EP 030 – 2007 : Famille de cercles

Auteurs du corrigé : Alain Soléan, France et Michel Villiaumey **TI-Nspire™ /TI-Nspire™ CAS**

***Avertissement** : ce document a été réalisé avec la version 1.4 ; il est disponible dans sa version la plus récente sur notre site http://education.ti.com/france, menu Ressources pédagogiques.*

Fichier associé : EP030_2007_FamilleCercles.tns

1. Le sujet

Sujet 030 de l'épreuve pratique 2007 – Famille de cercles

Enoncé

Dans le plan, on considère un triangle OAB rectangle en O, de sens direct, et une droite d passant par O.

On note A' le projeté orthogonal de A sur d, B' le projeté orthogonal de B sur d et (C) le cercle de diamètre $[A'B']$.

Enfin I est le pied de la hauteur issue de O dans OAB.

1. a) Faire une figure à l'aide d'un logiciel de géométrie.

b) Quelle conjecture peut-on faire concernant les différents cercles (C) lorsque la droite d tourne autour de O.

2. On considère la similitude S de centre I qui transforme A en O.

a) Quel est l'angle de cette similitude ? Justifier que l'image de O est B.

b) Déterminer les images par S des droites (AA') et d, puis celle du point A'.

c) Démontrer la conjecture faite au **1**.

Production attendue

- Obtention de la figure à l'écran avec contrôle de l'examinateur au 1.
- Réponses écrites aux questions **1.b)** et **2.a) b)** et **c)**.

Compétences évaluées

- **Compétences TICE**
  - Utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique pour conjecturer une propriété.
- **Compétences mathématiques**
  - Triangles semblables ;
  - Propriétés de conservation d'une similitude (image d'une droite par une similitude) ;
  - Triangle rectangle inscrit dans un demi-cercle.

2. Corrigé

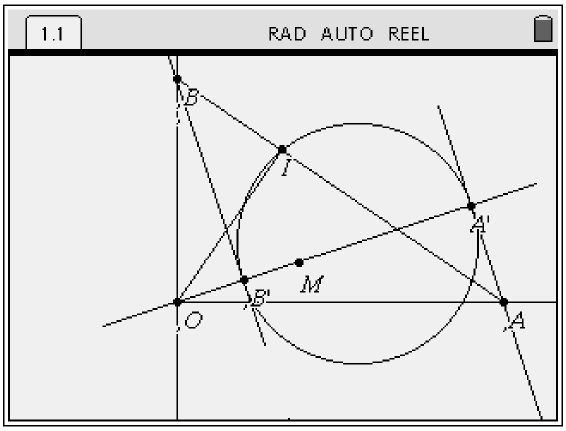
Les écrans sont obtenus à partir de la calculatrice.

1) a) Ouvrir une page **Graphiques & géométrie**.

Afficher **Plan géométrique**.
Construire une **Demi-droite** d'origine O et placer A **Point sur** celle-ci.
Construire la **Perpendiculaire** à (OA) passant par O et placer B, **Point sur** cette droite, tel que OAB soit de sens direct.
Construire un **Cercle** de centre O (rayon quelconque) et placer un point M ce cercle (**Point sur**). Construire la **Droite** définie par ce point et O.
*Remarque : pour cette partie **2**, on peut aussi construire directement la demi-droite d'origine O et la faire « tourner » autour du point O.*

Toutefois, pour le prolongement (partie **3**, *Pour aller plus loin), l'utilisation de* **Lieu** *nécessite de faire varier un élément dans un ensemble donné : on fait alors varier le point M sur le cercle et on obtient ainsi l'ensemble des cercles (C).*

Construire la **Perpendiculaire** à d passant par A et A'
Point d'intersection de d avec cette droite.
Faire de même pour définir le point B'.
Construire le **Milieu** de $[A'B']$ puis le **Cercle** (C) de diamètre $[A'B']$
Enfin construire le **segment** $[AB]$, la **Perpendiculaire** passant par O à (AB) et I **Point d'intersection** de cette droite avec (AB).
Cacher les éléments non indispensables (cercle de centre O, milieu de $[A'B']$)
On peut créer le Segment $[OI]$



b) On peut voir varier le cercle (C) lorsque d tourne autour de O, en déplaçant manuellement le point M.

Ainsi on peut conjecturer que les cercles (C) passent tous par le point I.

2) Soit S la similitude de centre I transformant A en O.

a) L'angle de cette similitude est l'angle $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IO}) = -\frac{\pi}{2}$ (car (IA) est perpendiculaire à (IO) le signe provenant de l'orientation choisie).

Les triangles OAI et BOI sont semblables car leurs angles sont égaux. Il en découle que $\frac{IO}{IA} = \frac{IB}{IO}$ et comme $(\overrightarrow{IO}, \overrightarrow{IB}) = -\frac{\pi}{2}$, l'image du point O est bien le point B.

b) L'image de la droite (AA') est une droite passant par O image de A par S et perpendiculaire à (AA') puisque l'angle de S est $-\frac{\pi}{2}$ donc c'est la droite d.

L'image de la droite d est une droite passant par B image de O par S et perpendiculaire à d puisque l'angle de S est $-\frac{\pi}{2}$ donc c'est la droite (BB').

A' est à l'intersection des droites (AA') et d, donc son image est le point d'intersection des images de ces droites. Donc l'image de A' est à l'intersection de d et (BB') c'est le point B'.

c) D'après ce qui précède on a $(\overrightarrow{IA'}, \overrightarrow{IB'}) = -\frac{\pi}{2}$ donc I appartient bien au cercle de diamètre $[A'B']$.

3. Pour aller plus loin

On peut faire afficher l'ensemble des cercles (C) lorsque la droite d tourne autour de O :
Lieu du cercle (C), lorsque M varie.

On obtient alors l'image ci-contre où les différents cercles (C) sont dessinés.