Binomialsatsen och Pascals triangel

För att arbeta med denna aktivitet så fordras att eleverna är bekanta med grundläggande kombinatorik. Begreppet kombination ska alltså vara bekant. Observera att antalet kombinationer på TI-Nspire skrivs nCr(n,k).

$\mathrm{nCr}(n,k) \blacktriangleright \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$

$\mathrm{nCr}(3,0) \blacktriangleright 1$

$\mathrm{nCr}(3,1) \blacktriangleright 3$

$\mathrm{nCr}(3,2) \blacktriangleright 3$

$\mathrm{nCr}(3,3) \blacktriangleright 1$

Man kan skriva beräkningarna ovan på ett kortare sätt så här. Man matar då in koefficienterna 0,1, 2 och 3 som en lista.

$\mathrm{nCr}(3,\{0,1,2,3\}) \blacktriangleright \{1,3,3,1\}$

$\mathrm{nCr}(4,\{0,1,2,3,4\}) \blacktriangleright \{1,4,6,4,1\}$

$\mathrm{nCr}(5,\{0,1,2,3,4,5\}) \blacktriangleright \{1,5,10,10,5,1\}$

osv.

Sid 1-3:

Vi går igenom i små steg vad som händer när vi utvecklar uttryck på formen $(a+b)^n$.

Utveckling av binom och binomialsatsen

$(a+b)\cdot(a+b)$ kan skrivas som $a\cdot a+ab+ba+b\cdot b$ Om vi utvecklar med TI-Nspire får vi

$\mathrm{expand}((a+b)^2) \blacktriangleright a^2+2\cdot a\cdot b+b^2$ Vi fortsätter med potensen 3:

$\mathrm{expand}((a+b)^3) \blacktriangleright a^3+3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2+b^3$

Var kommer koefficienterna 3 i utvecklingen ovan ifrån? Vi tar det steg för steg:

$(a+b)(a+b)(a+b)=(a\cdot a+ab+ba+b\cdot b)(a+b)=aaa+aab+aba+abb+baa+bab+bba+bbb$

Vi ser att vi kan vi välja ut termer med a, a, och b, dvs a^2b på tre sätt: ***aab*, *aba* och *baa***

Detta är ju samma sak som att välja ut en från tre utan att ta hänsyn till ordningen. Det kan ske på **nCr(3,1)** $\blacktriangleright$ **3**, alltså tre sätt. Likadant med termer ab^2. Det blir också tre sätt.

Vi fortsätter med potensen 4:

$\mathrm{expand}((a+b)^4) \blacktriangleright a^4+4\cdot a^3\cdot b+6\cdot a^2\cdot b^2+4\cdot a\cdot b^3+b^4$

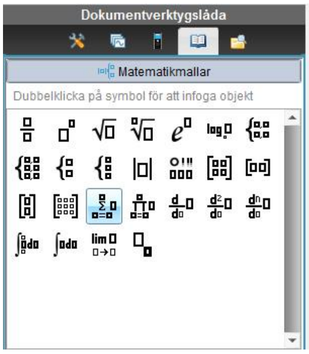
Med samma resonemang: termer med a^3b kan skrivas på 4 sätt: ***aaab*, *aaba*, *abaa*** och ***baaa***. $\mathrm{nCr}(4,1) \blacktriangleright 4$. Termer med a^2b^2 kan skrivas på 6 sätt: ***aabb,abab,baab,baba,bbaa*** och ***abba***. $\mathrm{nCr}(4,2) \blacktriangleright 6$.

Vi använder här summasymbolen för att skriva uttrycken på en kortare form. Vi rekommenderar att ni i redan i tidigare kurser tar upp detta praktiska sätt att skriva och beräkna en summa av termer. Summasymbolen kan ju användas för olika beräkningar på grafräknare i TI 84-familjen också.

$\sum_{k=1}^{10}(k) \blacktriangleright 55$ **Summera alla heltal från 1 till och med 10**

$\sum_{k=1}^{10}(2k-1) \blacktriangleright 100$ **Summera alla udda heltal från 1 till och med 9**

Summasymbolen finns bland mallarna i Dokument-verktygslådan.



Vi kan då skriva $(a+b)^3$ så här:

$\mathrm{nCr}(3,0)\cdot a^3+\mathrm{nCr}(3,1)\cdot a^2\cdot b+\mathrm{nCr}(3,2)\cdot a\cdot b^2+\mathrm{nCr}(3,3)\cdot b^3 \blacktriangleright a^3+3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2+b^3$

För potensen 4 blir det :

$\mathrm{nCr}(4,0)\cdot a^4+\mathrm{nCr}(4,1)\cdot a^3\cdot b+\mathrm{nCr}(4,2)\cdot a^2\cdot b^2+\mathrm{nCr}(4,3)\cdot a\cdot b^3+\mathrm{nCr}(4,4)\cdot b^4$
$\blacktriangleright a^4+4\cdot a^3\cdot b+6\cdot a^2\cdot b^2+4\cdot a\cdot b^3+b^4$

Dessa två uttryck kan då skrivas så här med summasymbolen:

$$\sum_{k=0}^{3}\left(\mathrm{nCr}(3,k)\cdot a^{3-k}\cdot b^k\right) \blacktriangleright a^3+3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2+b^3$$

$$\sum_{k=0}^{4}\left(\mathrm{nCr}(4,k)\cdot a^{4-k}\cdot b^k\right) \blacktriangleright a^4+4\cdot a^3\cdot b+6\cdot a^2\cdot b^2+4\cdot a\cdot b^3+b^4$$

Om vi fortsätter så får vi:

$$\sum_{k=0}^{5}\left(\mathrm{nCr}(5,k)\cdot a^{5-k}\cdot b^k\right) \blacktriangleright a^5+5\cdot a^4\cdot b+10\cdot a^3\cdot b^2+10\cdot a^2\cdot b^3+5\cdot a\cdot b^4+b^5$$

$$\sum_{k=0}^{6}\left(\mathrm{nCr}(6,k)\cdot a^{6-k}\cdot b^k\right) \blacktriangleright a^6+6\cdot a^5\cdot b+15\cdot a^4\cdot b^2+20\cdot a^3\cdot b^3+15\cdot a^2\cdot b^4+6\cdot a\cdot b^5+b^6$$

Detta leder då till binomialsatsen som skrivs så här:

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\mathrm{nCr}(n,k)\cdot a^{n-k}\cdot b^k\right)=(a+b)^n$$

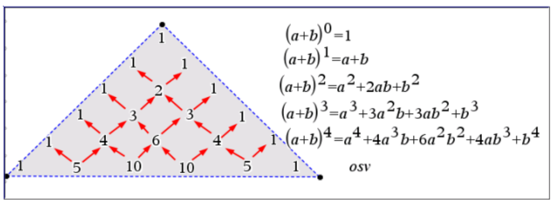
Koefficienterna vid utvecklingarna kan nu ställas upp i ett mönster. Det kallas för Pascals triangel:

Koefficienterna vi får vid utveckling av binom med olika potenser kan ställas upp i ett mönster, där vi får koefficienterna i en ny rad utifrån koefficienterna i den föregående.

Inom matematiken är Pascals triangel en geometrisk framställning av binomialkoefficienterna i form av en triangel. Något förenklat är varje rad ett element längre än föregående rad och varje elements värde är summan av elementen ovanför till vänster och höger (om dessa existerar). Se på pilarna i figuren. På så sätt har varje rad en etta i början och slutet. Rad- och kolumnräkningen börjar båda på noll.

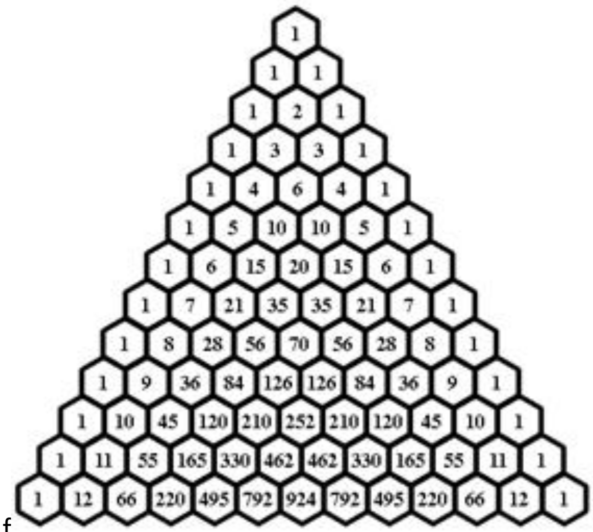
Varje elements värde i triangeln är summan av elementen ovanför. Således, det fjärde elementet på rad fem beräknas genom att det tredje och fjärde elementet på föregående rad adderas. (*Wikipedia*)

Tal på rader i triangeln uppträder när vi utvecklar binom. Se figur!



Talen som uppträder i triangeln har många intressanta egenskaper. Vi kan t.ex. summera talen vågrät. Då får vi 1, 2, 4, 8, 16, 32 osv. vi får alltså en fördubbling när vi går till nästa rad. Summan av talen på rad n kan alltså skrivas

$$2^{n-1} = \frac{2^n}{2}$$



f

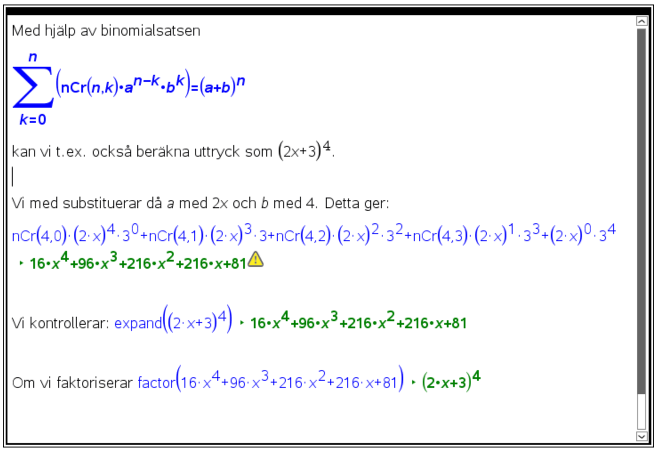
Andra egenskaper:

För de fem första raderna så är talen potenser av 11 (1, 11, 121, 1331, 14641).

Om man adderar två konsekutiva tal i diagonalen 1-3-6-10-15-21-28 … så får man en heltalskvadrat. 1+3=4, 3+6=9, 6+10=16 osv.

Till och med Fibonaccitalen 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 dyker upp i Pascals triangel.

Med binomialsatsen kan vi också beräkna termerna i uttryck som $(2x+3)^4$.



Med hjälp av binomialsatsen

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\text{nCr}(n,k)\cdot a^{n-k}\cdot b^{k}\right)=(a+b)^n$$

kan vi t.ex. också beräkna uttryck som $(2x+3)^4$.

Vi med substituerar då a med $2x$ och b med 4. Detta ger:

$\text{nCr}(4,0)\cdot(2\cdot x)^4\cdot 3^0+\text{nCr}(4,1)\cdot(2\cdot x)^3\cdot 3+\text{nCr}(4,2)\cdot(2\cdot x)^2\cdot 3^2+\text{nCr}(4,3)\cdot(2\cdot x)^1\cdot 3^3+(2\cdot x)^0\cdot 3^4$
$\blacktriangleright\ 16\cdot x^4+96\cdot x^3+216\cdot x^2+216\cdot x+81$

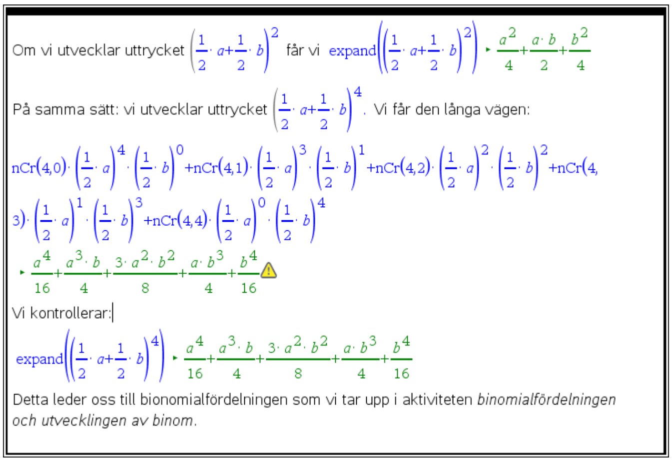
Vi kontrollerar: $\text{expand}\left((2\cdot x+3)^4\right) \blacktriangleright\ 16\cdot x^4+96\cdot x^3+216\cdot x^2+216\cdot x+81$

Om vi faktoriserar $\text{factor}\left(16\cdot x^4+96\cdot x^3+216\cdot x^2+216\cdot x+81\right) \blacktriangleright\ (2\cdot x+3)^4$

Till slut använder vi också binomialsatsen för att utveckla uttryck som $\left(\frac{1}{2}\cdot a+\frac{1}{2}\cdot b\right)^n$.

Koefficienterna framför termerna i utvecklingen $\left(\frac{1}{2}\cdot a+\frac{1}{2}\cdot b\right)^2$ blir $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ och $\frac{1}{4}$.

Detta blir vår övergång till aktiviteten *Binomial-fördelningen och utvecklingen av binom.*



Om vi utvecklar uttrycket $\left(\frac{1}{2}\cdot a+\frac{1}{2}\cdot b\right)^2$ får vi $\text{expand}\left(\left(\frac{1}{2}\cdot a+\frac{1}{2}\cdot b\right)^2\right) \blacktriangleright \frac{a^2}{4}+\frac{a\cdot b}{2}+\frac{b^2}{4}$

På samma sätt: vi utvecklar uttrycket $\left(\frac{1}{2}\cdot a+\frac{1}{2}\cdot b\right)^4$. Vi får den långa vägen:

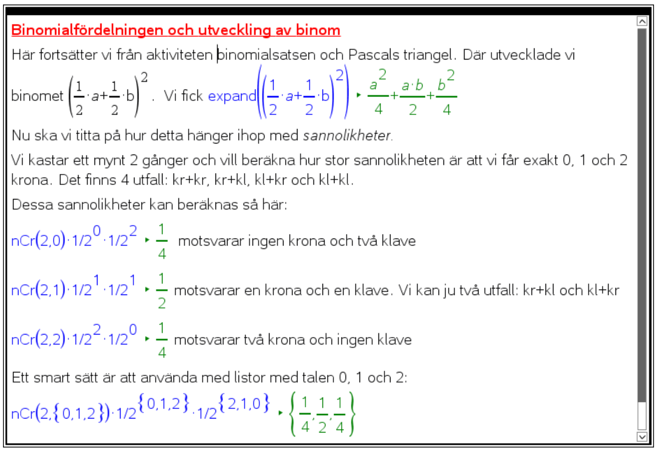
$\text{nCr}(4,0)\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot a\right)^4\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot b\right)^0+\text{nCr}(4,1)\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot a\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot b\right)^1+\text{nCr}(4,2)\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot a\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot b\right)^2+\text{nCr}(4,3)\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot a\right)^1\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot b\right)^3+\text{nCr}(4,4)\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot a\right)^0\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot b\right)^4$
$\blacktriangleright \frac{a^4}{16}+\frac{a^3\cdot b}{4}+\frac{3\cdot a^2\cdot b^2}{8}+\frac{a\cdot b^3}{4}+\frac{b^4}{16}$

Vi kontrollerar:

$\text{expand}\left(\left(\frac{1}{2}\cdot a+\frac{1}{2}\cdot b\right)^4\right) \blacktriangleright \frac{a^4}{16}+\frac{a^3\cdot b}{4}+\frac{3\cdot a^2\cdot b^2}{8}+\frac{a\cdot b^3}{4}+\frac{b^4}{16}$

Detta leder oss till bionomialfördelningen som vi tar upp i aktiviteten *binomialfördelningen och utvecklingen av binom*.

Så här ser den första sidan ut i denna aktivitet:



Binomialfördelningen och utveckling av binom

Här fortsätter vi från aktiviteten binomialsatsen och Pascals triangel. Där utvecklade vi binomet $\left(\frac{1}{2}\cdot a+\frac{1}{2}\cdot b\right)^2$. Vi fick $\text{expand}\left(\left(\frac{1}{2}\cdot a+\frac{1}{2}\cdot b\right)^2\right) \blacktriangleright \frac{a^2}{4}+\frac{a\cdot b}{2}+\frac{b^2}{4}$

Nu ska vi titta på hur detta hänger ihop med *sannolikheter*.

Vi kastar ett mynt 2 gånger och vill beräkna hur stor sannolikheten är att vi får exakt 0, 1 och 2 krona. Det finns 4 utfall: kr+kr, kr+kl, kl+kr och kl+kl.

Dessa sannolikheter kan beräknas så här:

$\text{nCr}(2,0)\cdot 1/2^0\cdot 1/2^2 \blacktriangleright \frac{1}{4}$ motsvarar ingen krona och två klave

$\text{nCr}(2,1)\cdot 1/2^1\cdot 1/2^1 \blacktriangleright \frac{1}{2}$ motsvarar en krona och en klave. Vi kan ju två utfall: kr+kl och kl+kr

$\text{nCr}(2,2)\cdot 1/2^2\cdot 1/2^0 \blacktriangleright \frac{1}{4}$ motsvarar två krona och ingen klave

Ett smart sätt är att använda med listor med talen 0, 1 och 2:

$\text{nCr}(2,\{0,1,2\})\cdot 1/2^{\{0,1,2\}}\cdot 1/2^{\{2,1,0\}} \blacktriangleright \left\{\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right\}$