs:Auto Dem
Calculs:Auto Dem
  
```

écran 9

X	Y1
1.7142	9.2195
1.7142	9.2195
1.7143	9.2195
1.7143	9.2195
1.7143	9.2195
1.7143	9.2195
1.7143	9.2195

écran 10

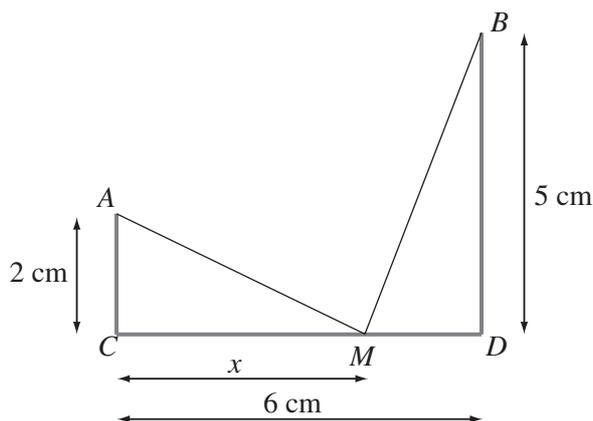
En revanche, la période « 714285 » de 6 chiffres du rationnel $\frac{12}{7}$ permet de comptabiliser les « paquets » de 6 chiffres.

Pour la recherche de la 100^e décimale, il y a donc 16 périodes complètes, la 96^e décimale est donc un 5 et la 100^e est un 2.

Le même raisonnement pour la recherche de la 512^e décimale conduit à 85 périodes entières, la 510^e décimale est donc un 5 et la 512^e est un 1.

F6 - LE PROBLÈME DE L'ÉLASTIQUE

Un élastique fixé en A et B est passé dans un anneau (matérialisé par le point M) qui coulisse entre C et D . Le but de cette activité est d'étudier les variations de la longueur de cet élastique suivant la position de M sur $[CD]$.



- 1) Refaire la figure ci-dessus à l'échelle 1 sur le cahier.
 Mesurer sur cette figure la longueur de l'élastique lorsque x vaut 0, 1, 2 puis 3.
 Compléter alors le tableau ci-dessous après l'avoir recopié :

x	0	1	2	3
$L = AM + MB$				

- 2) Exprimer la longueur $L = AM + MB$ en fonction de x (on pourra valider sa réponse à l'aide de la calculatrice et des résultats mesurés dans la première question).
 3) On souhaite réaliser un graphique qui rende compte des variations de L lorsque le point M décrit le segment $[CD]$.

- a) Dans quel ensemble x prend-il ses valeurs ?
 b) Dans votre calculatrice, placer dans Y_1 (touche $Y=$) l'expression de L trouvée en fonction de x à la question 2).
 c) Préparation de la table de valeurs : appuyer sur **2nd [TblSet]**, régler les paramètres comme l'écran ci-contre, puis appuyer sur **2nd [TABLE]**.



- d) Recopier, puis remplir, le tableau ci-dessous (on donnera des valeurs approchées de L à 10^{-2} près) :

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
L													

- 4) En utilisant une feuille de papier millimétré et en prenant pour unités 2 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées, placer avec précision tous les points de coordonnées $(x ; L)$ du tableau ci-dessus puis terminer avec soin le graphique. Si cela semble nécessaire pour améliorer le tracé, on calculera les coordonnées d'autres points à l'aide de la calculatrice.

5) Utiliser votre graphique pour répondre aux questions suivantes :

Quelle est la longueur de l'élastique pour $x = 4,75$; $x = 0,8$; $x = 2,8$?

Quelles sont les valeurs de x pour lesquelles on a : $L = 9,5$; $L = 9$; $L = 10$?

6) Recherche de la valeur x_0 de x pour laquelle la longueur est minimale

En utilisant la calculatrice et l'option 2nd [TABLE], déterminer un encadrement d'amplitude $2 \cdot 10^{-2}$ de x_0 , puis une valeur approchée à 10^{-2} près de la longueur minimale L_0 correspondante.

7) Recherche des valeurs exactes de x_0 et de L_0

a) Compléter la figure de la question 1) en plaçant le point A' symétrique de A par rapport à (BC) .

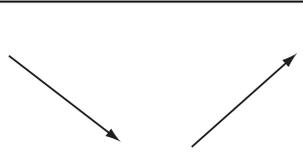
b) Démontrer que $A'M + BM = AM + BM$.

c) Pour quelle position de M sur $[BC]$ obtient-on la longueur L la plus petite ? On appellera I cette position particulière.

d) Calculer la valeur exacte de CI , puis la valeur exacte de $L_0 = AI + IB$.

On pourra, pour le calcul de la valeur exacte de L_0 procéder de deux manières, en remplaçant x par x_0 dans l'expression de L ou bien en utilisant le triangle rectangle $A'BB'$, où B' désigne le projeté orthogonal de A' sur (BD) .

8) Résumer les résultats trouvés en complétant le tableau des variations de L suivant les valeurs de x ; on reportera les valeurs exactes.

x	0	...	6
L	...		...

9) L'étude faite à la question 6) a permis de déterminer un encadrement d'amplitude $2 \cdot 10^{-2}$ de x_0 ; quelle est la précision maximale que permet d'atteindre la calculatrice par ce procédé ?

En utilisant le résultat exact trouvé pour x_0 , donner la 100^e, puis la 512^e décimale de x_0 .